TD 01

I 01-1

QdC a) Soit V un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Une norme $\|\cdot\|$ sur V est une fonction $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$ satisfaisant les conditions suivantes :

1) $\|v\| = 0 \iff v = 0$
2) $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \quad \forall v \in V, \lambda \in \mathbb{K}$.
3) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall v, w \in V$.

Le couple $(V, \|\cdot\|)$ où V est un espace vectoriel et $\|\cdot\|$ est une norme sur V est dit espace vectoriel normé.

b) Deux normes $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$ sur un espace vectoriel V sont équivalentes si $\exists\, c, C > 0$ constantes telles que

$$c\|v\|_b \leq \|v\|_a \leq C\|v\|_a \quad \forall v \in V.$$

(on peut remplacer c par $\frac{1}{C}$).

c) Soit E un ensemble. Une distance d sur E est une fonction $d : E \times E \to \mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$ satisfaisant les conditions suivantes :

1) $d(x,y) = 0 \iff x = y$.
2) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x, y \in E$
3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall x, y, z \in E$.

Le couple (E, d) où E est un ensemble et d est une distance sur E est dit espace métrique.

d) Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. La distance induite par $\|\cdot\|$ sur V est donnée par $d(v,w) := \|v - w\|$.

c) Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.
La boule ouverte de centre p et rayon r est donnée par:

$$B(p,r) := \{v \in V \mid \|v-p\| < r\}.$$

La boule fermée de centre p et rayon r est donnée par:

$$B'(p,r) = \{v \in V \mid \|v-p\| \leq r\}.$$

Exo 1 ($\|\cdot\|_\infty$). $\|\cdot\|_\infty := \max\{|x|, |y|\}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

a) On montre que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme dans $\mathbb{R}^2$. On vérifie les propriétés de la définition (QdC (a)).

- $v = (x,y)$. $\|v\|_\infty = \max\{|x|, |y|\} = 0 \iff |x| = 0$ et $|y| = 0$ (car $|x| \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$) Mais $|x| = 0 \iff x = 0$, et de même $|y| = 0 \iff y = 0$ donc $\|(x,y)\|_\infty = 0 \iff x = y = 0$.

- $\|\underset{\mathbb{R}}{\underset{\uparrow}{\lambda}} v\|_\infty \overset{?}{=} |\lambda| \, \|v\|_\infty$ Soit $v = (x,y)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\|\lambda(x,y)\|_\infty = \|(\lambda x, \lambda y)\|_\infty \overset{(\text{def})}{=} \max\{|\lambda x|, |\lambda y|\} = \max\{|\lambda||x|, |\lambda||y|\}$$

$$= |\lambda| \cdot \max\{|x|, |y|\} = |\lambda| \, \|v\|_\infty. \quad \text{ok}.$$

- $\|v+w\|_\infty \overset{?}{\leq} \|v\|_\infty + \|w\|_\infty \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^2$. Soit $v = (x,y)$, $w = (a,b)$.

$$\|v+w\|_\infty = \|(x,y)+(a,b)\|_\infty = \|(x+a, y+b)\|_\infty \overset{(\text{def})}{=} \max\{|x+a|, |y+b|\}$$

Par les propriétés de la valeur absolue, $|x+a| \leq |x| + |a|$ et $|y+b| \leq |y| + |b|$.
Donc $\max\{|x+a|, |y+b|\} \leq \max\{|x|+|a|, |y|+|b|\}$
On veut montrer que $\max\{|x|+|a|, |y|+|b|\} \leq \underbrace{\max\{|x|, |y|\}}_{\|v\|_\infty} + \underbrace{\max\{|a|, |b|\}}_{\|w\|_\infty}$

Cette inégalité est équivalente au système

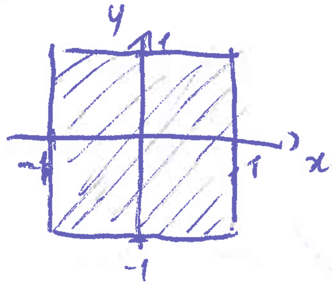
$$\begin{cases} |x| + |a| \leq \max\{|x|,|y|\} + \max\{|a|,|b|\} \\ \text{et} \\ |y| + |b| \leq \quad '' \quad\quad '' \end{cases}$$

Mais $\underset{|y|}{|x|} \leq \max\{|x|, |y|\}$ $\underset{|b|}{|a|} \leq \max\{|a|, |b|\}$, donc les inégalités sont bien vérifiées

b) Soit $B = B'(0,1) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\|_\infty \leq 1 \}$

Mais $\|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|,|y|\} \leq 1 \iff |x| \leq 1$ et $|y| \leq 1$.

$\iff -1 \leq x \leq 1$ et $-1 \leq y \leq 1$. On obtient donc le carré de côté 2 et centre 0 comme en figure:



c) Dans $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, la seule propriété des normes qui pourrait être ne plus vérifiée est : $\forall \lambda \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}$, $\|\lambda z\|_\infty = |\lambda| \, \|z\|_\infty$.

où $\|z\|_\infty = \max\{|\mathrm{Re}\, z|, |\mathrm{Im}\, z|\}$.

