Annexe : Quelques compléments à l'article de Max Karoubi

Michel Zisman

Université Paris 7, email zisman@math.jussieu.fr

1. Un théorème technique (à propos du corollaire 4.19.)

Dans la suite, l'ensemble $S \in \mathbb{Z}$ est fixé, on le supprime donc des notations, ainsi on écrit $\mathcal{D}^*$ au lieu de ${}_S\mathcal{D}^*$. Comme en (4.5) on écrira $\mathcal{D}^*(K_{n+1})$ au lieu de $\mathcal{D}^*(x_0, \ldots, x_n)$. $\mathcal{D}^*(K)$ désignera la DGA simpliciale qui en dimension n est égale à $\mathcal{D}^*(K_{n+1})$. Rappelons (Cf. 2.8) que I_r^* désigne l'idéal de $\mathcal{D}^*(x_0, \ldots, x_r)$ engendré par les Y_i et les ω_i pour i parcourant S. De même I^* designera l'idéal simplicial de $\mathcal{D}^*(K)$ qui en dimension r est égal à I_r^*.

Si A est un k-module simplicial, on désigne par N(A) le complexe(de chaînes) normalisé associé, défini par $N_n(A) = \cap_{i>0} \ker d_i$ et de bord d_0. Soit $Z_n(A) = \cap_{i \geq 0} \ker d_i \subset N_n(A)$ le module des n-cycles de $N(A)$. Si A est un module *bisimplicial*, on notera N', Z' (resp. N'', Z'') le normalisé et les cycles de A pour la première (resp. la deuxième) structure simpliciale. Le foncteur N est exact. Supposons que le complexe $N(A)$ soit d'homologie nulle. Alors si la suite de modules simpliciaux $0 \to A \to B \to C \to 0$ est exacte, la suite de modules $0 \to Z(A) \to Z(B) \to Z(C) \to 0$ l'est aussi.

Désignons par S^n la n-sphère i.e. le quotient du n-simplexe Δ_n par son $(n-1)$-squelette.

Théorème 1. L'inclusion $\mathcal{D}^*(S^p)\bar{\otimes}\mathcal{D}^*((S^q) \hookrightarrow \mathcal{D}^*(S^p) \otimes \mathcal{D}^*((S^q)$ est un quasi-isomorphisme dès que card $(S) \geq p + q + 4$.

La démonstration comprendra plusieurs étapes

Premières réductions. Il résulte de (4.5) que l'on a la suite exacte suivante

$$(1) \qquad 0 \to I_p\bar{\otimes}\mathcal{D}^*(K_{q+1}) + \mathcal{D}^*(K_{p+1})\bar{\otimes}I_q \to \mathcal{D}^*(K_{p+1})\bar{\otimes}\mathcal{D}^*(K_{q+1}) \to \mathcal{D}^*(\Delta_p)\bar{\otimes}\mathcal{D}^*(\Delta_q) \to 0$$

ainsi que la suite exacte analogue avec $\otimes$ au lieu de $\bar{\otimes}$. Les inclusions naturelles constituent de plus un morphisme naturel de la première suite exacte dans la seconde.

Notons aussi la suite exacte

$$(2) \qquad 0 \to I_p\bar{\otimes}I_q \to I_p\bar{\otimes}\mathcal{D}^*(K_{q+1}) \oplus \mathcal{D}^*(K_{p+1})\bar{\otimes}I_q \to I_p\bar{\otimes}\mathcal{D}^*(K_{q+1}) + \mathcal{D}^*(K_{p+1})\bar{\otimes}I_q \to 0,$$

qui de nouveau s'envoie naturellement sur l'analogue écrite avec les $\otimes$.

Or, en revenant aux définitions du produit tensoriel réduit et de $\mathcal{D}^*(X)$, on constate que, pour démontrer le théorème 1, il suffit de montrer que l'inclusion

$$Z'_p Z''_q(\mathcal{D}^*(\Delta)\bar{\otimes}\mathcal{D}^*(\Delta)) \hookrightarrow Z'_p Z''_q(\mathcal{D}^*(\Delta) \otimes \mathcal{D}^*(\Delta))$$

est un quasi-isomorphisme.

