# TD 6 - Différentielle seconde et extrema

**Questions de cours.**
Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction.

(a) Donner la définition des dérivées partielles d'ordre $p$ de $f$, pour $p \in \mathbb{N}^*$.
(b) Donner la définition de la matrice hessienne de $f$.
(c) Énoncer le théorème de Schwarz.
(d) Sous quelles conditions sur $f$ la matrice hessienne de $f$ est-elle symétrique ?
(e) Donner la définition de fonction de classe $\mathcal{C}^2$.
(f) Donner la définition d'extremum local pour $f$.
(g) Donner la définition d'extremum global pour $f$.
(h) Quel est le lien entre les extrema et les différentielles première et seconde d'une fonction ?
(i) Soit $M$ une matrice symétrique. Que veut dire "$M$ est définie positive" ? Et "$M$ est définie négative" ?
(j) Énoncer la formule de Taylor pour $f$ en $x_0 \in \Omega$ à l'ordre 0 et 1 avec reste intégral (de Laplace).
(k) Énoncer la formule de Taylor-Young pour $f$ en $x_0 \in \Omega$ à l'ordre 1 et 2 avec reste de Peano.
(l) Décrire la regle du calcul de la différentielle d'une composition de fonctions différentiables.

**Exercice 1.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f_n$ est-elle :

(a) continue ?
(b) différentiable ?
(c) de classe $\mathcal{C}^1$ ?
(d) deux fois différentiable ?
(e) de classe $\mathcal{C}^2$ ?
(f) $m$ fois différentiable, avec $m \in \mathbb{N}$ ?
(g) de classe $\mathcal{C}^m$, avec $m \in \mathbb{N}$ ?

(h) Repondre aux mêmes questions pour $g_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_\alpha(x) = |x|^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Exercice 2.** Considérons les fonctions suivantes.

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, & g &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, & h &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \\ (x,y) &\mapsto x^2 - y^3 \cos x, & (x,y) &\mapsto \ln(1+x^2+y^2), & (x,y,z) &\mapsto e^z \arctan(xy). \end{aligned}$$

Calculer les dérivées partielles suivantes.

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, (b) $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, (c) $\dfrac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}$, (d) $\dfrac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}$, (e) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, (f) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$,

(g) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, (h) $\dfrac{\partial^3 f}{(\partial y)^3}$, (i) $\dfrac{\partial g}{\partial x}$, (j) $\dfrac{\partial g}{\partial y}$, (k) $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$, (l) $\dfrac{\partial^3 g}{\partial x \partial y \partial x}$,

(m) $\dfrac{\partial h}{\partial x}$, (n) $\dfrac{\partial h}{\partial z}$, (o) $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}$, (p) $\dfrac{\partial^2 h}{\partial y \partial z}$, (q) $\dfrac{\partial^3 h}{\partial x \partial y \partial z}$, (r) $\dfrac{\partial^n h}{(\partial z)^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 3.** Cet exemple est dû à Peano (1884). Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) Montrer que $f$ est une application continue.
(b) Montrer que la restriction de $f$ à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est de classe $\mathcal{C}^2$.
(c) Calculer $\nabla f$.
(d) Montrer que $f$ est différentiable en $(0,0)$, et calculer la valeur de $\nabla f(0,0)$.
(e) En déduire que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
(f) Calculer les fonctions $g : x \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ et $h : y \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$.
(g) Calculer la dérivée de $g$ et de $h$. En déduire que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.
(h) En déduire que $f$ n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$.

**Exercice 4.** Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, soit $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f_\alpha(x,y) = x^2 - y^2 - \alpha x^4$.
(a) Pour quelles valeurs de $\alpha$ la fonction $f_\alpha$ admet-elle un maximum/minimum global ?
(b) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, trouver les points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\nabla f_\alpha(x,y) = 0$.
(c) Trouver les extrema locaux de $f_\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Exercice 5.** Trouver les extrema locaux et globaux des fonctions suivantes.
(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - y^3$.
(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2 + 4y - 3$.
(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^4 + 3y^2 - 2x^2$.
(d) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = y(x^2 + (\ln y)^2)$.
(e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$.
(f) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \cos x \sin y$.
(g) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (\arctan(x) - y)^2$.
(h) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \max\{x^2, y^2\}$.
(i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2} - 1\right)^2$.

**Exercice 6.** Considérons la fonction $g(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.
(a) Montrer que $g$ s'étend par continuité à une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.
(b) Calculer $g'$ et $g''$, et dessiner le graphe de $g$.
Soit maintenant $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application donnée par $f(x,y) = (y^2 - 4)(y^2 - x^2)g(x)$.
(c) Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$.
(d) Calculer le gradient de $f$.
(e) Trouver les solutions de $\nabla f = (0,0)$.
(f) Trouver les extrema locaux de $f$. Est-ce que les extrema sont globaux ?

