Université Paris-Diderot — Année 2014-2015
U1CD35 - Calcul différentiel et topologie — L3 MIASHS

TD 4 - Espaces complets

Questions de cours.

(a) Soit (X, d_X) un espace métrique. Qu'est-ce qu'une suite de Cauchy dans (X, d_X) ?

(b) Est-ce que toute suite de Cauchy est convergente ? Est-ce que toute suite convergente est de Cauchy ?

(c) Donner la définition d'espace métrique complet.

(d) Quelle est la relation entre espaces métriques complets et compacts ?

(e) Qu'est-ce qu'un espace de Banach ?

(f) Soit (X, d_X) un espace métrique et $f : (X, d_X) \to (X, d_X)$ une application. Quand dit-on que f est une *contraction* ?

(g) Quelle est la relation entre contractions et fonctions lipschitziennes ?

(h) Énoncer le théorème du point fixe de Banach.

Exercice 1. Soit (X, d_X) un espace métrique, et $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans X. Montrer que $(x_n)_n$ est convergente si et seulement si $(x_n)_n$ admet une sous-suite convergente.

Exercice 2 (**Nombres rationnels**). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - 2$, et considérons les suites $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ et $(z_n)_n$ définies par récurrence comme suit :

$$\begin{cases} x_0 = 1, \\ y_0 = 2, \end{cases} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ z_n = \frac{x_n + y_n}{2}, \quad \text{si } f(z_n) \geq 0 : \begin{cases} x_{n+1} = x_n, \\ y_{n+1} = z_n, \end{cases} \qquad \text{si } f(z_n) < 0 : \begin{cases} x_{n+1} = z_n, \\ y_{n+1} = y_n. \end{cases}$$

(a) Montrer que $x_n, y_n, z_n \in \mathbb{Q}$ et $x_n < z_n < y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Montrer que $y_n - x_n = 2^{-n}$.

(c) Montrer que $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ et $(z_n)_n$ sont des suites de Cauchy.

(d) En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = \lim_n x_n = \lim_n y_n = \lim_n z_n$.

(e) Montrer que $f(\alpha) = 0$. En déduire que $\alpha \notin \mathbb{Q}$, et que $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ n'est pas complet en tant qu'espace métrique (ou espace vectoriel normé).

(f) Donner une interprétation géométrique de la méthode utilisée pour approximer une solution de $f(x) = 0$. Généraliser cette méthode pour f fonction continue croissante ou décroissante, et $x_0 < y_0$ tels que $f(x_0)f(y_0) < 0$.

Exercice 3. Soit (X, d_X) un espace métrique complet, et $Y \subseteq X$ une partie de X. Dénotons par d_Y la distance obtenue comme restriction de d_X à Y. Montrer que (Y, d_Y) est complet si et seulement si Y est fermé dans X.

Exercice 4. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et $f : X \to Y$ une fonction. Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans (X, d_X).

(a) Montrer que si f est uniformément continue, alors la suite $(f(x_n))_n$ est de Cauchy dans (Y, d_X).

Soit maintenant $X = \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ et $Y = \mathbb{R}$, munis de la distance induite par la valeur absolue. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

(b) Montrer que f est continue, mais pas uniformément continue.

(c) Trouver une suite de Cauchy $(x_n)_n$ dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que $(f(x_n))_n$ n'est pas de Cauchy dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5 (**Espace des fonctions bornées**). Soit X un ensemble, et $\mathcal{F}_b(X, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions bornées de X dans $\mathbb{R}$. On munit $\mathcal{F}_b(X, \mathbb{R})$ de la norme infini, définie par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)| \qquad \forall\ f \in \mathcal{F}_b(X, \mathbb{R}).$$

(a) Montrer que $(\mathcal{F}_b(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n$, muni de n'importe quelle norme, est un espace de Banach.

(c) De même pour l'espace $\ell^\infty(\mathbb{R}^n) = \{(x_n)_n \text{ suites dans } \mathbb{R}^n \mid \sup_n \|x_n\| < +\infty\}$ de suites bornées dans $\mathbb{R}^n$.

(d) Soit $\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des fonctions continues de $[-1,1]$ à $\mathbb{R}$. Montrer qu'il est fermé dans $\mathcal{F}_b(X,\mathbb{R})$ (par rapport à la topologie induite par $\|\cdot\|_\infty$).

(e) En déduire que $(\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Exercice 6 (**$\|\cdot\|_1$ sur l'espace des fonctions continues sur** $[-1,1]$)**.** Soit $E = \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[-1,1]$ à $\mathbb{R}$. On munit $\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ de la norme 1 définie par :

$$\|f\|_1 := \int_{-1}^{1} |f(x)|dx, \qquad \forall\, f \in \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R}).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq x \leq -\frac{1}{n}, \\ nx & \text{si } -\frac{1}{n} \leq x \leq +\frac{1}{n}, \\ +1 & \text{si } +\frac{1}{n} \leq x \leq +1. \end{cases}$

(a) Vérifier que $f_n \in E$ pour tout $n \geq 1$.