Nous allons donc montrer que par application du foncteur $Z'Z''$ aux suites exactes (1) et (2) on obtient encore des suites exactes de complexes de cochaînes. Par ailleurs, la cohomologie de $Z'_p Z''_q(\mathcal{D}^*(K)\bar{\otimes}\mathcal{D}^*(K))$ et de $Z'_p Z''_q(I^*\bar{\otimes}\mathcal{D}^*(K) \oplus \mathcal{D}^*(K)\bar{\otimes}I^*)$ est nulle, ainsi que les termes analogues écrits avec $\otimes$. Le lemme des 5 ramène donc la démonstration du théorème 1à celle de la

Proposition 1. Pour card $(S) \geq p+q+4$, l'inclusion $Z'_p Z''_q(I^*\bar{\otimes}I^*) \hookrightarrow Z'_p Z''_q(I^* \otimes I^*)$ est un quasi-isomorphisme.

Pour montrer que l'on peut appliquer $Z'Z''$ en conservant l'exactitude des suites (1) et (2), il suffit de montrer que tout élément de $z \in Z'_p Z''_q(I^*\bar{\otimes}I^*)$ s'écrit $z = d_0\zeta$ avec $\zeta \in N'_{p+1}Z''_q(I^*\bar{\otimes}I^*)$, et ce résultat lui même est une conséquence facile de la

Proposition 2. Pour card $(S) \geq p+q+4)$, tout élément $z \in Z'_p Z''_q(I^*\bar{\otimes}I^*)$ s'écrit $z = \sum u \otimes v$ avec $u \in Z_p(I^*),\ v \in Z_q(I^*)$ les supports de u et de v étant disjoints.

La démonstration se fait en spécifiant le bidegré (i,j) des éléments de $I^* \otimes I^*$. Pour $i+j>0$, la démonstration est facile, et n'exige d'ailleurs aucune restriction sur le cardinal de S.

Démonstration de la proposition 1 (en admettant la proposition 2). Il résulte de la proposition 2 que la suite

$$(3) \qquad 0 \to Z'_p Z''_q(I^*\bar{\otimes}I^*) \hookrightarrow N'_p Z''_q(I^*\bar{\otimes}I^*) \to Z'_{p-1}Z''_q(I^*\bar{\otimes}I^*) \to 0$$

(où la surjection n'est autre que d_0) est exacte. Montrons que l'on a $H^*(N'_p Z''_q(I^*\bar{\otimes}I^*)) = 0$.

L'ensemble des $T_{\alpha_0} \otimes \cdots \otimes T_{\alpha_{p+q+1}}$ où les T_α parcourent l'ensemble des $\{Y_a, \omega_a | a \in S\}$ forme une base de $I^*_p \otimes I^*_q$, et le sous ensemble de ceux pour lesquels on a

$$\{\alpha_0, \ldots, \alpha_p\} \cap \{\alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_{p+q+1}\} = \emptyset$$

forment une base de $I^*\bar{\otimes}I^*$: on dira qu'ils sont les monômes admissibles. Un élément $z \in N'_p Z''_q(I^*\bar{\otimes}I^*)$ peut donc s'écrire, en utilisant cette base,

$$z = \sum_{s \in S}(Y_s \otimes u_s + \omega_s \otimes v_s).$$

Les conditions $d'_a z = 0, d''_b z = 0$ pour $0 < a \leq p$ et $0 \leq b \leq q$ se traduisent par le fait que u_s et v_s appartiennent à $Z'_{p-1}Z''_q(I^*\bar{\otimes}I^*)$. Par ailleurs, z est un cocycle si et seulement si on a

$$\sum_{s\in S}(\omega_s \otimes u_s + Y_s \otimes \partial u_s - \omega_s \otimes \partial v_s) = 0$$

