

Raconte-moi... la courbe de Fargues–Fontaine

La Gazette des mathématiciens 163 (janvier 2020)

Matthew Morrow

La courbe de Fargues–Fontaine est un objet de théorie des nombres découvert en 2009 par Laurent Fargues et Jean-Marc Fontaine, et dont la géométrie encode beaucoup d’information sur l’arithmétique des nombres p -adiques. Elle est devenue rapidement un thème de recherche central en théorie de Hodge p -adique et dans le programme de Langlands.

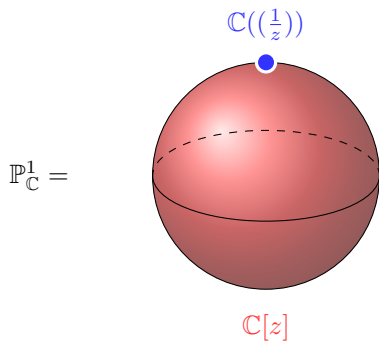
1 DES COURBES AVEC UN POINT À L’INFINI

Afin de motiver la courbe de Fargues–Fontaine, commençons par analyser d’un point de vue algébrique une courbe plus familière, à savoir la sphère de Riemann $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ (notée plutôt $\mathbb{C}P^1$ par les géomètres non algébriques, et en effet de dimension un sur les nombres complexes). À la sphère de Riemann on peut aisément associer deux anneaux

$$\mathbb{C}[z] \subseteq \mathbb{C}\left(\left(\frac{1}{z}\right)\right). \quad (1)$$

D’abord, l’anneau des fonctions méromorphes sur $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ sans pôle en dehors du point à l’infini est l’algèbre des polynômes $\mathbb{C}[z]$, où z désigne le paramètre local usuel à l’origine : en effet, rappelons que toute fonction holomorphe sur le plan des nombres complexes avec au pire un pôle au point à l’infini est forcément un polynôme. En regardant ensuite les développements de Laurent au point à l’infini de toutes les fonctions méromorphes sur $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, on trouve l’anneau $\mathbb{C}\left(\left(\frac{1}{z}\right)\right)$ des séries de Laurent en la variable $\frac{1}{z}$, qui est un paramètre local au point à l’infini.

On peut illustrer la situation ainsi :



Réciproquement, et de manière peut-être plus surprenante, voici une façon pour reconstruire la sphère de Riemann à partir seulement de la paire d’anneaux (1) : les points de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ correspondent aux droites dans l’espace vectoriel complexe de dimension deux

$$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}z = \{f \in \mathbb{C}[z] : \deg f \leq 1\}. \quad (2)$$

Notons ici qu’on peut retrouver cet espace vectoriel à partir de la paire (1) car le degré d’un polynôme f est égal à l’ordre de son pôle au point à l’infini en tant que fonction méromorphe sur $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$,

$$\deg f = -\text{ord}_{\infty} f, \quad (3)$$

ce qui est encodé dans l’anneau $\mathbb{C}\left(\left(\frac{1}{z}\right)\right)$.¹ Il existe également un énoncé plus précis : si l’on filtre $\mathbb{C}[z]$ par le degré pour que l’anneau de Rees associé soit égal à

$$\bigoplus_{k \geq 0} \{f \in \mathbb{C}[z] : \deg f \leq k\}, \quad (4)$$

alors le schéma projectif (on invite le lecteur qui ne connaîtrait pas la construction Proj en géométrie algébrique à ignorer cet énoncé) s’identifie à $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. Pour établir cette identification, la clé (un exercice facile en algèbre) est d’observer que l’anneau gradué (4) est isomorphe à l’anneau des polynômes en deux variables $\mathbb{C}[z_0, z_1]$, en associant à un polynôme $f(z)$ de degré $\leq k$ le polynôme en deux variables $z_1^k f(z_0/z_1)$. Une conséquence de cet isomorphisme, combiné avec le théorème fondamental de l’algèbre, est que tout polynôme homogène $f(z_0, z_1) \in \mathbb{C}[z_0, z_1]$ s’écrit de façon unique, à une constante près, comme un produit d’expressions linéaires :

$$f(z_0, z_1) = c \prod_{i=1}^{\deg f} (a_i z_0 + b_i z_1) \quad (5)$$

où $a_i, b_i, c \in \mathbb{C}$.

