TD 7 - Revêtements

Notions du cours.

- Revêtements, projection, fibre, espace total, base, ouvert trivialisant, feuillets.
- Isomorphismes et automorphismes de revêtements (Deck transformations).
- Relèvements de chemins, d'homotopies, d'applications.
- Monodromie d'un revêtement, revêtements galoisiens, revêtement universel.
- Actions (de groupe) libres et proprement discontinues.

Exercice 1. On identifie $\mathbb{S}^1$ avec le bord du disque unité dans $\mathbb{C}$. Quel est le degré de l'application $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ qui à z associe z^d, pour $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$? Montrer que c'est un revêtement à $|d|$ feuillets.

Exercice 2 (Revêtements et homéomorphismes locaux). Par définition une application $f : X \to Y$ est un *homéomorphisme local* si pour tout $x \in X$ il existe un voisinage ouvert U de x tel que $f(U)$ est ouvert dans Y et $f|_U : U \to f(U)$ est un homéomorphisme. Montrer que :

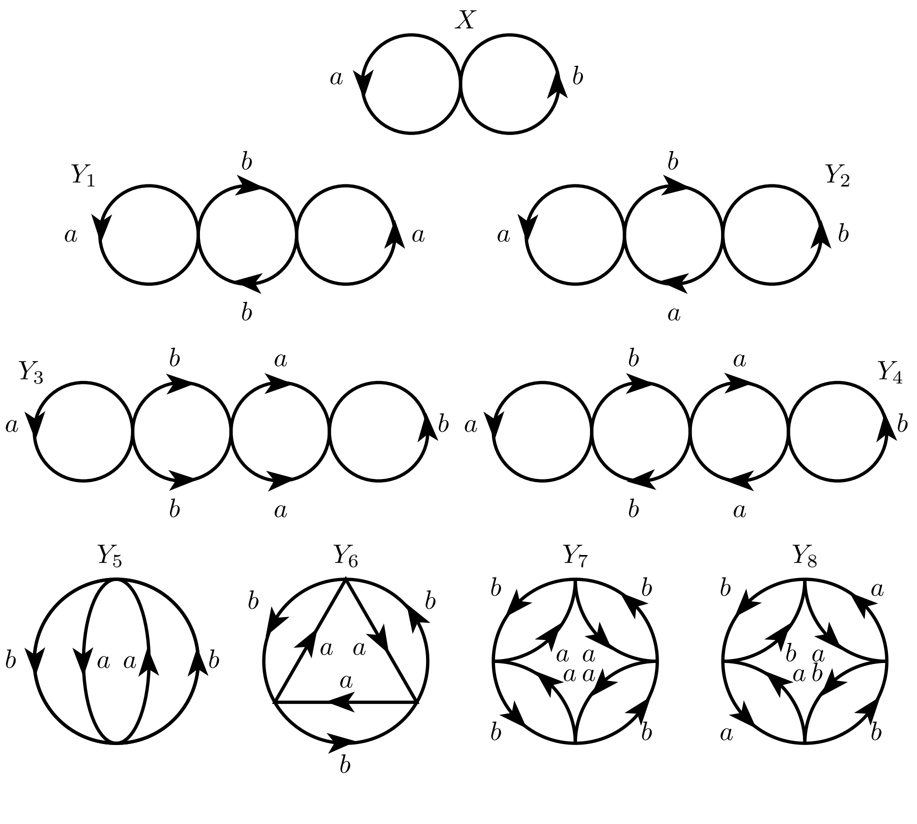
(a) Un homéomorphisme local est une application ouverte et pour tout $y \in Y$, si la fibre $f^{-1}(y)$ est non vide, cette fibre munie de la topologie induite est un espace discret.

(b) La restriction d'un homéomorphisme local f à un ouvert U de X reste un homéomorphisme local.

(c) Un revêtement est un homéomorphisme local (*en particulier un revêtement est une application ouverte*). Donner un contre-exemple à la réciproque.

(d) Si $p : E \to X$ est un homéomorphisme local sur E séparé, tel que toutes les fibres $p^{-1}(x), x \in X$ sont finies et de même cardinal, alors p est un revêtement.

Exercice 3 (Bouquet de deux $\mathbb{S}^1$). Soit $X = \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ le bouquet de deux cercles. On dénote par a et b la paramétrisation des deux cercles, comme en figure. Dans les huit espaces Y_k, on a noté des orientation et des lettres a,b. Cela définissent des applications $\Phi_k : Y_k \to X$, en envoyant les arcs paramétrés par a dans Y_k sur le cercle paramétré par a dans X, en suivant l'orientation.
Déterminer pour tout $k = 1, \ldots, 8$ si Φ_k est un revêtement, et dans ce cas s'il est un revêtement de Galois.