c'est à dire $\partial u_s = 0$ et $u_s = \partial v_s$. Mais alors on a $z = \partial \sum_{s\in S}(Y_s \otimes v_s)$, et comme les supports n'ont pas changé en passant de la première expression de z à la seconde, on a $\sum_s(Y_s \otimes v_s) \in N'_p Z''_q(I^*\bar{\otimes}I^*)$. Considérons comme précédemment l'analogue de la suite exacte (3) avec $\otimes$ et le morphisme qui provient de l'inclusion "$\bar{\otimes} \subset \otimes$". Les suites exactes longues de cohomologie associées aux suites exactes courtes (3) et le lemme des cinq ramènent, par récurrence sur p, la démonstration de la proposition au cas $p = 0$, mais alors le résultat trivial.

Démonstration de la proposition 2. Commençons par le cas $i+j > 0$, par exemple supposons $i > 0$. Soit

$$z = \sum \lambda_{\alpha_1,\dots,\alpha_{p+q+1}} T_{\alpha_0} \otimes \cdots \otimes T_{\alpha_{p+q+1}} = \sum T_{\alpha_0} \otimes \cdots \otimes T_{\alpha_p} \otimes v_{\alpha_0,\dots,\alpha_p}$$

un élément de $I^*_p\bar{\otimes}I^*_q$, écrit à l'aide de la base des monômes admissibles. Alors $z \in Z''_q(I^*\bar{\otimes}I^*)$ si et seulement $v_{\alpha_0,\dots,\alpha_p} \in Z_q(I^*)$ pour toute suite $\alpha_0, \dots, \alpha_p$.

Notons, pour $a \leq p$ et $c \in S$, $E^a_c \subset I^*\bar{\otimes}I^*$ le sous module engendré par les monômes admissibles ayant ω_c à la a-ième place. On a évidemment $I^*\bar{\otimes}I^* = \oplus_{a,c}E^a_c$, et un élément z appartient à $Z'_p Z''_q(I^*\bar{\otimes}I^*)$ si et seulement si chacune de ses composantes a cette propriété. Supposons donc $z \in E^a_c$. On peut écrire $z = \sum T_{i_0} \otimes \cdots \otimes \omega_c \otimes \cdots \otimes T_{i_p} \otimes v$. Mais on ne change pas z en remplaçant les T par les T' avec $T'_{i_r} = T_{i_r} - Y_c$ si T_{i_r} est un Y, et $T'_{i_r} = T_{i_r}$ sinon. Il vient donc

$$z = \sum T'_{i_0} \otimes \cdots \otimes \omega_c \otimes \cdots \otimes T'_{i_p} \otimes v,$$

ce qui permet de conclure.

Simplifions les notations avant d'aborder la démonstration du cas $i = j = 0$.

Soit S un ensemble, et désignons par $E_m(S)$, ou E_m si on ne touche pas à S, le k-module des polynômes non commutatifs de degré m en les variables $Y_a, a \in S$. On convient de considérer $E_n(S) \subset E_n(S')$ si on a $S \subset S'$. Pour tout $1 \leq i \leq m$ on définit l'application linéaire $d_i : E_n(S) \to E_{n-1}(S)$ par ses valeurs sur les monômes en posant

$$d_i(Y_{a_1} \cdots Y_{a_i} \cdots Y_{a_n}) = Y_{a_1} \cdots \widehat{Y_{a_i}} \cdots Y_{a_m}.$$

c'est à dire en remplaçant la variable à la i-ème place par 1.

Notons $Z(E_m) \subset E_m$ l'ensemble des $P \in E_m$ tels que, pour tout $i = 1, \ldots, m$, on a $d_i P = 0$: on dira que ce sont les cycles.

Appelons support de $P \in E_m(S)$ le plus petit $s = \sigma(P) \subset S$, tel que $P \in E_m(s)$. Étant donné une fonction f à valeur dans S, on notera aussi $\sigma(f)$ son image. Le support d'un monôme de E_m indicé par le multi-indice $\tilde{i} = i_1, \cdots, i_m$ est donc égal à $\sigma(i)$.