Pour résumer, la théorie de la sphère de Riemann peut s’exprimer fidèlement en termes de la

¹L’ordre d’annulation $\text{ord}_{\infty} f$ au point à l’infini d’une fonction peut être caractérisé de façon purement algébrique par $\mathbb{C}\left(\left(\frac{1}{z}\right)\right)$: en fait, $\text{ord}_{\infty} : \mathbb{C}\left(\left(\frac{1}{z}\right)\right) \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ est l’unique valuation discrète non triviale sur le corps $\mathbb{C}\left(\left(\frac{1}{z}\right)\right)$.

paire d’anneaux (1), mais nous renonçons alors à toute intuition géométrique. Or, cette perspective géométrique est tellement importante qu’elle nous guide même lorsqu’elle n’existe plus. En particulier, en théorie des nombres, il existe une vieille analogie entre les entiers \mathbb{Z} et l’anneau $\mathbb{C}[z]$. Tous deux sont des anneaux euclidiens, avec le stathme euclidien donné dans le premier cas par la valeur absolue $|\cdot|$ des nombres réels \mathbb{R} et dans le second cas par le degré d’un polynôme, ce qui correspond à l’ordre de son pôle au point à l’infini grâce à (3) ; en deux mots, la paire d’anneaux $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ est un analogue arithmétique de la paire (1). En géométrie arithmétique on essaie donc de voir les entiers comme des fonctions sur l’ensemble des nombres premiers, avec un point supplémentaire “à l’infini” donné par les nombres réels ou de manière équivalente par $|\cdot|$, et de développer des analogues des techniques géométriques déjà existantes pour la sphère de Riemann (fibrés vectoriels, cohomologie, faisceaux, etc.). Cette approche, bien que fructueuse, est limitée par le fait que \mathbb{R} n’est plus vraiment un objet algébrique et donc que la “courbe compactifiée” $\{\text{nombre premiers}\} \cup \{|\cdot|\}$ n’existe pas en tant que vrai objet de la géométrie algébrique.

Fargues et Fontaine ont mené cette analogie beaucoup plus loin en considérant plutôt un nombre premier fixé p et en remplaçant la géométrie arithmétique par la géométrie arithmétique p -adique. L’anneau euclidien \mathbb{Z} ou $\mathbb{C}[z]$ est alors remplacé par une certaine \mathbb{Q}_p -algèbre \mathbb{B}_e venant de la théorie de Hodge p -adique, qui est (presque) encore un anneau euclidien. Mais contrairement au cas de \mathbb{Z} où le “point à l’infini” était en-dehors du monde algébrique, nous nous retrouvons cette fois dans une situation plus favorable : le rôle du point à l’infini est maintenant joué par un certain corps \mathbb{B}_{dR} , venant lui aussi de la théorie de Hodge p -adique, et la paire d’anneaux

$$\mathbb{B}_e \subseteq \mathbb{B}_{\text{dR}} \quad (6)$$

est sous-jacente à une vraie courbe algébrique X^{FF} de la même façon que la paire (1) est sous-jacente à la sphère de Riemann. De plus, les résultats que nous avons vus tout à l’heure pour la sphère de Riemann (description de ses points, factorisation unique, etc.) admettent des analogues, qui encodent chaque fois de l’information subtile en arithmétique p -adique. Cette courbe X^{FF} est la *courbe de Fargues-Fontaine* ; elle nous apporte une nouvelle interprétation géométrique de l’arithmétique p -adique. Pour plus de détails sur l’histoire de la découverte de la courbe, voir [1].

