TD 4 - Chemins et intégration

Questions de cours.

(a) Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert. Qu'est-ce un chemin dans U ? Et un lacet ?

(b) Définir la concatenation de chemins.

(c) Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert, et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Définir l'intégrale de f le long d'un chemin dans U.

(d) Montrer que l'intégrale le long d'un chemin ne dépend pas de la paramétrisation du chemin.

(e) Définir l'indice $\operatorname{ind}_\gamma(p)$ d'un point $z \in \mathbb{C}$ par rapport à un lacet γ.

(f) Montrer que l'indice d'un point par rapport à un lacet γ est un nombre entier.

(g) Montrer que l'indice $\operatorname{ind}_\gamma(p)$ de p par rapport à un lacet γ ne depend que de la composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma$ qui contient p.

(h) Énoncer le théorème de Morera.

(i) Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert non-vide, et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction. Donner au moins trois caracterization différentes de la phrase « f est holomorphe ».

(j) Énoncer et montrer les formules intégrales de Cauchy.

Exercice 1. Calculer les intégrales

$$J_1 = \int_\gamma x dz, \qquad J_2 = \int_\gamma y dz, \qquad J_3 = \int_\gamma z dz$$

le long des chemins γ suivants :

(a) le segment joignant 0 et $2 + \mathrm{i}$;

(b) le segment joignant 0 et $2 - \mathrm{i}$;

(c) le segment joignant $2 - \mathrm{i}$ et $2 + \mathrm{i}$;

(d) le segment joignant $-r$ et r, avec $r > 0$;

(e) le demi-cercle $|z| = r > 0$ et $y \geq 0$ (commençant par l'angle nul).

Exercice 2. Soit C le cercle centré en z_0 et de rayon $r > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, calculer

$$\int_C (z - z_0)^n dz.$$

Exercice 3. Considerons un demi-cercle C de diamètre le segment $[-3, 3]$, contenu dans le demi-plan supérieur, et parcouru de 3 à -3. Calculer et comparer les intégrales suivants :

$$\int_C e^z dz, \qquad \int_{-3}^{3} e^x dx.$$

Exercice 4. Soient r, s des réels positifs. On considère le rectangle $R = \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re} z| < r, |\operatorname{Im} z| < s\}$. Calculer les intégrales

(a) $\displaystyle\int_{\partial R} z^2 dz$, (b) $\displaystyle\int_{\partial R} \frac{dz}{z}$, (c) $\displaystyle\int_{\partial R} \frac{dz}{z^2}$, (d) $\displaystyle\int_{\partial R} \operatorname{Re}(z) dz$,

où ∂R est parcouru dans le sens antihoraire.

Exercice 5. Dessiner les courbes suivantes, pour $t \in [0, 1]$

(a) $\gamma_1(t) = 1 + t$, (b) $\gamma_2(t) = 2 + \mathrm{i}t$, (c) $\gamma_3(t) = 1 + \mathrm{i}t + t^2$,

(d) $\gamma_4(t) = e^{\mathrm{i}\pi t}$, (e) $\gamma_5(t) = e^{-\mathrm{i}\pi t}$.

Calculer l'intégrale de chacune des fonctions suivantes sur chacune de ces courbes.

(a) $f(z) = z^3$, (b) $g(z) = \bar{z}$, (c) $h(z) = \dfrac{1}{z}$.

Exercice 6. Soient $a, b > 0$, et considerons l'ellipse $\gamma(t) = a\cos t + \mathrm{i}b\sin t$, avec $t \in [0, 2\pi]$. Calculer

$$\int_\gamma |z|^2 dz.$$

Exercice 7. Soit C le cercle de centre 0 et rayon 1, parametré par $\gamma(t) = e^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$. Soit $g : C \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Montrer que

$$\overline{\int_\gamma g(z)dz} = -\int_\gamma \overline{g(z)} z^{-2} dz.$$

Exercice 8. Soit $\gamma(t) = e^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$, $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert contenant le disque unité fermé, et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Calculer les intégrales

$$\int_\gamma \left(2 + z + \frac{1}{z}\right) \frac{f(z)}{z} dz \qquad \text{et} \qquad \int_\gamma \left(2 - z - \frac{1}{z}\right) \frac{f(z)}{z} dz.$$

En déduire que

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{\mathrm{i}t}) \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) dt = 2f(0) + f'(0),$$

et une formule analogue pour

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{\mathrm{i}t}) \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) dt.$$

Exercice 9. Soient $R > 0$, et $f : D(0, R) \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe définie sur le disque ouvert de centre 0 et rayon R. Notons $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ son développement en série entière sur ce disque et soit $0 < r < R$.

(a) Prouver la formule de Gützmer-Parseval :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f(z_0 + re^{i\theta})\right|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} .$$

(b) Que dire de f dans le cas où il existe $n \geq 0$ tel que $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^2 d\theta = |a_n|^2 r^{2n}$?

Exercice 10. Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé, et considerons un lacet $\gamma : I \to \mathbb{C}$ de la forme $\gamma(t) = r(t)e^{2\pi \mathrm{i}\theta(t)}$, avec $r : I \to \mathbb{R}_+^*$ et $\theta : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que

$$\mathrm{ind}_\gamma(0) = \theta(b) - \theta(a).$$

Exercice 11. Dans les cas suivants, dessiner γ, et calculer $\mathrm{ind}_\gamma(p)$ pour tout $p \in \mathbb{C} \setminus \gamma$.

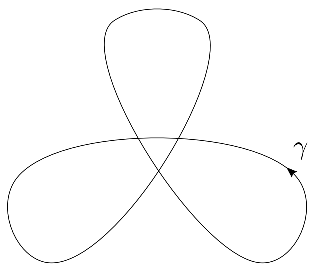
(a) $\gamma(t) = e^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$.