Enfin, étant donnés deux entiers p et q on note $E_{p,q}$ (resp. $Z''(E_{p,q})$ ou $E_{p,q}(S) \subset E_{p+q}(S)$ (resp. $Z''(E_{p,q})(S)$) l'ensemble des polynômes qui s'écrivent comme des sommes de produits AB avec $A \in E_p$, $B \in E_q$ (resp. $B \in Z(E_q)$) et

$$\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset.$$

Il sera commode de désigner par $S_{p,q}$ l'ensemble des suites $i_1, \ldots, i_{p+q}$ d'éléments de S telles que

$$\sigma(i_1, \ldots, i_p) \cap \sigma(i_{p+1}, \ldots, i_{p+q}) = \emptyset$$

et de dire que ces suites sont admissibles.

La proposition 2 résulte donc du

Théorème 2. Tout $P \in E_{p,q} \cap Z(E_{p+q})$ peut s'écrire comme une somme de produits AB avec $A \in Z(E_p)$, $B \in Z(E_q)$ et $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$ dès que $\mathrm{card} S \geq p + q + 2$

La démonstration se fera par récurrence sur l'entier q à partir de $q = 1$. On posera $S = \{1, \ldots, n\}$. Disons qu'un cycle est *admissible* s'il s'écrit comme somme de termes AB avec $A \in Z(E_p)$, $B \in Z(E_q)$ et $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$. Pour démontrer le théorème, qui affirme que tout cycle de $E_{p,q}$ est admissible, il est donc licite de négliger les cycles admissibles rencontrés au cours des raisonnements. Nous aurons besoin des résultats suivants.

R.1. Soit $\tilde{u} = \{u_1, \ldots, u_t\}, t < n-1$, une suite de $s = \{1, \ldots, n-1\}$. On note $l(\tilde{u})$ ou $l(u_1, \ldots, u_t)$ le plus petit élément de s différent des u_i. Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des éléments de la forme

$$Y(\tilde{u}, \tilde{c}) = Y_{u_1} \cdots Y_{u_p}(Y_{c_1} - Y_{l(u_1,\ldots,u_p)}) \cdots (Y_{c_{q-1}} - Y_{l(u_1,\ldots,u_p)})$$

tels que $\sigma(\tilde{u}) \cap \sigma(c_1, \ldots, c_{q-1}, l(\tilde{u})) = \emptyset$ et que $l(\tilde{u})$ soit différent des c_j. Alors $\mathcal{B}$ est une base de $Z''(E_{p,q-1})(s)$.

R.2. La famille des cycles $(Y_{i_1}-Y_n)\cdots(Y_{i_m}-Y_n)$ est une base des cycles de E_m lorsque les indices i parcourent s.

R.3. Tout cycle admissible de $E_{p,q-1}(s)$ est une combinaison linéaire des produits

$$E(\tilde{a},\tilde{b})=(Y_{a_1}-Y_{a_{p+1}})\cdots(Y_{a_p}-Y_{a_{p+1}})(Y_{b_1}-Y_{b_q})\cdots(Y_{b_{q-1}}-Y_{b_q})$$

où les suites sont astreintes aux conditions suivantes : $\sigma(\tilde{a})\cap\sigma(\tilde{b})=\emptyset, a_{p+1}\notin\{a_1,\dots,a_p\}, b_q\notin\{b_1,\dots,b_{q-1}\}$. Écrivons $E(\tilde{a},\tilde{b})$ en utilisant la base $\mathcal{B}$, et soit $Y(\tilde{u},\tilde{c})$ un élément de la base qui y figure avec un coefficient non nul (alors les $\tilde{u}$ sont des suites extraites de $\tilde{a}$). On note $F(\tilde{a},\tilde{b})\in E_{p,q}$ l'élément obtenu à partir de $E(\tilde{a},\tilde{b})$ en remplaçant chaque $Y(\tilde{u},\tilde{c})$ par