2 LA COURBE FONDAMENTALE DE LA THÉORIE DE HODGE p -ADIQUE

Afin de présenter la paire d’anneaux (6) et d’introduire la courbe de Fargues-Fontaine, rappelons d’abord quelques aspects de la *théorie de Hodge p -adique*.² Ce sujet a été créé par Fontaine (inspiré par un travail fondamental de Tate et une question de Grothendieck) dans les années 1980 afin d’étudier le groupe de Galois absolu $G := \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ des nombres p -adiques \mathbb{Q}_p . Dans le prolongement moderne de la vision de Galois, ce groupe et ses symétries (c’est-à-dire ses actions et ses représentations) recèlent toute l’information arithmétique des nombres p -adiques. En théorie de Hodge p -adique on s’intéresse à ses représentations continues sur des espaces vectoriels de dimension finie sur \mathbb{Q}_p .³

L’une des contributions fondamentales de Fontaine a été d’identifier et de décrire certaines classes de représentations de G qui sont suffisamment riches pour contenir tous les exemples venant de la géométrie arithmétique. Chaque classe est formée des représentations qui sont “admissibles” pour un “anneau de périodes”. Un anneau de périodes est une \mathbb{Q}_p -algèbre \mathbb{B} munie d’une action de G , vérifiant certaines hypothèses. Étant donné un tel \mathbb{B} , on peut associer à une représentation quelconque V (au sens ci-dessus) le sous-espace des éléments G -invariants du produit tensoriel $V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}$, qu’on appelle le *module de Dieudonné* associé :

$$V \text{ représentation} \mapsto D_{\mathbb{B}}(V) := (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B})^G.$$

Sous certaines hypothèses sur \mathbb{B} , Fontaine a montré que $\dim D_{\mathbb{B}}(V) \leq \dim V$, en disant que V est *\mathbb{B} -admissible* si l’égalité vaut. Dans ce cas le module de Dieudonné, qui est en général plus facile à étudier que la représentation initiale V , est suffisamment gros pour contenir de l’information intéressante sur V , et même pour la décrire complètement si \mathbb{B} est assez “fin”.

Donnons un exemple bête pour illustrer les définitions ci-dessus : si l’on prend $\mathbb{B} = \mathbb{Q}_p$ muni de l’action triviale de G , alors le module de Dieudonné est simplement les G -invariants

²Ainsi nommée car elle comporte des comparaisons entre différentes théories de cohomologie (p -adiques), de la même manière que l’isomorphisme entre les cohomologies de Betti et de de Rham est à la base de la théorie de Hodge classique.

³Notons que \mathbb{Q}_p joue ici deux rôles différents : étant donné n’importe quel corps F , on pourrait s’intéresser aux représentations de son groupe de Galois absolu sur des espaces vectoriels de dimension finie sur \mathbb{Q}_ℓ pour un nombre premier ℓ ; en théorie de Hodge p -adique on s’intéresse au cas spécial $F = \mathbb{Q}_p$ et $\ell = p$, qui est particulièrement riche.

V^G de la représentation V ; on voit donc que V est \mathbb{Q}_p -admissible si et seulement si c'est une représentation triviale. Bien sûr ces représentations ne sont pas très intéressantes : nous n'avons pas bien choisi \mathbb{B} .

Une étape délicate au début du programme de Fontaine a été la construction de certains anneaux de périodes tels que les classes des représentations \mathbb{B} -admissibles soient assez riches.

Exemples 2.1. (i) L'anneau des nombres complexes p -adiques \mathbb{C}_p est le complété p -adique de la clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}_p}$ du corps \mathbb{Q}_p . L'action du groupe de Galois G s'étend par continuité à \mathbb{C}_p .

(ii) L'anneau des périodes de de Rham \mathbb{B}_{dR} est un certain corps muni d'une action de G . En tant que corps il est isomorphe de manière abstraite à l'algèbre des séries de Laurent $\mathbb{C}_p((t))$ à coefficients dans \mathbb{C}_p , mais il n'est pas possible d'écrire l'action de G de façon naturelle via cette identification.

