105

TD 03

Exo 8 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^{2n}}$.

a) On veut calculer $\forall x \in \mathbb{R}$ $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Comme f_n est paire $\forall n$, on peut se restreindre à $x \in [0;+\infty[$.

Si $0 \le x < 1$, $\lim_{n\to+\infty} (1+\underbrace{x^{2n}}_{\to 0})^{\frac{1}{n}} = 1$.

Si $x=1$ $\lim_{n\to+\infty} (1+1)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$.

Si $x>1$, $\lim_{n\to\infty} (1+x^{2n})^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} x^2 \left(\frac{1}{x^{2n}}+1\right)^{\frac{1}{n}} = x^2 \lim_{n\to+\infty} \overbrace{\left(1+\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}\right)^{\frac{1}{n}}}^{1} = x^2$.

Donc $f_n(x) \to f_\infty(x) := \max\{1, x^2\}$. $\forall x \in \mathbb{R}_+$ (et $x \in \mathbb{R}$ par parité).

b) On veut montrer que $\|f_n - f_\infty\|_\infty \to 0$ pour $n \to +\infty$.

$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. Comme f_n, f_∞ sont paires, il suffit considérer le sup sur $\mathbb{R}_+$.

Si $0 \le x \le 1$. $\Rightarrow f_\infty(x) = 1$, et $|f_n(x) - f_\infty(x)| = |\sqrt[n]{1+x^{2n}} - 1|$

$\le \sqrt[n]{2} - 1 \to 0$.

Si $x \ge 1$, $f_\infty(x) = x^2$, et $|f_n(x) - f_\infty(x)| =$

$= \sqrt[n]{1+x^{2n}} - x^2 =: g_n(x)$.

On calcule $g_n'(x) = \frac{1}{n}(1+x^{2n})^{\frac{1}{n}-1} \cdot 2n \cdot x^{2n-1} - 2x =$

$= \underset{\geq 0}{2x}\left[\frac{x^{2n-2}}{(1+x^{2n})^{\frac{n-1}{n}}} - 1\right]$. On veut montrer que $g_n' < 0$.

$$\frac{x^{2n-2}}{(1+x^{2n})^{\frac{n-1}{n}}} < 1 \Leftrightarrow x^2 < (1+x^{2n})^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow x^{2n} < 1+x^{2n} \Leftrightarrow 0<1 \text{ (ok)}.$$

$\Rightarrow g_n' < 0$ et g_n est décroissante.

$\Rightarrow \sup_{x \geq 1} g_n(x) = g_n(1) = \sqrt[n]{2} - 1 \to 0$.

Donc $\sup_{x \geq 0} |f_n(x) - f_\infty(x)| = \sqrt[n]{2} - 1 \to 0$ et $f_n \to f_\infty$ uniformément.

c) $f_n(x) = \|(1, x^2)\|_n$, $f_\infty(x) = \|(1, x^2)\|_\infty$

d) f_n est une fonction de classe C^∞ (car $x \overset{h}{\mapsto} 1 + x^{2n}$ est C^∞, et $h(\mathbb{R}) = [1, +\infty[$. la fonction $r(x) = \sqrt[n]{x}$ est C^∞ sur $]0; +\infty[$.)

donc f_n est C^∞ car composition de fonctions de classe C^∞.

On montre que f_∞ n'est pas dérivable en $x_0 = 1$.

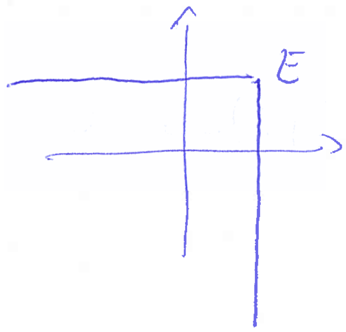
$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f_\infty(x) - f_\infty(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 1}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} x+1 = 2.$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f_\infty(x) - f_\infty(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{1-1}{x-1} = 0 \neq 2$$

donc f_∞ pas dérivable en 1.

Exo 9...

e) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{x,y\} = 1\}$.



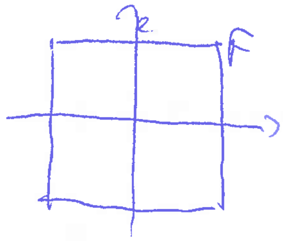
. E est fermé (à vérifier) mais pas borné :

si $(x,y) = (1,-n)$. $\Rightarrow$ $(1,-n) \in E$, et.