$$(Y_{u_1}-Y_n)\cdots(Y_{u_p}-Y_n)(Y_{c_1}-Y_{l(u_1,\dots,u_p)})\cdots(Y_{c_{q-1}}-Y_{l(u_1,\dots,u_p})(Y_{l(u_1,\dots,u_p)}-Y_n)$$

et $G(\tilde{a},\tilde{b},\delta)$ celui que l'on obtient en remplaçant chaque $Y(\tilde{u},\tilde{c})$ par

$$(Y_{u_1}-Y_n)\cdots(Y_{u_p}-Y_n)(Y_{c_1}-Y_{l(u_1,\dots,u_p)})\cdots(Y_{c_{q-1}}-Y_{l(u_1,\dots,u_p)})(Y_\delta-Y_n)$$

où δ est choisi différent des a_i.

Démonstration du théorème pour q = 1

t Soit z un cycle de $E_{p,1}$. On peut l'écrire $z=\sum_{i=1,\dots,n-1}P_iY_i+P_nY_n$. Les P_i sont des cycles de E_p. Pour $i\neq n$, ce sont des combinaisons linéaires de $(Y_{i_1}-Y_n)\cdots(Y_{i_p}-Y_n)$. Mais parce que $(Y_{i_1}-Y_n)\cdots(Y_{i_p}-Y_n)(Y_i-Y_{l(i_1,\dots,i_p)})$ est admissible, on est ramené à la forme

$$(1)\qquad z=\sum_{\substack{i<n\\ i_1,\dots,i_p\in S-\{n\}}}\lambda_{i_1,\dots,i_p}(Y_{i_1}-Y_n)\cdots(Y_{i_p}-Y_n)Y_{l(i_1,\dots,i_p)}+P_nY_n,$$

que l'on écrira aussi $z=U+P_nY_n$.

On a $d_{p+1}U=-P_n$, qui ne contient plus Y_n et par conséquent il faut exprimer que, pour tout $k=1,\dots,p$ et pour tout $(p-1)$-uple $a_1,\dots,\hat{k},\dots a_p$ d'éléments de $S-\{n\}$, le coefficient de $Y_{a_1}\cdots Y_{a_{k-1}}Y_nY_{a_{k+1}}\cdots Y_{a_p}$ dans $d_{p+1}U$ est nul. Ces conditions sont réalisées si et seulement si $\bar{z}=\sum\lambda_{i_1,\dots,i_p}Y_{i_1}\cdots Y_{i_p}$ est un cycle, c'est à dire si et seulement si il existe des μ tels que

$$\bar{z}=\sum_{i_1,\dots,i_p}\lambda_{i_1,\dots,i_p}Y_{i_1}\cdots Y_{i_p}=\sum_{a_1,\dots,a_p\in\{1,\dots n-2\}}\mu_{a_1,\dots,a_p}(Y_{a_1}-Y_{n-1})\cdots(Y_{a_p}-Y_{n-1}).$$

En identifiant les coefficients des $Y_{i_1}\cdots Y_{i_p}$ des deux membres de l'égalité, on explicite les λ en fonction des μ. On porte ces valeurs dans (1), puis on met les μ en facteur. Le cycle z est donc une somme de termes de la forme (parce que $P_n = -d_{p+1}U$)

$$\mu_{a_1,\ldots,a_p}\sum \pm(Y_{j_1}-Y_n)\cdots(Y_{j_p}-Y_n)(Y_{l(j_1,\ldots,j_p)}-Y_n) \tag{2}$$

avec $j_k = a_k$ ou $j_k = n-1$, le signe dépendant de la parité du nombre de $n-1$. Cette expression fait apparaître $p+2$ éléments distincts de S au plus. Si donc on prend $n \geq p+3$, il existe un "joker" disponible, disons δ différent des a de n et de $n-1$. Mais alors $(Y_{j_1}-Y_n)\cdots(Y_{j_p}-Y_n)(Y_{l(j_1,\ldots,j_p)}-Y_\delta)$ est admissible, et l'on peut remplacer $Y_{j_1,\ldots,j_p}$ par Y_δ dans (2). Il vient :

$$\begin{aligned} z &= \sum \mu_{a_1,\ldots,a_p}\sum \pm(Y_{j_1}-Y_n)\cdots(Y_{j_p}-Y_n)(Y_\delta-Y_n)\\ &= \sum \mu_{a_1,\ldots,a_p}(Y_{a_1}-Y_{n-1})\cdots(Y_{a_p}-Y_{n-1})(Y_\delta-Y_n). \end{aligned}$$

C'est donc un cycle admissible.