(iii) L'anneau \mathbb{B}_{dR} contient un sous-anneau \mathbb{B}_{cris} , invariant par l'action de G , appelé l'anneau des périodes cristallines. Il est muni d'un endomorphisme φ_{cris} appelé son *Frobenius*, qui ne s'étend pas à \mathbb{B}_{dR} , et on note $\mathbb{B}_e := \{f \in \mathbb{B}_{\text{cris}} : \varphi_{\text{cris}}(f) = f\}$ le sous-anneau de \mathbb{B}_{cris} formé des éléments invariants par φ_{cris} .

Les anneaux de périodes sont fondamentaux en arithmétique p -adique depuis les années 1980 (pour plus de détails sur leur histoire et leur rôle dans le sujet, voir [2]), mais ce n'est qu'en 2009 que Fargues et Fontaine ont découvert qu'une courbe se cachait derrière :

Théorème 2.2 (Fargues–Fontaine 2009). *Il existe une "courbe lisse"⁴ X^{FF} sur \mathbb{Q}_p qui recolle les anneaux de périodes de Fontaine de la même façon que la sphère de Riemann recolle la paire (1), à savoir :*

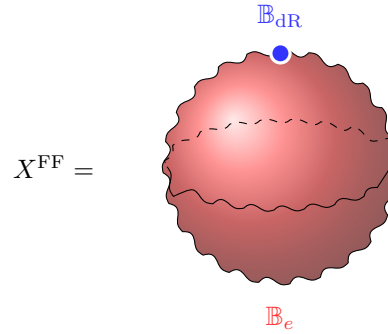
- il existe un point $\infty \in X^{\text{FF}}$ tel que l'anneau des fonctions méromorphes sur X^{FF} sans pôle en dehors du point ∞ soit \mathbb{B}_e ,⁵
- et l'anneau des développements de Laurent au point ∞ des fonctions méromorphes⁶ sur X^{FF} est \mathbb{B}_{dR} .

⁴Pour les experts : un schéma régulier, noethérien, connexe, séparé, de dimension un.

⁵Plus précisément, $X^{\text{FF}} \setminus \{\infty\} = \text{Spec } \mathbb{B}_e$.

⁶C'est-à-dire, le corps des fractions du complété de l'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}_{X^{\text{FF}}, \infty}$.

Donc en remplaçant la paire (1) par la paire (6), on peut dessiner⁷ X^{FF} de façon analogue à $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$:



En outre, le groupe fondamental de X^{FF} est isomorphe à G .

La courbe de Fargues–Fontaine X^{FF} contient tout ce qu'il nous faut pour étudier les représentations du groupe de Galois absolu G de \mathbb{Q}_p : à la fois G lui-même et les anneaux de périodes. On peut donc reformuler une grande partie du programme de Fontaine en termes de la géométrie de la courbe. Ce point de vue mène notamment à une preuve conceptuelle d'une conjecture importante de Fontaine. Plus précisément, Fontaine a montré que toute représentation cristalline V (c'est-à-dire admissible par rapport à l'anneau \mathbb{B}_{cris} ; par exemple, provenant d'un objet géométrique à bonne réduction) peut être décrite complètement en termes de son module de Dieudonné $D_{\mathbb{B}_{\text{cris}}}(V)$. Dans l'autre sens, notant que $D_{\mathbb{B}_{\text{cris}}}(V)$ est un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension finie muni à la fois d'un endomorphisme (induit par φ_{cris}) et d'une filtration (induite par la filtration t -adique sur \mathbb{B}_{dR}), autrement dit un *isocristal filtré*, il a conjecturé que les représentations cristallines devraient correspondre de cette façon aux isocristaux filtrés dont la filtration et l'endomorphisme satisfont une certaine condition de compatibilité algébrique (en termes de la courbe, elle devient une condition naturelle de semi-stabilité au sens de Harder et Narasimhan). Bien que cette conjecture ait été résolue par Colmez et Fontaine avant la découverte de la courbe, elle est maintenant un corollaire trivial d'un résultat géométrique, à savoir la classification des fibrés vectoriels sur la courbe. Pour plus de détails sur cette reformulation de la théorie de Hodge p -adique via la courbe, voir [1].

