Propositions de sujets pour les exposés d'examen

Voici quelques propositions pour les exposés (premier arrivé, premier servi – si vous choisissez un sujet sur cette liste, merci de m'envoyer en même temps un deuxième choix). Mais bien sûr si un autre sujet vous tente, n'hésitez pas à me demander s'il est approprié. Les sujets marqués d'une étoile sont probablement suffisamment larges pour deux exposés (soit choisissez-en une partie, soit coordonnez-vous avec un camarade et donnez un double exposé).

(1) Description détaillée (et justifiée) de la boule adique $\mathrm{Spa}(K\langle T\rangle, \mathcal{O}_K\langle T\rangle)$, où K est un corps algébriquement clos et complet pour une valuation $|\cdot| : K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

   Voir par exemple Wedhorn, *Adic Spaces*, Exemple 7.57 ou Scholze, *Perfectoid Spaces*, Exemple 2.20.

(2) Conditions sous lesquelles le pré-faisceau structurel $\mathcal{O}_X$ sur $X = \mathrm{Spa}(R, R^+)$ est un faisceau, par exemple si l'anneau de Huber R est "fortement noethérien" ou s'il admet un sous-anneau de définition noethérien. Un exemple où $\mathcal{O}_X$ n'est pas faisceautique

   Huber, *A generalization of formal schemes and rigid analytic varieties*, Théorème 2.5, Buzzard, Verberkmoes, *Stably uniform affinoids are sheafy*, §4.1.

(3) * Extensions arithmétiquement profinies (APF) ; le complété d'une telle extension est un corps perfectoïde. Construction du corps des normes et esquisse des énoncés principaux (la version "classique" de la correspondance de basculement).

   Wintenberger, *Le corps des normes de certaines extensions infinies de corps locaux ; applications* (Voir aussi Fontaine–Wintenberger, *Le "corps des normes" de certaines extensions algébriques de corps locaux* et Fontaine–Wintenberger, *Extensions algébriques et corps des normes des extensions APF des corps locaux* pour les énoncés sans preuves.)

(4) $\mathrm{Spa}(R, R^+)$ est un espace topologique spectral, où R est un anneau de Tate.

   Bhatt, *Lecture notes for a class on perfectoid spaces*, Théorème 7.4.8

(5) * Esquisse de la preuve que $\mathrm{Spa}(R, R^+)$ est un espace topologique spectral pour n'importe quel anneau de Huber.

   Section 2 et la première moitié de la section 3 de Huber, *Continuous valuations.*

(6) * Aspects de la théorie générale des espaces spectraux.

   Par exemple, une esquisse des énoncés au début de Huber, *Continuous valuations*, §2 (notamment Remarque 2.1); pour les démonstrations voir Hochster, *Prime ideal structure in commutative rings.* On trouve aussi des résultats intéressants dans Scholze, *Étale cohomology of diamonds*, §2 et §7.

(7) Soit $\mathcal{A}$ un schéma abélien sur l'anneau des entiers d'un corps perfectoïde ; alors $\varprojlim_{[p]} \mathcal{A}$ est un espace perfectoïde, où la limite est le long du morphisme de multiplication par p $[p] : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ (c.f. la formule $A^\flat = \varprojlim_{x \mapsto x^p} A$ pour le basculé d'un anneau perfectoïde entier).

   Voir Bhatt `http://swc.math.arizona.edu/aws/2017/2017BhattNotes.pdf`, exercices 4 et 6. Et aussi Pilloni, Stroh, *Cohomologie cohérente et représentations galoisiennes*, Lemma A.16.

(8) Théorème de Banach–Schauder (= théorème de l'application ouverte) pour les modules sur un anneau de Tate. En déduire qu'un anneau de Tate de caractéristique p est perfectoïde si et seulement s'il est parfait.

Henkel, *An Open Mapping Theorem for rings which have a zero sequence of units.*
Bhatt, *Lecture notes for a class on perfectoid spaces*, Lemma 7.1.6.

(9) Anneaux de Tate uniformes : description algébrique (sans référence à la topologie) et propriétés.

Bhatt, *Lecture notes for a class on perfectoid spaces*, Exercices 7.1.4 et 7.2.6 et Remarque 7.3.2.

(10) Un anneau de valuation $\mathcal{O}$ est *microbien* s'il existe un élément $\pi \in \mathcal{O}$ tel que $\mathcal{O}[\frac{1}{\pi}] = \operatorname{Frac} \mathcal{O}$. Expliquer les autres caractérisations des anneaux de valuation microbiens et comment les utiliser pour définir les espaces adiques. En déduire les propriétés fondamentales du spectre adique d'une paire de Tate.

Bhatt, *Lecture notes for a class on perfectoid spaces*, Définition 7.3.4 – Remarque 7.3.11.

(11) La structure des modules presque de type fini sur $\mathcal{O}_K$, où K est un corps perfectoïde.

Scholze, *p-adic Hodge theory of rigid analytic varieties*, Théorème 2.5.