(b) $\gamma(t) = \sin(t) + \mathrm{i}\sin(2t)$, $t \in [0, 3\pi]$.

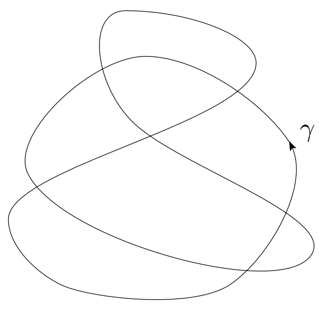
(c) $\gamma(t) = \cos(t) + \mathrm{i}\sin(3t)$, $t \in [0, 4\pi]$.

(d) $\gamma(t) = 3e^{\mathrm{i}t} + e^{\mathrm{i}9t}$, $t \in [0, 2\pi]$.

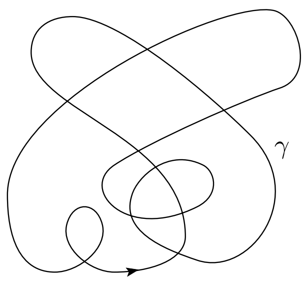
Exercice 12. Dans les cas suivants, calculer $\mathrm{ind}_\gamma(p)$ pour tout $p \in \mathbb{C} \setminus \gamma$.



(a)



(b)



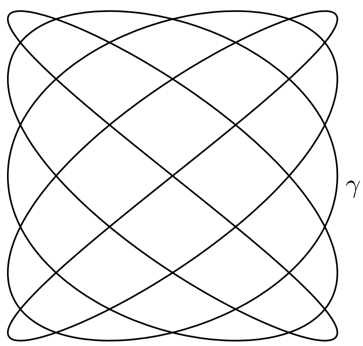
(c)

Exercice 13. Soit $\gamma : I \to \mathbb{C}$ un lacet (on peut supposer parametré comme dans l'Exercice 10), et $p \in \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ un point qui n'appartient pas au support de γ. Considerons la demi-droite en p donnée par $R_\theta = \{p + re^{\mathrm{i}\theta} \mid r \geq 0\}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$ fixé.
Soit $J_\theta = \{t \in I \mid \gamma(t) \in R_\theta\}$, et $M_\theta(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta & x'(t) \\ \sin\theta & y'(t) \end{pmatrix}$ où $\gamma(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$, x, y à valeurs réels.
Supposons que γ intersecte transversalement R_θ, c'est-à-dire que, pour tout $t \in J_\theta$, $\gamma'(t)$ existe et $\det M_\theta(t) \neq 0$. On dit que $t \in J_\theta$ est un point d'intersection positive (resp., négative) si $M_\theta(t) > 0$ (resp., si $M_\theta(t) < 0$).
Soit i_θ^+ (resp., i_θ^-), le nombre de points d'intersection positive (resp., négative).

(a) Montrer que $\operatorname{ind}_\gamma(p) = i_\theta^+ - i_\theta^-$.

(b) Est-ce que i_θ^+ et i_θ^- sont constants en θ ? Localement constants ?

Exercice 14. La courbe γ en figure est paramétrée par $\gamma(t) = \sin(5t) + i\sin(4t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Considerons pour tout $s \in \mathbb{R}_+$, la fonction $f_s(z) = \dfrac{s^4}{z^4 - s^4}$.

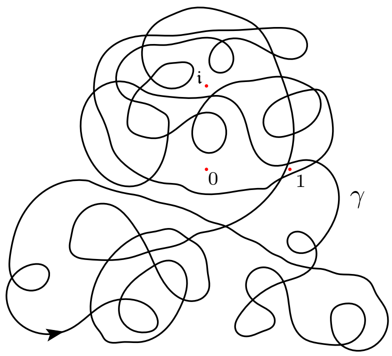


On dénote comme suit les valeurs suivantes du sinus :

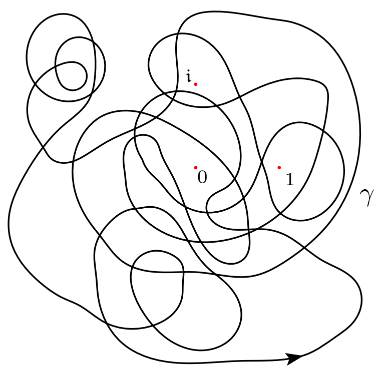
$$b_\pm = \frac{\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}}{4}, \qquad b_- = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right), \quad b_+ = \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right).$$

(a) Pour quelles valeurs de s la fonction f_s est continue sur γ ? Soit J l'ensemble de ces valeurs.
(b) Calculer $\displaystyle\int_\gamma f_s(z)dz$ pour tout $s \in J$.

Exercice 15. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_\gamma \frac{(\mathrm{i}+1)z^2 - z + \mathrm{i}}{z^2(z-1)(z-\mathrm{i})}dz$, où γ est donnée par :



(a)



(b)

Exercice 16. Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ une partie non-vide du plan complexe. On dit que U est *étoilé* s'il existe $p \in U$ tel que pour tout $q \in U$, le segment $[p, q] = \{(1-t)p + tq \mid zt \in [0, 1]\}$ est contenu dans U. On dira que p est un *centre* de U, ou que U est étoilé *par rapport à* p.

(a) Montrer que U est convexe si et seulement si U est étoilé par rapport à p pour tout $p \in U$.

(b) Montrer que le lieu des centres d'une partie étoilée est convexe.

(c) Donner un exemple de ouvert U qui est étoilé ed admet un centre unique.

Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert étoilé, et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe.

(d) Montrer que f admet une primitive holomorphe $F : U \to \mathbb{C}$.