Exercice 4 (Bande de Möbius). Le groupe $\mathbb{Z}$ opère sur $E = \mathbb{R} \times [-1, 1]$ par $n \cdot (x, y) = (n + x, (-1)^n y)$.

(a) Montrer que la surjection canonique $E \to E/\mathbb{Z}$ est un revêtement.

(b) Montrer que $E/\mathbb{Z}$ est homéomorphe à la bande de Möbius $[0, 1] \times [-1, 1]/\big((0, y) \sim (1, -y)\big)$.

Exercice 5 (Espaces lenticulaires). Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{Z}$ deux entiers premiers entre eux. On note par $L_{p,q}$ l'espace lenticulaire défini comme la boule fermée $\mathbb{B}^3$ quotientée par $(z, x_3) \sim (\xi^q z, -x_3)$ pour $(z, x_3) \in \partial\mathbb{B}^3$ (où on identifie $z = x_1 + \mathrm{i}x^2 \in \mathbb{C}$ avec $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$).

(a) Montrer que l'action du groupe des racines p-ièmes de l'unité $\mathcal{U}_p$ sur la sphère $\mathbb{S}^3$ définie par $\xi \cdot (z_1, z_2) = (\xi z_1, \xi^q z_2)$, pour un entier q premier à p, fournit un revêtement $f : S^3 \to S^3/\mathcal{U}_p =: X$, avec $X \cong L_{p,q}$.

(b) Calculer le groupe fondamental de $L_{p,q}$ en utilisant cette description de l'espace lenticulaire. Que se passe-t-il si $p = 1$, ou si $p = 2$?

(c) Montrer que $L_{p,q}$ est homéomorphe à l'espace

$$(\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1) \sqcup (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2)/\big((u, v) \in \partial(\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1) \sim (u^p v^\beta, u^q v^{-\alpha}) \in \partial(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2)\big)$$

pour une relation de Bézout $\alpha p + \beta q = 1$. Montrer que si on définit l'espace lenticulaire ainsi, cette définition ne dépend pas (à homéomorphisme près) du choix des coéfficients de Bézout α et β, et qu'elle ne dépend (à homéomorphisme près) que de la classe de q modulo p.

(d) Déduire que $q' \equiv \pm\, q^{\pm 1} \pmod p$ implique $L_{p,q} \cong L_{p,q'}$.

Exercice 6 (Bouteille de Klein). On considère la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$: $(x, y) \sim (x + 1, y)$ et $(x, y) \sim (-x, y + 1)$ et on note K le quotient.

(a) Montrer que K est l'espace des orbites de l'opération sur $\mathbb{R}^2$ d'un sous-groupe discret G de son groupe d'isométries affines, et que la surjection canonique est un revêtement.

(b) Montrer que K est homéomorphe à $[0, 1]^2/\big((0, y) \sim (1, y), (x, 0) \sim (1 - x, 1)\big)$, espace que l'on appelle la *bouteille de Klein.*

(c) Construire un revêtement à deux feuillets du tore sur K.

(d) Construire un revêtement à $\mathbb{Z}$-feuillets de M sur K où M est le ruban de Möbius, défini comme $\mathbb{R} \times [0, 1]/\big((x, 0) \sim (-x, 1)\big)$.

(e) Construire un revêtement à $\mathbb{Z}$-feuillets de C sur K où C est un cylindre infini, défini comme $\mathbb{R}\times[0, 1]/\big((x, 0) \sim (x, 1)\big)$.

Exercice 7 (Quaternions, rotations et revêtement). Soit $\mathbb{H}$ la partie de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ des matrices carrées de taille 2 à coefficient complexes de la forme $q = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{C}$.

On note

$$\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Enfin, si $q = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$, on note $\overline{q} = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ -b & a \end{pmatrix}$ et $|q| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2}$. Montrer que

(a) $\mathbb{H}$ est un sous-espace vectoriel réel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de base Id, I, J, K qui est aussi une sous-algèbre.

(b) Pour tout $q \in \mathbb{H}$ on a $q\overline{q} = |q|^2\mathrm{Id}$. En déduire que $\mathbb{H}$ est un corps non-commutatif.

(c) L'application $q \mapsto |q|$ est une norme sur $\mathbb{H}$. La sphère unité de $\mathbb{H}$ est un sous-groupe de $\mathbb{H}^*$ qui s'identifie à $\mathrm{SU}(2)$ et $\mathbb{S}^3$.

(d) $\mathbb{R}$ est un sous-corps de $\mathbb{H}$ et c'est son centre.

Soit $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{H}$ l'application définie par $Q(x, y, z) = xI + yJ + zK$. On appelle son image l'ensemble des quaternions purs.

(e) Soit $q \in \mathbb{H}^*$ et u un quaternion pur. Montrer que quq^{-1} est un quaternion pur.