En effet, si $\lambda = z = 1+i$, on a $\lambda z = 2i$. et

$\|\lambda z\|_\infty = \|2i\|_\infty = 2$, $|\lambda| = \sqrt{2}$, ($|\cdot|$ est le module dans les complexes).

$\|z\|_\infty = 1$. et $2 = \|\lambda z\|_\infty \neq |\lambda| \, \|z\|_\infty = \sqrt{2}$.

Exo 2, a et b) Dans cet exercice on montrera que les normes $\|v\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\|v\|_1 = |x|+|y|$ $(v=(x,y) \in \mathbb{R}^2)$ sont équivalentes.

Il faut montrer: $\|v\|_2 \leq \|v_1\|$ et $\|v_1\| \leq \sqrt{2}\|v\|_2$ $\forall v \in \mathbb{R}^2$.

- $\sqrt{x^2+y^2} \leq |x|+|y| \iff \underset{|x|^2}{\underset{\shortparallel}{x^2}} + \underset{|y|^2}{\underset{\shortparallel}{y^2}} \leq (|x|+|y|)^2 = |x|^2+|y|^2+2|x||y|$

$\iff 0 \leq 2|x||y|$ qui est vérifié car $|x|,|y| \geq 0$. Donc $\|v\|_2 \leq \|v\|_1$.

- $|x|+|y| \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} \iff \underset{|x|^2+|y|^2+2|x||y|.}{\underset{\shortparallel}{(|x|+|y|)^2}} \leq 2x^2+2y^2 = 2|x|^2+2|y|^2$

$\iff 2|x||y| \leq |x|^2+|y|^2 \iff 0 \leq |x|^2+|y|^2-2|x||y| = (|x|-|y|)^2$

qui est bien vérifié.

Pour vérifier que on ne peut pas trouver des constantes meilleures:

$\|(1,0)\|_2 = 1 = \|(1,0)\|_1$ et $\|(1,1)\|_1 = 2 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{2}\cdot\|(1,1)\|_2$.

Exo 9. ($\alpha \geq \beta$) Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et d la distance induite par $\|\cdot\|$ sur V (voir Q4 c(C))

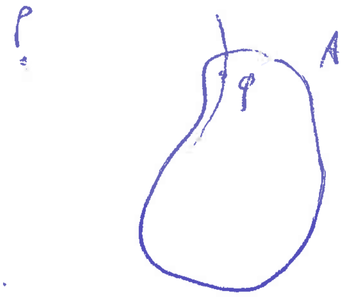
Soit $B(p,r) = \{v \in V \mid d(v,p) = \|v-p\| < r\}$,

$B'(p,r) = \{v \in V \mid d(v,p) = \|v-p\| \leq r\}$.

Soit $A \subset V$ un sous-ensemble de V, et

$\alpha = d(p, A) = \inf\{d(p,q) \mid q \in A\}$.

$\beta = \inf\{r \mid B'(p,r) \cap A \neq \emptyset\}$.



On veut montrer $\beta \leq \alpha$.

C'est équivalent de montrer que $\beta \leq d(p,q)$ $\forall q \in A$.

Soit $q \in A$ quelconque, et $r = d(p,q)$. alors $q \in B'(p,r)$ (par définition) et $q \in A \cap B'(p,r) \neq \emptyset$.

Bon étant $\beta = \inf$ des r avec cette propriété, $\beta \leq r = d(p,q)$

~~Pour obtenir~~ Comme q était ~~choisi quelconque~~ n'importe quel élément de A, on a déduit $\beta \leq \alpha$.

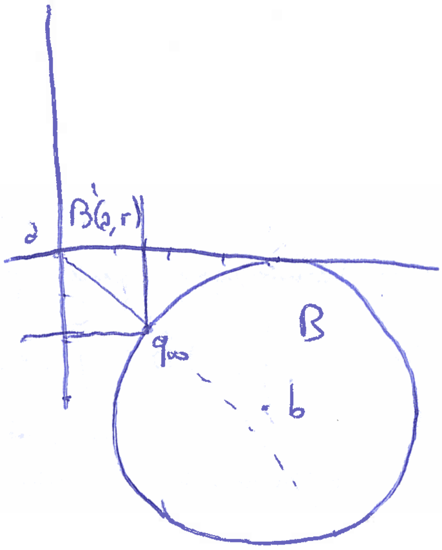
· Si on considère $B(p,r)$ à la place de $B'(p,r)$, il faut modifier comme suit:

$\forall \varepsilon > 0$, $q \in A \cap B(p, r+\varepsilon) \neq \emptyset$. donc $\beta \leq r+\varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \beta \leq r$.

Le reste est analogue.

Exo 10 (f).

$a=(0,0)$, $b=(4,-3)$. $B = B_2(b,3)$.