Démonstration du théorème pour $q>1$

Supposons donc le théorème connu pour $q-1$.

Soit $z = \sum_{i\in S} P_iY_i$ un cycle de $E_{p,q}$. Puisque les P_i sont des cycles de $E_{p,q-1}(S)$, on peut les écrire comme combinaisons linéaires des produits admissibles AB. Pour $i\neq n$, deux cas peuvent se produire

— ou bien $n\in\sigma(B)$. Alors $AB(Y_i-Y_n)$ est admissible, donc on peut remplacer, à admissibles près, ABY_i par ABY_n, que l'on groupe avec P_nY_n.

—ou bien $n\notin\sigma(B)$. Alors AB est combinaison linéaire de termes de la forme

$$(Y_{i_1}-Y_n)\cdots(Y_{i_p}-Y_n)(Y_{i_{p+1}}-Y_\beta)\cdots(Y_{i_{p+q-1}}-Y_\beta)$$

avec $(\{i_1,\ldots,i_p\}\cup\{n\})\cap(\{i_{p+1},\ldots i_{p+q-1}\}\cup\{\beta,i\})=\emptyset$.

Ayant fixé les indices $\{i_1,\ldots,i_p\}$, il est loisible de choisir le "pivot" Y_β, en remplaçant β par un l quelconque tel que $l\notin\sigma(i_1,\ldots,i_p)$. Nous prendrons $l = l(i_1,\ldots,i_p)$. Finalement, nous sommes ramené au cas d'un z de la forme :

$$\begin{aligned} z = \sum \lambda_{i_1,\ldots,i_{p+q-1}}(Y_{i_1}-Y_n)\cdots(Y_{i_p}-Y_n)(Y_{i_{p+1}}-Y_{l(i_1,\ldots,i_p)})\\ \cdots(Y_{i_{p+q-1}}-Y_{l(i_1,\ldots,i_p)})Y_{l(i_1,\ldots,i_p)}+P_nY_n \end{aligned} \tag{3}$$

la somme étant prise sur toutes les suites admissibles $\{i_1, \ldots, i_{p+q-1}\}$, et que l'on écrira, comme dans le cas $q = 1$ $z = U + P_n Y_n$. Alors de nouveau z sera un cycle si et seulement si $d_{p+1}U$ ne contient pas Y_n aux p-premières places. Cette condition est réalisée si et seulement si

$$\bar{z} = \sum \lambda_{i_1,\ldots,i_{p+q-1}} Y_{i_1} \cdots Y_{i_p} (Y_{i_{p+1}} - Y_{l(i_1,\ldots,i_p)}) \cdots (Y_{i_{p+q-1}} - Y_{l(i_1,\ldots,i_p})$$

est un cycle. La condition $n \geq p + q + 2$ i.e. $n - 1 \geq p + (q - 1) + 2$ et l'hypothèse de récurrence impliquent que $\bar{z}$ est combinaison linéaire des $E(\tilde{a}, \tilde{b})$, disons

$$\bar{z} = \sum_{\tilde{a},\tilde{b}} \mu_{\tilde{a},\tilde{b}} E(\tilde{a}, \tilde{b}).$$

D'après R.1. on peut calculer les λ en fonction des μ. On remplace les λ en fonction des μ dans (3), et on regroupe les éléments ayant le même μ et il vient

$$z = \sum \mu_{\tilde{a}\tilde{b}} F(\tilde{a}, \tilde{b})$$

Choisisons un joker $\delta \notin \{\tilde{a}\}$, ce qui est facile puisque $p + 1 < n$. Pour terminer, on considère l'égalité

$$F(\tilde{a}, \tilde{b}) = [F(\tilde{a}, \tilde{b}) - G(\tilde{a}, \tilde{b}, \delta)] + G(\tilde{a}, \tilde{b}, \delta)$$