(f) Définissons $\phi_q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par $\phi_q(v) = Q^{-1}(qQ(v)q^{-1})$. Montrer que pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$ on a $\phi_{\lambda q} = \phi_q$ et que

$\phi_q \in \mathrm{SO}(3)$.

On en déduit deux applications $f : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ et $g : \mathbb{RP}^3 \to \mathrm{SO}(3)$.

(g) Montrer que f est un morphisme de groupes et un revêtement double et que g est un homéomorphisme.

Soit q_1, q_2 deux éléments de $\mathbb{H}^*$. On note $\phi_{q_1,q_2} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ l'application définie par $\phi_{q_1,q_2}(q) = q_1 q q_2^{-1}$.

(h) Montrer qu'il existe un morphisme de groupes $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(4)$ qui est un revêtement double.

Exercice 8. Construire le revêtement universel de l'espace X obtenu comme réunion d'une sphère $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ et du segment entre deux points antipodaux de $\mathbb{S}^2$.

Exercice 9. Soit $X = \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ le bouquet de deux cercles. On rappelle que son groupe fondamental (avec point base le point d'intersection des deux cercles) est isomorphe au groupe libre $\mathbb{Z}^{*2}$ avec deux générateurs a, b. Un mot $W \in \mathbb{Z}^{*2}$ s'écrit de façon unique comme $W = a_0^{\varepsilon_0} \cdots a_k^{\varepsilon_k}$, où $k \in \mathbb{N}$, $a_k \in \{a, b\}$ et $\varepsilon_k \in \{\pm 1\}$, et dans W on n'a pas des couples ll^{-1} avec $l \in \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$. On appelle un tel mot *réduit.* Pour tout $W \in \mathbb{Z}^{*2}$ mot non vide, on considère une copie I_W de l'intervalle $[0, 1]$. On dénote ses éléments par $W(t)$, avec $t \in [0, 1]$. Soit $Y = \sqcup_{W \in \mathbb{Z}^{*2}} I_W / \sim$, où $\sim$ est la relation d'équivalence engendrée par les relations $W(1) = W'(0)$ si W' est un mot réduit de la forme Wl avec $l \in \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$.

(a) Montrer que Y est le revêtement universel de X.

(b) Montrer que Y est homéomorphe à un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ bien choisi (qu'on décrira).

Dans $\mathbb{C}$, soit $C(z, r)$ le cercle de centre z et rayon r. Considérons l'espace $Z = \mathbb{R} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} C(\mathrm{i} + 2\pi n, 1)$.

(c) Montrer qu'il existe un revêtement de Z à X.

(d) Construire explicitement un revêtement de Y à Z, et décrire les automorphismes de ce revêtement.

Exercice 10. Dans $\mathbb{C}$, soit $C(z, r)$ le cercle de centre z et rayon r, et soit $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} C(\mathrm{i}/n, 1/n)$.

(a) Montrer que pour tout $p : Y \to X$ revêtement, $\pi_1(Y)$ est non-dénombrable. En particulier, X n'admet pas de revêtement universel.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donner un revêtement Y_n à n feuillets de X.

(c) Définir un revtement de $p : Y = \mathbb{R} \cup (X + 3\mathbb{Z}) \to X$, où $X + 3\mathbb{Z} = \{z + 3n \mid z \in X, n \in \mathbb{Z}\}$.

(d) Définir un revêtement $q : Z \to Y$ à deux feuillets tel que $p \circ q : Z \to X$ n'est pas un revêtement.

Exercice 11. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère l'espace X obtenu comme la réunion de l'adhérence de $\{(x, \sin(1/x))$ pour $x \in]0, 1/(2\pi)]\}$, $([-1, 0] \cup [1/(2\pi), 1]) \times \{0\}$, $\{-1, 1\} \times [-2, 0]$ et $[-1, 1] \times \{-2\}$.

(a) Montrer que X n'est pas localement connexe par arcs.

(b) Montrer que X est simplement connexe.

(c) Montrer que l'espace $Y = X/I$, où $I = \{0\} \times [-1, 1]$, est homéomorphe à $\mathbb{S}^1$.

Soit $f : X \to Y$ la projection naturelle.

(d) Montrer que f ne se relève pas à une application $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$, où $p : \mathbb{R} \to Y \cong \mathbb{S}^1$ est le revêtement du cercle.

Exercice 12. Soit $X = \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$, et soient a, b deux générateurs de $\pi_1(X)$. Soit Γ le sous-groupe normalement engendré par $a^2, b^2, (ab)^4$ dans $\pi_1(X)$.
Dessiner l'espace Y et déterminer le revêtement $p : Y \to X$ qui correspond à Γ (c'est-à-dire, $Y = \tilde{X}/\Gamma$, où $\tilde{X}$ est le revêtement universel de X).