Mais comment la courbe est-elle définie ? En fait, on peut la construire à partir de la paire d'anneaux (6) de la même façon que nous avons reconstruit

⁷Ce dessin est à prendre avec des pincettes : la courbe appartient à la géométrie p -adique et est donc totalement discontinue.

la sphère de Riemann à partir de la paire (1) à la partie 1. Premièrement, par analogie avec (2), les points de X^{FF} correspondent aux droites dans le \mathbb{Q}_p -espace vectoriel

$$\{f \in \mathbb{B}_e : \deg f \leq 1\}, \quad (7)$$

où le *degré* d'un élément de \mathbb{B}_e est défini par analogie avec le formule (3), à savoir $\deg f := -\text{ord}_{\text{dR}} f$ où ord_{dR} désigne l'ordre t -adique dans \mathbb{B}_{dR} via l'isomorphisme de l'exemple 2.1.⁸ Le \mathbb{Q}_p -espace vectoriel (7) n'est plus de dimension deux comme (2), mais de dimension infinie, ce qui implique que la courbe de Fargues–Fontaine est beaucoup plus “grosse” que la sphère de Riemann.

Deuxièmement, de manière plus précise, la courbe X^{FF} est définie comme le schéma projectif associé à l'anneau gradué

$$\bigoplus_{k \geq 0} \{f \in \mathbb{B}_e : \deg f \leq k\}, \quad (8)$$

qui est un analogue de l'anneau gradué (4). Remarquons que l'anneau (8) contient, par définition, de l'information subtile sur l'interaction du Frobenius φ_{cris} sur \mathbb{B}_{cris} et la filtration t -adique sur \mathbb{B}_{dR} ; leur interaction est un thème important en théorie de Hodge p -adique depuis sa naissance.

Mais contrairement à la sphère de Riemann, où les liens entre l'algèbre de la paire (1) et la géométrie de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ étaient assez élémentaires, les résultats analogues pour la courbe de Fargues–Fontaine sont exceptionnellement profonds. Le résultat clé qui expose la structure de X^{FF} (notamment le fait qu'elle est de dimension un !) est, comme on l'a déjà vu pour la sphère de Riemann dans (5), que tout élément homogène de (8) s'écrit de façon unique, à une constante près, comme un produit d'éléments de degré un ; il joue le rôle d'un analogue p -adique du théorème fondamental de l'arithmétique. Alors que cet énoncé pour $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ était une conséquence facile de la structure de l'anneau $\mathbb{C}[z]$, l'analogue p -adique prend la moitié du livre [4] de Fargues et Fontaine et est basé sur des analogues p -adiques subtils des produits de Weierstrass en analyse complexe.

3 LA COURBE COMME ESPACE DE DÉBASCULÉS

Enfin, présentons un autre point de vue sur la courbe X^{FF} , lié à la théorie des perfectoides de Scholze.

⁸De manière plus canonique et par analogie avec la note de bas de page 1, ord_{dR} est l'unique valuation discrète sur \mathbb{B}_{dR} .

Le *basculement*⁹ est une procédure algébrique pour passer de la caractéristique nulle (où tous les anneaux contiennent une copie de \mathbb{Q} , et même de \mathbb{Q}_p dans notre cadre p -adique) à la caractéristique p (où ils contiennent une copie de \mathbb{F}_p). Ne confondons pas cette procédure, que nous définissons ci-dessous, avec la réduction modulo p : étant donné par exemple un polynôme à coefficients dans \mathbb{Q} , on peut essayer de remplacer les coefficients par leurs réductions modulo p pour obtenir un nouveau polynôme à coefficients dans \mathbb{F}_p , mais cela ne marche que si les coefficients initiaux ne contiennent aucun dénominateur divisible par p , et on perd alors énormément d'information. Par contre, le basculement fonctionne bien sans hypothèse sur les dénominateurs, et l'information perdue sera classifiée précisément en termes de la courbe de Fargues–Fontaine.