**Exercice 7.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2y^2(1 + x + 2y)$.
(a) Est-ce que $f$ admet des extrema globaux ?
(b) Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$.
(c) Trouver les extrema locaux de $f$.

**Exercice 8.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy\left(\sqrt{|1-x^2-y^2|}-1\right)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) Montrer que $f$ est continue. Est-ce que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ ? Est-elle différentiable ? Si ce n'est pas le cas, en quel domaine est-ce que $f$ n'est pas différentiable ?
(b) Trouver les extrema locaux et globaux pour $f$.

**Exercice 9.** Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y,z) = x^2(1 + \cos y) + \ln(1 + x^2z^2)$.
(a) Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$.
(b) Calculer le gradient $\nabla f$ de $f$.
(c) Décrire l'ensemble $C(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \nabla f(x,y,z) = 0\}$.

(d) Calculer la hessienne $H(f)$ de $f$, et montrer que $H(f)(p)$ est semi-définie positive pour tout $p \in C(f)$. Est-ce qu'on peut en déduire que $p$ est un minimum local pour tout $p \in C(f)$ ?

(e) Montrer que tout point dans $C(f)$ est un minimum local et global pour $f$.

**Exercice 10.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^2 \sin(y^2) + x^4$.

(a) Est-ce que $f$ admet des extrema globaux ?

(b) Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$.

(c) Calculer le gradient $\nabla f$ de $f$.

(d) Décrire l'ensemble $C(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \nabla f(x, y) = 0\}$, et le déssiner sur le plan cartésien.

(e) Calculer la hessienne $H(f)$ de $f$, puis les valeurs $H(f)(p)$ pour tout $p \in C(f)$.

(f) Trouver les extrema locaux de $f$.

**Exercice 11.** Soit $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(t) = e^{-\frac{1}{t^2}}$.

(a) Calculer $g'(t)$ et $g''(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^*$.

(b) Montrer que $g$ peut s'étendre par continuité à une fonction définie sur $\mathbb{R}$, qu'on note encore $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que $g$ est de classe $\mathcal{C}^2$ (ou $\mathcal{C}^\infty$).

(c) Montrer que $d^n g(0) = 0$ pour $n = 1, 2$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$).

(d) En déduire que pour tout $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de $p \in \mathbb{R}^n$, et telle que $h(p) = 0$, on a pour le gradient $\nabla(g \circ h)(p) = 0$ et pour la hessienne $H(g \circ h)(p) = 0$.

Soit maintenant $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = 2x + \cos y - g((x - 1)y)$.

(e) Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$.

(f) Écrire la formule de Taylor à l'ordre 2 avec reste de Peano de $f$ en $p_0 = (1, 0)$. En déduire les valeurs de $\nabla f$ et $H(f)$ en $p_0$.

**Exercice 12.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x \sin(y)$.

(a) Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$.

(b) Calculer le gradient et la hessienne de $f$.

(c) Écrire la formule de Taylor à l'ordre 0 avec reste intégral pour $f$ en $(0, 0)$.

(d) Vérifier cette formule par calcul direct.

(e) Écrire la formule de Taylor à l'ordre 1 avec reste intégral pour $f$ en $(0, 0)$.

(f) Vérifier cette formule par calcul direct.

**Exercice 13.** Dans les cas suivants, montrer que les fonctions $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont de classe $\mathcal{C}^r$ au voisinage de $p_0 \in \mathbb{R}^n$. Puis écrire la formule de Taylor à l'ordre $r$ avec reste de Peano en $p_0$. En déduire si possible la valeur du gradient $\nabla f(p_0)$ et de la hessienne $H(f)(p_0)$.

(a) $f(x, y) = x^2 + 2y - 3$, $p_0 = (0, 0)$, $r = 2$.

(b) $f(x, y) = (x - 1)(1 + y) + y^2$, $p_0 = (1, 0)$, $r = 2$.

(c) $f(x, y) = xy\sqrt{\cos(xy)}$, $p_0 = (0, 0)$, $r = 2$.

(d) $f(x, y) = \cos x + \sin y + xy$, $p_0 = (0, \pi)$, $r = 2$.

(e) $f(x, y, z) = \sin x \cos y \arctan z$, $p_0 = (0, 0, 0)$, $r = 3$.

(f) $f(x, y) = \ln(1 + xy) - xy + e^{x^2+y^2}$, $p_0 = (0, 0)$, $r = 2$.

(g) $f(x, y) = e^{-x}(x^3 - 2xy + \sin(x + y))$, $p_0 = (0, 0)$, $r = 2$.

(h) $f(x, y) = \frac{x^2+2xy+y\sin y}{1-\cos(x+y)}$, $p_0 = (0, 0)$, $r = 2$.

(i) $f(x, y, z) = y \ln(1 + x - z)$, $p_0 = (0, 1, 0)$, $r = 2$.