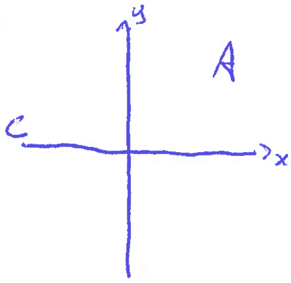
Exo 10) Cob (2)

c) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\left(\frac{1}{xy}\right) & xy\neq 0 \\ 0 & xy=0. \end{cases}$



Soit $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy\neq 0\}$, qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$
$C=\mathbb{R}^2\setminus A$.

Remarquons que $f|_A(x,y)=xy\sin\left(\frac{1}{xy}\right)$ est de classe C^∞

car produit de $(x,y)\mapsto xy$ polynomiale (donc C^∞) et $(x,y)\mapsto\sin\left(\frac{1}{xy}\right)$

C^∞ par composition (de sin et $(x,y)\mapsto \frac{1}{xy}$) (← rapport de C^∞)

Donc $f|_A$ est C^0, différentiable, C^1. et f l'est en tout point de A.

Étudions f en C. Pour montrer la continuité en $(x_0,y_0)\in C$, il faut montrer que $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)=0$.

Comme $f|_C$ est continue (constante), il suffit montrer que:

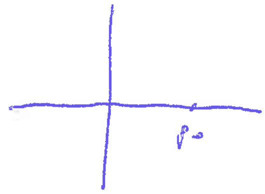
$$0=\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in A}} f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in A}} xy\sin\frac{1}{xy}.$$

~~Rem~~ On a: $\quad -|xy|\leq xy\sin\frac{1}{xy}\leq |xy| \quad \forall (x,y)\in A.$

Par le lemme des gendarmes: $\quad -|xy| \to 0$, $\quad |xy|\to 0$ $\quad$ par continuité de $|xy|$. $\quad \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ A}} xy\sin\frac{1}{xy}=0$

et f est continue en tout $\mathbb{R}^2$.

Étudions la dérivabilité de f en C.



Soit $p_0=(x_0,0)$ avec $x_0\neq 0$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(p_0)=0$ car $f(x,0)\equiv 0$.

Pour la dérivée le long y : il faut calculer

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{x_0 y\sin\frac{1}{x_0 y}-0}{y}=\lim_{y\to 0}x_0\sin\frac{1}{x_0 y}$$

Cette fonction n'admet pas de limite en $y\to 0$. (les valeurs d'adhérence sont $[-|x_0|,+|x_0|]$). Pour le montrer : soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par :

$\frac{1}{x_0 y_n}=\frac{\pi}{2}+2n\pi \Rightarrow y_n=\frac{1}{x_0\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)}$. Alors $\lim_{n\to\infty}y_n=0$ et $\lim_{n\to\infty}x_0\sin\frac{1}{x_0 y_n}=x_0\neq 0$.

Donc $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'existe pas en p_0. Il s'en suit que f n'est pas différentiable en $(x_0,0)$ $\forall x_0\neq 0$, et de façon analogue en $(0,y_0)$ $\forall y_0\neq 0$ (il suffit interchanger le rôle des deux variables).

Il nous reste à étudier la différentiabilité de f en $(0,0)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$ (car $f(x,0)\equiv 0$, $f(0,y)\equiv 0$). Donc si f est différentiable en $(0,0)$, son gradient est $\nabla f(0,0)=(0,0)$. Pour montrer que f est différentiable en $(0,0)$, il faut montrer :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(x,y)|}{\|(x,y)\|}\overset{?}{=}0.$$

$$\parallel$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|xy\sin\frac{1}{xy}|}{\|(x,y)\|}$$

Or, $|x|\le\|(x,y)\|$, $|y|\le\|(x,y)\|$, $|\sin\frac{1}{xy}|\le 1$

Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|xy\sin\frac{1}{xy}|}{\|(x,y)\|} \leq \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\|(x,y)\|^2}{\cancel{\|(x,y)\|}} = 0.$

Il s'en suit que f est différentiable en $(0,0)$.

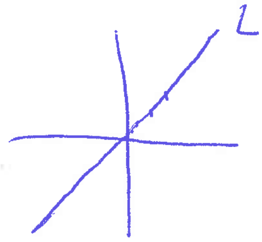
Pour la continuité de la différentielle, on a déjà vu que f est C^1 en A.

f n'est pas différentiable en $C\setminus\{(0,0)\}$, donc pas C^1 en $\overline{C\setminus\{0,0\}} = C$

En effet pour avoir f de classe C^1 en $(0,0)$, il faut que la différentielle soit définie au voisinage de $(0,0)$, et ici ce n'est pas le cas.