Commençons par basculer les nombres complexes p -adiques \mathbb{C}_p (voir l'exemple 2.1), qui sont l'exemple de base de ce que l'on appelle un *anneau perfectoid* [6, 7].

Définition 3.1. Le *basculé* \mathbb{C}_p^{\flat} de \mathbb{C}_p est l'ensemble des suites compatibles de racines p^n -ièmes dans \mathbb{C}_p ,

$$\mathbb{C}_p^{\flat} = \{(a_0, a_1, \dots) : a_n \in \mathbb{C}_p, a_n^p = a_{n-1} \forall n \geq 1\},$$

muni des lois de multiplication et d'addition suivantes :

$$\begin{aligned} (a_0, a_1, \dots) \times (b_0, b_1, \dots) &:= (a_0 b_0, a_1 b_1, \dots) \\ (a_0, a_1, \dots) + (b_0, b_1, \dots) &:= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)^{p^n}, \right. \\ &\quad \left. \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} + b_{n+1})^{p^n}, \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+2} + b_{n+2})^{p^n}, \dots \right) \end{aligned}$$

Il n'y rien à dire sur la loi de multiplication : elle est facile à définir car un produit de deux suites compatibles de racines p^n -ièmes est encore une telle suite. Par contre, l'assertion analogue est totalement fautive pour l'addition¹⁰ et la formule est donc plus subtile : à partir de deux telles suites, nous ajoutons pour chaque n les deux racines p^n -ièmes, c'est-à-dire $a_n + b_n$, puis passons à la puissance p^n -ième, c'est-à-dire $(a_n + b_n)^{p^n}$. Cette dernière expression ne dépend de n qu'à petite approximation près : les éléments

$$(a_1 + b_1)^p, \quad (a_2 + b_2)^{p^2}, \quad (a_3 + b_3)^{p^3}, \quad \dots$$

ne sont pas forcément tous les mêmes mais ils deviennent de plus en plus proches. Plus

⁹Terminologie introduite par Scholze ; la procédure existe dans certains cas depuis le début de la théorie de Hodge p -adique.

¹⁰ $(a + b)^p \neq a^p + b^p$ en caractéristique nulle ; mais le basculement va nous faire passer en caractéristique p , où l'égalité est vraie !

précisément, ils forment une suite de Cauchy dans le corps topologique complet \mathbb{C}_p , et nous pouvons donc prendre sa limite $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)^{p^n}$; de plus cet élément, que nous avons construit à partir de nos deux suites compatibles de racines p^n -ièmes, admet lui-même une racine p -ième $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} + b_{n+1})^{p^n}$, une racine p^2 -ième $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+2} + b_{n+2})^{p^n}$, etc. De cette façon nous construisons une nouvelle suite compatible de racines p^n -ièmes, ce qui définit la somme des deux suites de départ.

Le lemme suivant est classique et apparaît dans le travail de Fontaine.

Lemme 3.2. \mathbb{C}_p^\flat , muni des opérations ci-dessus, est un corps de caractéristique p .

En outre, le basculement préserve certaines propriétés algébriques. Le corps \mathbb{C}_p a les propriétés suivantes

(Pf₀) être un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, complet pour une valeur absolue $|\cdot|$ à valeurs dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$, et avoir pour corps résiduel \mathbb{F}_p ,

alors que son basculé \mathbb{C}_p^\flat a les propriétés suivantes

(Pf_p) être un corps algébriquement clos de caractéristique p , complet pour la valeur absolue $(a_0, a_1, \dots) \mapsto |a_0|$, et avoir pour corps résiduel \mathbb{F}_p .