(b) Montrer que $\|f_n - f_m\|_1 \leq \max\left\{\dfrac{2}{n}, \dfrac{2}{m}\right\}$, et en déduire que la suite $(f_n)_n$ est de Cauchy.

(c) Supposons qu'il existe $f \in E$ limite de (f_n). Montrer que pour tout $\alpha \in]0,1[$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{-\alpha} |f_n(x) - f(x)|dx = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_{\alpha}^{1} |f_n(x) - f(x)|dx = 0.$$

(d) Montrer que pour tout $\alpha \in]0,1[$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{-\alpha} |f_n(x) + 1|dx = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_{\alpha}^{1} |f_n(x) - 1|dx = 0.$$

(e) En déduire que

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq x < 0, \\ +1 & \text{si } 0 < x \leq +1, \end{cases}$$

et que $(\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ n'est pas complet.

Exercice 7 (**Espace des suites à somme bornée**)**.** On considère l'espace des suites de $\mathbb{R}$ suivant :

$$\ell^1(\mathbb{R}) := \{(x_k)_k \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_n |x_n| < +\infty\},$$

muni de la norme $\|(x_n)_n\|_1 := \sum_n |x_n|$. On veut montrer que $(\ell^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ est un espace de Banach. Une suite $(x_k)_k \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est une fonction $X : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Comme il faudra considérer des suites de Cauchy d'éléments de $\ell^1(\mathbb{R})$, on utilisera plutôt la notation $X : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $X(k) = x_k$. Soit $(X_n)_n$ une suite de Cauchy d'éléments dans $\ell^1(\mathbb{R})$. On veut montrer que cette suite converge en norme $\|\cdot\|_1$ vers un élément $X_\infty \in \ell^1(\mathbb{R})$. Par définition de suite de Cauchy, on a que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n,m \geq N(\varepsilon), \|X_n - X_m\|_1 \leq \varepsilon.$$

(a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $n,m \geq N(\varepsilon)$ on a : $|X_n(k) - X_m(k)| \leq \varepsilon$.

(b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe : $\lim\limits_{n\to\infty} X_n(k) =: X_\infty(k) \in \mathbb{R}$.

(c) Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que : $\displaystyle\sum_{k=K}^{\infty} \left|X_{N(\varepsilon)}(k)\right| \leq \varepsilon$.

(d) Montrer que pour tout $n \geq N(\varepsilon)$ on a : $\displaystyle\sum_{k=K}^{\infty} |X_n(k)| \leq 2\varepsilon$.

(e) Montrer que pour tout $L \geq K$, il existe $M = M(K, L) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq M$ on a

$$\sum_{k=K}^{L} |X_\infty(k) - X_n(k)| \leq \varepsilon.$$

(f) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=K}^{\infty} |X_\infty(k)| \leq 3\varepsilon$ et $X_\infty \in \ell^1(\mathbb{R})$.

(g) Montrer que $\|X_\infty - X_n\|_1$ tend vers 0 pour n qui tend vers $+\infty$, et conclure.

Exercice 8 (**Espace des applications linéaires continues**)**.** Soit $(V, \|\cdot\|_V)$ un espace vectoriel normé, et $(W, \|\cdot\|_W)$ un espace de Banach. Soit $\mathcal{L}_c(V, W)$ l'espace vectoriel normé des applications linéaires continues de V dans W, muni de la norme subordonnée

$$[\![f]\!] = \sup_{\|v\|_V = 1} \|f(v)\|_W .$$

On veut montrer que $(\mathcal{L}_c(V, W), [\![\cdot]\!])$ est un espace de Banach. Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $(\mathcal{L}_c(V, W), [\![\cdot]\!])$.

(a) Montrer que pour tout $v \in V$ tel que $\|v\|_V = 1$, la suite $(f_n(v))_n$ converge (en norme $\|\cdot\|_W$) vers un vecteur de W, qu'on appelle $f_\infty(v)$.

(b) Soit $f_\infty : V \to W$ l'application définie par

$$f_\infty(v) = \begin{cases} \|v\|_V \cdot f_\infty\left(\frac{v}{\|v\|_V}\right) & \text{si } v \neq 0 \\ 0 & \text{si } v = 0. \end{cases}$$

Montrer que f_∞ est une application linéaire.

(c) Montrer que $[\![f_\infty - f_n]\!]$ tend vers 0 pour n qui tend vers $+\infty$.

(d) Montrer que $f_\infty \in \mathcal{L}_c(V, W)$, et conclure.

Exercice 9. Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On définit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \left(\frac{1}{4}\sin(x + y), 1 + \frac{2}{3}\arctan(x - y)\right).$$

(a) Montrer qu'il existe $K \in]0, 1[$ tel que

$$\|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)\|_1 \leq K \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|_1$$

pour tout $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

(b) En déduire que le système

$$\begin{cases} \frac{1}{4}\sin(x + y) = x \\ 1 + \frac{2}{3}\arctan(x - y) = y \end{cases}$$

admet une unique solution $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(c) Aurait-on pu appliquer la méthode en utilisant la norme infini $\|(x, y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$ au lieu de la norme $\|\cdot\|_1$?