(12)

• Montrons que f n'est pas lipschitzienne en $\mathbb{R}^2$. soit $L = \{(x,y) \mid x=y\}$ la droite de pente 1 en $\mathbb{R}^2$ qui passe par $(0,0)$, alors



$\underset{\substack{\shortparallel \\ g(x)}}{f|_L(x,x)} = x^2 \sin\frac{1}{x^2}.$

$g'(x) = 2x\sin\frac{1}{x^2} + x^2\left(\cos\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(-\frac{2}{x^3}\right)$ (pour $x\neq 0$)

$\sup\limits_{x\neq 0} |g'(x)| = +\infty$. donc g n'est pas lipschitzienne, et f non plus.

en effet si $x_n^2 = \frac{1}{2n\pi}$ $(\to 0)$, $(x_n>0)$, $g'(x_n) = 2x_n\cdot\underset{\substack{\shortparallel\\0}}{\sin(2n\pi)} - \frac{2}{x_n}\cdot\underset{\substack{\shortparallel\\1}}{\cos(2n\pi)} =$

$= -2\sqrt{2n\pi} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty.$

• On veut montrer que f n'est pas uniformément continue.

L'idée est la suivante : pour essayer de montrer que f est uniformément continue, une stratégie serait de trouver K boule fermée (compact) telle que $f|_{\mathbb{R}^2\setminus K}$ soit lipschitzienne. Si c'est le cas, $f|_K$ est uniformément continue par le théorème de Heine, $f|_{\mathbb{R}^2\setminus K}$ est u.c. car lipsh., et on conclut. On calcul alors le gradient de f:

$$\nabla f = \left(y \sin\frac{1}{xy} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{xy} ;\ x \sin\frac{1}{xy} - \frac{1}{y}\cos\frac{1}{xy} \right).$$

On remarque que si $x, y \to +\infty$, alors ∇f est borné.

En revanche, si $xy = k$ constant, on a ∇f qui n'est pas borné :

$$xy = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \underset{k\in\mathbb{Z}}{\Rightarrow} \nabla f(x,y) = (y ; -x).$$

Donc $f|_{\mathbb{R}^2\setminus K}$ n'est pas Lipschitzienne (pour n'importe quel K compact).

Ça nous donne une idée pour montrer que f n'est pas unif continue : Soit $y_n = n$, et x_n tel que $x_n y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}}$:

$p_n = (x_n, y_n) = \left(\frac{2}{\pi n} ; n\right)$. Dans ce cas $f(p_n) = \frac{2}{\pi} \sin\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi}$.

Soit q_n construit de façon analogue, mais avec $\frac{3\pi}{2}$ à la place de $\frac{\pi}{2}$:

$q_n = \left(\frac{2}{3\pi n} ; n\right)$. Alors $f(q_n) = \frac{2}{3\pi} \cdot \underbrace{\sin\frac{3\pi}{2}}_{-1} = -\frac{2}{3\pi}$.

Mais alors $(p_n - q_n) = \left(\frac{2}{\pi n} - \frac{2}{3\pi n} ; 0\right) = \left(\frac{4}{3\pi n}, 0\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (0,0)$, et

$f(p_n) - f(q_n) = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{3\pi} = \frac{8}{3\pi} \neq 0$.

Par le critère séquentielle pour la continuité uniforme, f n'est pas uniformément continue.

Exo 10) (et 12)

h) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \begin{cases} xy \ln z^2 & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$

En $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; z \neq 0\}$, qui est ouvert, $f|_A$ est de classe C^∞, car produit de fonctions de classe C^∞ (polynomiale et $\ln(z^2)$).

Donc f est C^∞ sur A.

On veut étudier la continuité de f en $(x_0, y_0, 0) \in C := \mathbb{R}^3 \setminus A$.

On remarque que si $x_0 y_0 \neq 0$, alors:

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(x_0,y_0,0) \\ z\neq 0}} f(x,y,z) = \lim_{\substack{(x,y,z)\to(x_0,y_0,0) \\ z\neq 0}} \underbrace{xy}_{\substack{\downarrow \\ x_0 y_0 \\ \neq 0}} \underbrace{\ln z^2}_{\substack{\downarrow \\ -\infty}} = -\infty.$$

Donc f n'est pas continue en $\{(x_0, y_0, 0) \in C \mid x_0 y_0 \neq 0\} =: U$.

Si $(x_0, y_0, z_0) \in C \setminus U$, c'est à dire si $x_0 = 0$ ou $y_0 = 0$, alors pour tout voisinage (ou boule ouverte centrée) B de $p_0 = (x_0, y_0, 0)$, on a que

$U \cap B \neq \emptyset$. (ouvert de C)

Il s'en suit que si $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$, on peut trouver z_n assez petit ($< \frac{1}{n}$) tel que

$f(x_n, y_n, z_n) < -n$. (C'est donné par le fait que $\lim_{z\to 0} \underbrace{x_n y_n}_{\neq 0} \ln z^2 = -\infty$)

Donc $\lim_{n\to+\infty} f(x_n, y_n, z_n) = -\infty$ mais $(x_n, y_n, z_n) \to (x_0, y_0, 0)$.

Donc f n'est pas continue en $(x_0, y_0, 0)$. (par critère séquentielle de continuité.)

Donc f n'est pas continue en p_0 pour tout point $p_0 \in C$ (c'est à dire $p_0=(x_0,y_0,0)$ $x_0,y_0 \in \mathbb{R}$).