• $d_\infty(a,B) = ?$

On utilise l'exercice 9 : $d_\infty(a,B) = \sup\{r \mid B'(a,r) \cap B = \emptyset\}$

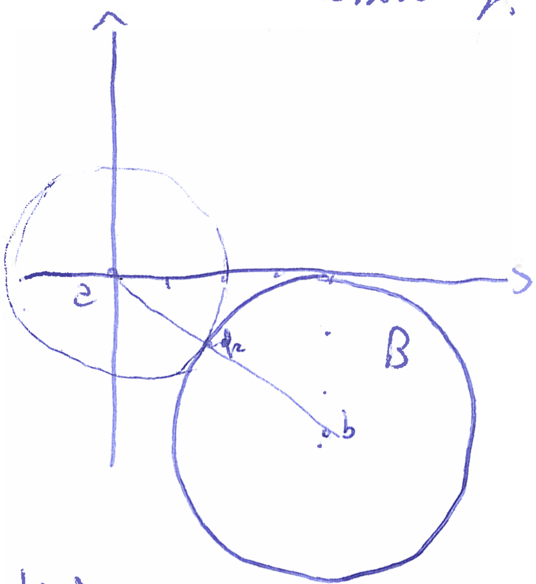
$B'(a,r)$ sont des carrés centrés en 0 (à côtés horizontaux et verticaux). Le sommet de $B'(a,r)$ en bas à droite est de la forme $(r,-r)$. On cherche à trouver le point q_∞ dans $\{y=-x\} \cap \underbrace{\partial B}_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-4)^2+(y+3)^2=3^2\}}$.

$$\begin{cases} y=-x \\ (x-4)^2+(-x+3)^2=3^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-x \\ 2x^2-14x+16=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-x \\ x^2-7x+8=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-x \\ x=\dfrac{7\pm\sqrt{49-32}}{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow x = \frac{7-\sqrt{17}}{2} = r. \qquad d_\infty(a,B) = \frac{7-\sqrt{17}}{2}.$$

(On a montré $d_\infty(a,B) \leq \frac{7-\sqrt{17}}{2}$, Mais si $r < \frac{7-\sqrt{17}}{2}$, $B \cap B'(a,r) = \emptyset$, voir dessin).

• $d_2(a,B) = ?$



Comme dans le cas précédent, on cherche à trouver la boule la plus petite avec centre en a qui intersecte B. Cette boule est le disque tangent à B sur le point q_2 sur le segment entre a et b.

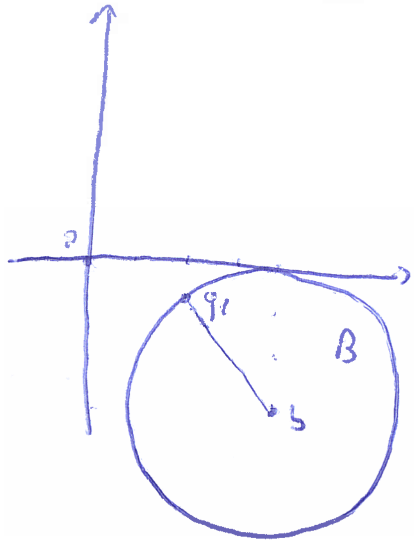
On en déduit que $d_2(a,B) = \text{longueur}(a\text{-}q_2)$

$$= \underbrace{\ell(a,b)}_{\sqrt{3^2+4^2} \,=\, 5} - \underbrace{\ell(q_2,b)}_{3} = 2.$$

$\cdot\ d_1(a,B) = ?$

On utilise directement la définition

$d_1(a,b) = \inf \{ d_1(a,q) \mid q \in B \}$.



On remarque que pour l'inf il suffit prendre $q \in \partial B = \{ (x,y) \mid \|(x,y)-(4,-3)\|_2 = 3 \}$.

On paramétrise les points dans ∂B par :

$p_\alpha = (x,y) = (4+3\cos\alpha, -3+3\sin\alpha)$. Alors

$$d(a,p_\alpha) = |\underset{\geq 0}{4+3\cos\alpha}| + |\underset{\leq 0}{-3+3\sin\alpha}| = 4+3\cos\alpha + 3 - 3\sin\alpha = 7+3(\cos\alpha - \sin\alpha).$$

On denote $f(\alpha) = 7+3(\cos\alpha - \sin\alpha)$. On doit donc trouver le minimum de $f(\alpha)$, $\alpha \in [0,2\pi]$.

$f'(\alpha) = -3(\cos\alpha + \sin\alpha)$. $\quad f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = -\sin\alpha$.

Pour $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ on a le minimum. $\quad q_1 = \left(4 - \frac{3\sqrt{2}}{2} ; -3 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

et $d_1(a,B) = d_1(a,q_1) = 7 + 3\left(\cos\frac{3\pi}{4} - \sin\frac{3\pi}{4}\right) = 7 - 3\sqrt{2}$.