Autrement dit, la différence principale entre le corps \mathbb{C}_p et son basculé \mathbb{C}_p^\flat est que $p = 0$ dans le second mais pas dans le premier.

Nous avons expliqué comment basculer (dans le cas de \mathbb{C}_p) pour passer de la caractéristique nulle à la caractéristique p . Malheureusement cette procédure est irréversible : il est impossible de débasculer ! Plus précisément, il existe des corps C avec les propriétés (Pf₀), non isomorphes à \mathbb{C}_p (en tant que corps valués), mais qui deviennent isomorphes après basculement : $C^\flat \cong \mathbb{C}_p^\flat$. Ici le basculé C^\flat de C est défini exactement de la même façon que \mathbb{C}_p^\flat . Plus subtilement, mais de manière tout aussi importante, il existe des automorphismes de \mathbb{C}_p^\flat qui ne sont pas induits par les automorphismes de \mathbb{C}_p , dont un exemple est le “Frobenius absolu”

$$\varphi : \mathbb{C}_p^\flat \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}_p^\flat, \quad \alpha \mapsto \alpha^p \quad (9)$$

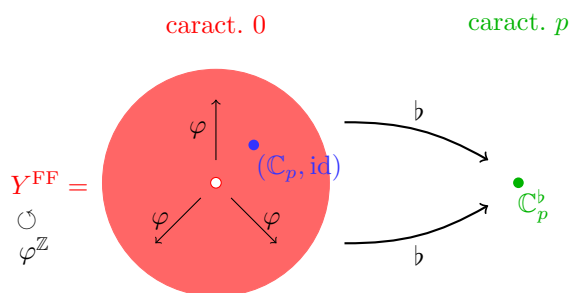
(il respecte les lois de multiplication et d’addition car \mathbb{C}_p^\flat est de caractéristique p). Ainsi, quand on étudie un objet défini en termes de \mathbb{C}_p^\flat , on ne sait pas si – ou comment – il provient de \mathbb{C}_p lui-même ou d’un autre corps C . Afin d’étudier ce phénomène on adopte la définition suivante :

Définition 3.3. Un débasculé de \mathbb{C}_p^\flat est une paire (C, ι) , où C est un corps avec les propriétés (Pf₀) et $\iota : C^\flat \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}_p^\flat$ un isomorphisme. On note Y^{FF} l’ensemble des débasculés.¹¹

Exemples 3.4. (i) Le débasculé trivial est la paire $(\mathbb{C}_p, \text{id})$ elle-même.

(ii) Étant donné un débasculé (C, ι) , on peut toujours en construire un nouveau $(C, \varphi \circ \iota)$, où φ est le Frobenius absolu (9). De cette façon on obtient une action du groupe cyclique infini $\varphi^{\mathbb{Z}}$ sur l’ensemble des débasculés.

Résumons la situation par un dessin, où nous représentons Y^{FF} comme un disque épointé :



L’énoncé remarquable est que l’ensemble des débasculés, au moins si l’on identifie ceux qui sont reliés par une itération de l’exemple 3.4.2, peut être muni de la structure d’une courbe lisse ; nous retrouvons la courbe de Fargues–Fontaine !

Théorème 3.5 (Fargues–Fontaine, Scholze). *Il existe une bijection canonique entre l’ensemble $Y^{\text{FF}}/\varphi^{\mathbb{Z}}$ et les points de X^{FF} .*

Par conséquent, en revenant à la partie 2, il n’est pas faux de dire que la théorie de Hodge p -adique s’insère dans l’étude de la géométrie d’un espace de débasculés. Ce beau point de vue est développé systématiquement dans la théorie récente des diamants de Scholze [9] : il associe aux objets de la géométrie arithmétique p -adique (notamment aux variétés algébriques sur \mathbb{Q}_p ou \mathbb{C}_p) certains ensembles de débasculés, non seulement de \mathbb{C}_p^\flat mais de n’importe quel perfectoïde. Ce que l’on obtient est un exemple de *diamant*, à savoir un espace construit en recollant des espaces perfectoïdes de manière assez subtile. Scholze montre que les diamants fournissent un monde géométrique qui contient nos objets habituels mais qui possède aussi de