Comme f n'est pas continue en C, elle n'est pas non plus différentiable ni $\mathcal{C}^\infty$.

Pour $z \neq 0$, $\nabla f(x,y,z) = \left(y \ln z^2,\ x \ln z^2,\ \underbrace{xy \frac{1}{z^2} \cdot 2z}_{= \frac{2xy}{z}} \right)$.

(12). Comme f n'est pas continue en $\mathbb{R}^3$, elle n'est pas uniformement continue, ni lipshitzienne.

Exo 11). (et 12).

c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = \left(x \ln(1+x^2),\ xy-3,\ 5 \right)$.

f est continue / différentiable / $\mathcal{C}^1$ si et seulement si les trois coordonnées $f_1(x,y) = x\ln(1+x^2)$ $f_2(x,y) = xy-3$, $f_3(x,y)=5$ le sont.

. $1+x^2 \geq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$, ln est $\mathcal{C}^\infty$ en $]0,+\infty[$, donc f_1 est $\mathcal{C}^\infty$.

f_2 est $\mathcal{C}^\infty$ car polynomiale, f_3 est $\mathcal{C}^\infty$ car constante.

Donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

La différentielle df_p est l'application linéaire $: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ représentée par la matrice jacobienne

$$\mathrm{Jac}(f)_{(p)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(p) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(p) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(p) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln(1+x^2) + \frac{2x^2}{1+x^2}, & 0 \\ y & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(12) Montrons que f n'est pas lipschitzienne (ni uniformément continue)

En effet f_2 n'est pas lipschitzienne. Il suffit de considérer ~~sur~~ le droite $\ell = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. $g(x) = f_2(x,x) = x^2 - 3$ n'est pas lipschitzienne, ni uniformément continue

(déjà vu, par le critère sequentiell appliqué à $x_n = n$ et $x_n' = n + \frac{1}{n}$)

Exo 17 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x\cos y, x\sin y)$

a) f est de classe C^1 (de classe C^∞), car les deux coordonnées le sont.

$x\cos y$ sont produit de deux fonctions C^∞ $\left((x,y) \mapsto x \text{ et } (x,y) \mapsto \begin{matrix}\cos y \\ \sin y\end{matrix}\right)$.
et $x \sin y$.

La différentielle de f est représentée par la matrice Jacobienne :

$$\mathrm{Jac}(f)(x,y) = \begin{pmatrix} \cos y & -x\sin y \\ \sin y & x\cos y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \end{pmatrix}$$

b) Soit $f_1(x,y) = x\cos y$ $\qquad f_2(x,y) = x\sin y$.

Le théorème des accroissements finis pour f_1 nous dit que.

$$f_1(x+h, y+k) - f_1(x,y) = \nabla f_1(x+th, y+tk) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \quad \text{pour un certain } t \in]0,1[$$

Dans ce cas :

$$(x+h)\cos(y+k) - x\cos y = h \cdot (\cos(y+tk)) + k\,(-(x+th)\sin(y+tk))$$

et $$|(x+h)\cos(y+k) - x\cos y| \leq |h| \cdot \underbrace{|\cos(y+tk)|}_{\leq 1} + |k| \cdot \underbrace{|x+th|}_{\leq |x|+|h|} \cdot \underbrace{|\sin(y+tk)|}_{\leq 1}$$

$$\leq |h| + |k|(|x|+|h|).$$

De façon analogue pour f_2.

c) $\| f(x+h, y+k) - f(x,y)\|_2 = \sqrt{(f_1(x+h,y+k) - f_1(x,y))^2 + (f_2(x+h,y+k) - f_2(x,y))^2}$

$\overset{(b)}{\leq} \sqrt{(|h| + |k|(|x|+|h|))^2 + (|h|+|k|(|x|+|h|))^2} \leq \sqrt{2}\left(|h| + |k|(|x|+|h|)\right).$

d) L'inégalité des accroissements finis nous dit que :

$\| f(x+h, y+k) - f(x,y)\|_2 \leq \sup_{t \in]0,1[} [\![df(x+th, y+tk)]\!]_2 \, \|(h,k)\|_2 .$

où $[\![\cdot]\!]_2$ est la norme subordonnée associée à $\| \cdot \|_2$.

Si $A = \mathrm{Jac}(f)(x,y)$, on sait que $[\![A]\!]_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)}$

$A = \begin{pmatrix} \cos y & -x\sin y \\ \sin y & x\cos y \end{pmatrix}$ $\quad {}^tAA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}$: ses valeurs propres sont 1 et x^2.

$\rho({}^tAA) = \max\{1, x^2\}$ et $\sqrt{\rho({}^tAA)} = [\![A]\!] = \max\{1, |x|\}$.

On a donc $\| f(x+h), y+k\|_2 \leq \sup_{t \in]0,1[} \left(\max\{1, |x+th|\}\right) \cdot \|(h,k)\|_2$

$= \max\{1, |x|+|h|\} \cdot \sqrt{h^2+k^2}$.