$\|(1,-n)\|_\infty = n \to +\infty$.

E pas borné $\Rightarrow$ E pas compact.

f) $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{\max\{|x|,|y|\}}_{\|(x,y)\|_\infty} = 2\}$.



$F = \partial B_\infty((0,0),2)$ est fermé car la frontière d'un ensemble.

et $F \subseteq B'_\infty((0,0),2)$, donc F est borné.

F fermé et borné $\Rightarrow$ F compact.

g) $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq x^2+y^2, z \leq x\}$

G est fermé : $G = G_1 \cap G_2$, $G_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq x^2+y^2\}$

$G_2 = \{ \quad '' \quad \mid z \leq x\}$.

Les fonctions $g_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto z - x^2 - y^2$ et $g_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto z - x$ sont continues

car polynomiales. $G_1 = g_1^{-1}(\underset{\text{fermé}}{[0,+\infty[})$ est fermé

$G_2 = g_2^{-1}(\underset{\text{fermé}}{]-\infty,0]})$ est fermé.

$\Rightarrow G_1 \cap G_2 = G$ est fermé.

④

On montre que G est borné, et donc compact.

Si $(x,y,z) \in G$, alors : $x^2+y^2 \leq z \leq x \Rightarrow x^2-x+y^2 \leq 0$

$\Rightarrow x^2-x+\frac{1}{4}+y^2 \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2 \leq \frac{1}{4}$.

$\Rightarrow$; $|y|^2 \leq \frac{1}{4} \Rightarrow |y| \leq \frac{1}{2}$

$\left|x-\frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow |x| \leq 1$.

$0 \leq x^2+y^2 \leq z \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq z \leq 1$ et G est borné.

Exo 10 a) $A = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid {}^tM M = I\}$.

$M = \cancel{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \Rightarrow M = (v_1 | v_2)$, $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$. ${}^tMM = \begin{pmatrix} \langle v_1 \cdot v_1 \rangle & \langle v_2 \cdot v_1 \rangle \\ \langle v_1 \cdot v_2 \rangle & \langle v_2 \cdot v_2 \rangle \end{pmatrix}$

où $\langle , \rangle$ est le produit scalaire standard.

Donc ${}^tMM = I \Rightarrow \|v_1\| = \|v_2\| = 1$.

En particulier, A est borné.

Si $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, cette application est continue, car
$M \mapsto {}^tMM$. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix}$

chaque coordonnée de f est continue car polynomiale, donc f est continue (car chaque coordonnée est continue).

$\Rightarrow A = f^{-1}(\underbrace{\{I\}}_{\text{fermé}})$ est fermé.

A est fermé et borné $\Rightarrow$ A est compact.

Exo 12, e)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Montrons d'abord que f est continue.

$f|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ est continue car produit de fonctions continues et composition.

En 0 : $0 \leq \lim_{x\to 0} |f(x)| = \lim_{x\to 0} |x \underbrace{\sin \tfrac{1}{x}}_{\leq 1}| \leq \lim_{x \to 0} |x| = 0.$

$\Rightarrow |f(x)| \to 0$ et donc ~~$f(x) \to 0 = f(0)$~~

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ et f est continue.

Soit maintenant $K = [-2, 2]$. K est compact (fermé et borné).

Par le théorème de Heine, $f|_K$ est uniformément continue.

Soit $A = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$. $f|_A$ est différentiable, de dérivée :

$f'(x) = \sin \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2} \cos \frac{1}{x}$.

On a pour $x \geq 1$ $|f(x)| \leq \underbrace{|\sin \tfrac{1}{x}|}_{\leq 1} + \underbrace{\tfrac{1}{|x|}}_{\leq 1} \underbrace{|\cos \tfrac{1}{x}|}_{\leq 1} \leq 2. \Rightarrow \sup_{x\in A} |f'(x)| = 2.$

$\Rightarrow f|_A$ est lipschitzienne, et donc uniformément continue.

Par l'exercice 11, $A \cap K \neq \emptyset$, $A \cup K = \mathbb{R}$ et f est uniformément continue.

Exo 13, c)

$E = (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, $F = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $K = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : \|M\|_\infty \leq 2\}$ et

$f(M) = \det M$.

: K est compact, car il est la boule fermé de centre 0 et rayon 2 (donc fermé et borné).

f est continue, car polynomiale dans les coordonnées !

$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $f(M) = ad - bc$.

Par le théorème de Heine, f est uniformément continue sur K.