¹¹Plus précisément, on considère les débasculés à équivalence près : on dit que (C_1, ι_1) et (C_2, ι_2) sont équivalents s’il existe un isomorphisme $C_1 \cong C_2$ dont l’isomorphisme induit $C_1^\flat \cong C_2^\flat$ est compatible avec ι_1 et ι_2 .

nouvelles richesses : un débasculé de \mathbb{C}_p^\flat est maintenant représenté par un “morphisme” entre \mathbb{Q}_p et \mathbb{C}_p^\flat , ou plus précisément entre leurs diamants associés $\mathrm{Spd}(\mathbb{Q}_p)$ et $\mathrm{Spd}(\mathbb{C}_p^\flat)$, il existe une “surface” $\mathrm{Spd}(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{Spd}(\mathbb{Q}_p)$ dont la géométrie doit intervenir de manière cruciale dans le programme de Langlands, et la courbe X^{FF} est représentée par la belle formule

$$X^{\mathrm{FF}} = \mathrm{Spd}(\mathbb{C}_p^\flat)/\varphi^{\mathbb{Z}} \times \mathrm{Spd}(\mathbb{Q}_p).$$

La théorie des diamants joue un rôle essentiel dans la façon dont la courbe est en train de transformer un autre sujet que la théorie de Hodge p -adique, à savoir le programme de Langlands local. Rappelons que le but de ce programme est, grosso-modo, de classifier les représentations complexes du groupe de Galois absolu G de \mathbb{Q}_p , comme une vaste extension de la théorie du corps de classes. Il existe aussi une version géométrique du programme, qui cherche à classifier les représentations du groupe fondamental d’une courbe sur un corps fini et qui est beaucoup plus avancée (notamment suite aux travaux récents de V. Lafforgue). Grâce au théorème 2.2 on peut désormais voir G comme le groupe fondamental de la courbe X^{FF} et développer des analogues (formulés dans le langage des diamants) des techniques du programme géométrique ; ceci est le sujet de la *conjecture de géométrisation* de Fargues [3] et de ses travaux en cours avec Scholze [5].

On peut dire sans hésiter que la courbe de Fargues–Fontaine, les perfectoides et les diamants sont une petite révolution en géométrie arithmétique p -adique.

Remerciements: Je remercie chaleureusement Laurent Fargues, Pierre Colmez et le comité de rédaction de la Gazette pour leurs corrections, remarques et suggestions.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] COLMEZ, P. La courbe de Fargues et Fontaine. *Préface de [4]* (2019).
- [2] COLMEZ, P. Le programme de Fontaine. <https://webusers.imj-prg.fr/~pierre.colmez/FW.html> (2019).
- [3] FARGUES, L. La Courbe. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Rio, 2018)*.
- [4] FARGUES, L., AND FONTAINE, J.-M. Courbes et fibrés vectoriels en théorie de Hodge p -adique. *Astérisque 406*.
- [5] FARGUES, L., AND SCHOLZE, P. Geometrization of the local Langlands correspondence. *En préparation*.
- [6] FONTAINE, J.-M. Perfectoïdes, presque pureté et monodromie-poids (d’après Peter Scholze). *Astérisque 352* (2013), Séminaire Bourbaki. Vol. 2011/2012. Exposé 1057.
- [7] LE STUM, B. Raconte-moi un perfectoïde. *Gazette des Mathématiciens 154* (Octobre 2017).
- [8] MORROW, M. The Fargues–Fontaine curve and diamonds [d’après Fargues, Fontaine, and Scholze]. *Astérisque 414* (2019). Séminaire Bourbaki. Vol. 2017/2018. Exposé 1150.
- [9] SCHOLZE, P. Étale cohomology of diamonds. [arXiv:1709.07343](https://arxiv.org/abs/1709.07343) (2017).