Dans le crochet, on a, par définition de F et G, un cycle admissible. Par ailleurs,

$$G(\tilde{a}, \tilde{b}, \delta) = E(\tilde{a}, \tilde{b})(Y_\delta - Y_n)$$

est aussi un cycle admissible. La démonstration est maintenant complète.

2. Espaces de lacets. Soient E un ensemble et A un anneau commutatif unitaire. On note $A \otimes E$ le A-module libre engendré par E. Lorsque E est un ensemble simplicial ou cosimplicial, $A \otimes E$ hérite d'une structure de A-module simplicial ou cosimplicial. La *normalisation* du module simplicial B est le complexe de chaînes N_*B qui, en degré n est défini par $N_n B = \cap_{i>0} \ker d_i$, et de différentielle d_0. La *normalisation* du module cosimplicial B est le complexe de chaînes N^*B qui, en degré n est défini par $N^n B = \cap_{i\geq 0} \ker s^i$, et de différentielle $d = \sum_{i\geq 0}(-1)^i d^i$.
Si U_*^* est un bicomplexe (dont la différentielle est de degré -1 pour $_*$ et de degré +1 pour *) , on note $\mathcal{T}(U)$ le *complexe total associé* qui en degré n est égal à $\mathcal{T}(U)_n = \prod_{k\geq 0} B^k_{k+n}$.

Soit $\underset{\sim}{B}$ un module simplicial cosimplicial. Le *complexe total associé* $T^1(\underset{\sim}{B})$ est défini par l'égalité $T^1(\underset{\sim}{B}) = \mathcal{T}(N^*N_*\underset{\sim}{B}))$, i.e en degré n par l'égalité $T^1(\underset{\sim}{B})_n = \prod_{k\geq 0} N^k N_{k+n}\underset{\sim}{B}$. De même, si $\underset{\approx}{B}$ est un module simplicial bi-cosimplicial, son *complexe total associé* $T^2(\underset{\approx}{B})$ sera , en degré n, $T^2(\underset{\approx}{B})_n = \prod_{k,l\geq 0} N'^k N''^l N_{k+l+n}(\underset{\approx}{B})$, avec une différentielle appropriée. Ici N' et N'' désignent les normalisations associées respectivement à la première, resp. la seconde structure cosimpliciale de $\underset{\approx}{B}$.

Soit maintenant X un ensemble simplicial pointé fibrant, qu'on appellera simplement un espace. On lui associe l'espace cosimplicial $\underset{\sim}{L}(X)$ défini par $\underset{\sim}{L}^n(X) = X^n$, avec la convention que $X^0 = *$, et dont cofaces et codégénérescences sont donnés par les formules :

$$\begin{aligned}
&d^0(x_1,\cdots,x_n) = (*,x_1,\cdots,x_n)\\
&d^i(x_1,\cdots,x_n) = (x_1,\cdots,x_i,x_i,\cdots,x_n) \quad \text{pour} \quad 0<i<n+1\\
&d^{n+1}(x_1,\cdots,x_n) = (x_1,\cdots x_n,*)\\
&s^i(x_1,\cdots,x_n) = (x_1,\cdots,\hat{x}_{i+1},\cdots,x_n).
\end{aligned}$$

Puisque $\underset{\sim}{L}$ est un foncteur, on peut l'appliquer degré par degré à un espace cosimplicial, et obtenir un ensemble bi-cosimplicial, en particulier $\underset{\sim}{L}(\underset{\sim}{L}(X))$ est un ensemble bi-cosimplicial, que l'on notera simplement $\underset{\approx}{L}(X)$; ainsi on a $\underset{\approx}{L}^{r,s}(X) = X^{rs}$. Rappelons enfin que l'espace tot $\underset{\sim}{L}(X)$, n'est autre, que l'espace des lacets (simplicial) de X, que l'on désignera comme dans l'article de M.Karoubi par $\Omega(X)$ où tot est le classique foncteur de Bousfield-Kan.