Exercice 10. Dans $\mathbb{R}^2$, dénotons par $\|\cdot\|_p$ pour $p = 1, 2, \infty$ les normes un, deux et infini, et par $[\![\cdot]\!]_p$ les normes subordonnées induites (voir Exercices 11-13 de la Feuille de TD 02). Soit A la matrice en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par

$$A = \tfrac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer $[\![A]\!]_1$, $[\![A]\!]_2$ et $[\![A]\!]_\infty$.

On définit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \left(\frac{2}{3}\cos(x) + \frac{1}{9}\sin(3y), 2 + \frac{1}{6}\big(x + y + \arctan(x - y)\big)\right).$$

Soient $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ les projections $\pi_1(x, y) = x$ et $\pi_2(x, y) = y$.

(b) Montrer que

$$|\pi_1 \circ f(x_1,y_1) - \pi_1 \circ f(x_2,y_2)| \leq \frac{2}{3}|x_1 - x_2| + \frac{1}{3}|y_1 - y_2|,$$
$$|\pi_2 \circ f(x_1,y_1) - \pi_2 \circ f(x_2,y_2)| \leq \frac{1}{3}|x_1 - x_2| + \frac{1}{3}|y_1 - y_2|,$$

pour tout $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$.

(c) Montrer à l'aide des points précédents qu'il existe $K \in]0,1[$ tel que

$$\|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)\|_2 \leq K \,\|(x_1,y_1) - (x_2,y_2)\|_2$$

(d) En déduire que le système

$$\begin{cases} 6\cos(x) + \sin(3y) = 9x \\ 5y - x - \arctan(x-y) = 12 \end{cases}$$

admet une unique solution $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(e) Aurait-on pu appliquer la méthode en utilisant la norme $\|\cdot\|_1$ ou la norme $\|\cdot\|_\infty$ au lieu de la norme $\|\cdot\|_2$?

Exercice 11. Montrer que le système

$$\begin{cases} 5x = 2\sin x + \cos y, \\ 5y = \cos x + \sin(3y), \end{cases}$$

admet une unique solution $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 12 (Théorème du point fixe avec paramètre). Soit Λ une partie d'un espace vectoriel normé, et V un espace de Banach. Soit $F : \Lambda \times V \to V$, une fonction continue, et uniformément contractante dans la deuxième variable, c'est-à-dire qu'il existe $K \in]0,1[$ tel que

$$\forall \lambda \in \Lambda, \forall x,y \in V, \|F(\lambda,x) - F(\lambda,y)\|_V \leq K\,\|x-y\|_V\,.$$

(a) Montrer que pour tout $\lambda \in \Lambda$ il existe un unique $x_\lambda \in V$ tel que $F(\lambda, x_\lambda) = x_\lambda$.

(b) Montrer que l'application $g : \Lambda \to V$ définie par $g(\lambda) = x_\lambda$ est continue.

(c) Énoncer le résultat analogue en remplaçant Λ par un espace métrique, et V par un espace métrique complet. Est-ce que cet enoncé est encore vérifié ?

Exercice 13 (Courbe de Koch). Soit $I = [0,1]$ avec la topologie induite par la topologie standard de $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes muni de sa topologie standard, et

$$E = \{\gamma : I \to \mathbb{C} \mid \gamma \text{ continue et } \gamma(0) = 0, \gamma(1) = 1\}.$$

muni de la norme infini $\|\gamma\|_\infty = \sup_{t\in I}|\gamma(t)|$.

(a) Montrer que E est fermé dans $(\mathcal{C}(I,\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ l'espace des fonctions continues de I à $\mathbb{C}$.

(b) En déduire que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Pour tout $\gamma \in E$, on considère la fonction

$$K(\gamma)(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}\gamma(3t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}{3}\gamma\big(6(t-\frac{1}{3})\big) + \frac{1}{3} & \text{si } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}{3}\gamma\big(6(t-\frac{1}{2})\big) + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\mathrm{i} & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{3}\gamma\big(3(t-\frac{2}{3})\big) + \frac{2}{3} & \text{si } \frac{2}{3} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

(c) Soit $\gamma_0 : I \to \mathbb{C}$ donné par $\gamma_0(t) = t$. Dessiner $\gamma_0(I)$, $K(\gamma_0)(I)$, $K^2(\gamma_0)(I)$.

(d) Montrer que pour tout $\gamma \in E$ on a $K(\gamma) \in E$.

(e) Montrer que $K : E \to E$, $\gamma \mapsto K(\gamma)$ est une application continue.

(f) Montrer que K est une contraction.

(g) Déduire que K admet un unique point fixe $\gamma_\infty \in E$, et que pour tout $\gamma \in E$, on a que $K^n(\gamma)$ converge vers γ_∞ en norme infini.