TD 02, Exo 5 b) $B = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z \geq 1,\ \ln z \leq y^2+x^2\}$.

On veut montrer que B est un fermé de $\mathbb{R}^3$.

1) Soit $C = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z\geq 1\}$. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x,y,z)\mapsto z$ est continue (est la projection sur la 3ème coordonnée.

$\Rightarrow C = f^{-1}(\underbrace{[1,+\infty[}_{\text{fermé}})$ est fermé.

On veut montrer que $g : C \to \mathbb{R}^{\cancel{3}},\ (x,y,z)\mapsto x^2+y^2-\ln z$ est continue.

Si on le montre, $B = g^{-1}(\underbrace{[0;+\infty[}_{\text{fermé}})$ est fermé.

- $a :]0;+\infty[\to \mathbb{R},\ z \mapsto \ln z$ est continue (programme des L1)

Il suffit montrer que $\forall \varepsilon>0\ \ \exists\, \delta_-,\delta_+>0$ st $z_0-\delta_-<z<z_0+\delta_+$

$\Rightarrow |\ln z - \ln z_0| = \left|\ln\left(\frac{z}{z_0}\right)\right| < \varepsilon$.

Soit $z\geq z_0$. $\Rightarrow \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) \underset{\ln \text{ croissant.}}{<} \ln\left(\frac{z_0+\delta_+}{z_0}\right) \leq \varepsilon$ si $\delta_+ = (e^{\varepsilon}-1)z_0 > 0$.

Soit $z \leq z_0 \Rightarrow \left|\ln\left(\frac{z}{z_0}\right)\right| = +\ln\frac{z_0}{z} < \ln\left(\frac{z_0}{z_0-\delta_-}\right) \leq \varepsilon$ si $\delta_- = z_0(1-e^{-\varepsilon}) > 0$

- $b : C \to \mathbb{R},\ (x,y,z)\mapsto \ln z$ est continue car $b = \underbrace{a}_{\text{continue}} \circ \underbrace{pr_z}_{\text{proj.}}$.

$c : C \to \mathbb{R}$ est continue (car polynomiale, vu en TD)
$(x,y,z) \mapsto \cancel{z}\, x^2 + y^2$

Enfin $g : C \to \mathbb{R}$ est continue, car $g = \underset{\text{continues}}{c - b}$, vu en TD.

Exo 6, c) ~~Soit~~ $C = \{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid {}^tM = -M \}$.

On veut montrer que C est fermé.

Soit $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ $\qquad C = f^{-1}(\underset{\text{fermé}}{\{0\}})$.
$M \mapsto M + {}^tM$.

Si f est continue $\Rightarrow$ C est fermé.

Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \leadsto M + {}^tM = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a, & b+c \\ c+b & 2d \end{pmatrix}$

Donc l'application f est linéaire ($\Rightarrow$ continue).

Exo 7, b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = 2x - 3y$, $\mathbb{R}^2$ avec la $\|\cdot\|_1$.

On veut montrer que f est Lipschitzienne.

On veut donc estimer $|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)|$ pour tout $(x_1,y_1) \in \mathbb{R}^2$, $(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| = |2x_1 - 3y_1 - 2x_2 + 3y_2| = |2(x_1 - x_2) + 3(y_1 - y_2)|$$

inég. triang.

$$\leq 2|x_1 - x_2| + 3|y_1 - y_2| \leq 3(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) = 3\|(x_1,y_1) - (y_1,y_1)\|_1.$$

Donc f est 3-Lipschitzienne. (par rapport à $\|\cdot\|_1$).

Exo 11 $\{ V=\mathbb{R}^n,\ \|\cdot\|=\|\cdot\|_1$ sur $\mathbb{R}^n$ $\quad A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On veut montrer que la norme subordonnée $[\![\cdot]\!]_1$ à $\|\cdot\|_1$ au départ et à l'arrivée est donnée par :

$$[\![A]\!]_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

· Par définition : $[\![A]\!]_1 = \sup\limits_{\|v\|_1=1} \|Av\|_1$.

Soit $v=(x_1,\dots,x_n)$. Alors $(Av)_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$

Alors. $|Av|_i \leq \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|\,|x_j|$

$$\|Av\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |Av|_i \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\,|x_j| = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \cdot \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| \cdot \max_{j=1\dots n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \|v\|_1 \cdot \max_{j=1\dots n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

Donc $[\![A]\!]_1 \leq \max\limits_{1\leq j\leq n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.

Pour montrer l'égalité, il suffit trouver $v\in\mathbb{R}^n$, $\|v\|_1=1$ et $\|Av\|_1 = \max\limits_{1\leq j\leq n}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|$

Notons que si $v=e_j=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\leftarrow j$. $\Rightarrow Av=\begin{pmatrix}a_{1j}\\ \vdots\\ a_{nj}\end{pmatrix}$ et $\|Av\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|$.

De plus $\|e_j\|_1 = 1$.

Donc $\max\limits_{1\leq j\leq n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \max\limits_{1\leq j\leq n} \|Ae_j\|_1 \leq \max\limits_{\|v\|_1=1} \|Av\|_1 = [\![A]\!]$.