2. 1. Il résulte du théorème de [Dwyer] et du lemme 2.2. de [Bousfield] que pour chaque espace X, on a un morphisme fonctoriel

$$N_*(A\otimes\Omega(X)) \to T^1(A\otimes\underset{\sim}{L}(X)) \tag{1}$$

qui est un quasi-isomorphisme lorsque X vérifie les hypothèses précisées en (7.2.), *ce que l'on suppose vérifié dans toute la suite.* Remplaçons dans cette formule l'espace X par l'*espace cosimplicial* $\underset{\sim}{L}(X)$, on obtient un morphisme fonctoriel de modules différentiels cosimpliciaux

$$N_*(A\otimes\underset{\sim}{L}(\Omega(X)) = N_*(A\otimes\Omega(\underset{\sim}{L}(X))) \to T^1(A\otimes\underset{\sim}{L}(\underset{\sim}{L}(X))), \tag{2}$$

auquel on applique le foncteur $\mathcal{T}N^*$, ce qui fournit un morphisme fonctoriel :

$$(3) \qquad T^1(A \otimes \underset{\sim}{L}(\Omega(X))) \to T^2(A \otimes \underset{\approx}{L}(X)).$$

Il résulte des lemmes 1 et 2 ci- dessous que (3) est un quasi-isomorphisme . Composons alors (3) avec le morphisme $N_*(A \otimes \Omega(\Omega(X))) \to T^1(A \otimes \underset{\sim}{L}(\Omega(X)))$, obtenu en remplaçant X par $\Omega(X)$ dans (1). Si l'on suppose que X et $\Omega(X)$ satisfont tous les deux aux hypothèses du théorème de convergence forte de [Dwyer], le composé

$$(4) \qquad N_*(A \otimes \Omega(\Omega(X))) \to T^2(A \otimes \underset{\approx}{L}(X))$$

sera lui aussi un quasi-isomorphisme : c'est, aux normalisations près, le théorème (7.6) de M. Karoubi, pour $r = 2$, que l'on étend facilement par récurrence à r quelconque.

Lemme 1. Soit $f : U \to V$ un morphisme de modules différentiels cosimpliciaux tel que pour tout $q \geq 0$, $f^q : U^q \to V^q$ est un quasi-isomorphisme. Alors, pour tout $q \geq 0$, $N^q(f) : N^q(U) \to N^q(V)$ est aussi un quasi-isomorphisme.

Démonstration : Le diagramme où les lignes sont exactes (et scindées par d^0) :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & N^1(U) & \longrightarrow & U^1 & \xrightarrow{s^0} & U^0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle N^1(f)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f^1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f^0} & & \\
0 & \longrightarrow & N^1(V) & \longrightarrow & V^1 & \xrightarrow{s^0} & V^0 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

montre que $N^1(f)$ est un quasi-isomorphisme. On recommence ensuite avec les suites exactes scindées

$$0 \to \text{Ker } s^0 \to U^2 \xrightarrow{s^0} U^1 \to 0 \quad \text{et} \quad 0 \to N^2(U) \to \text{Ker } s^0 \xrightarrow{s^1} N^1(U) \to 0.$$

Dans le cas général, on procède par une double récurrence, d'abord sur q puis sur $t < q$ pour l'intersection $\bigcap_{0 \leq i < t} \text{Ker } s^i$.

Lemme 2. Soit $f : U^*_* \to V^*_*$ un morphisme de bicomplexes (dont les différentielles sont de degré $+1$ pour* et de degré -1 pour $_*$) tel que pour tout $q \geq 0$, $f^q : U^q_* \to V^q_*$ soit un quasi-isomorphisme. Alors $\mathcal{T}(f) : \mathcal{T}(U) \to \mathcal{T}(V)$ est aussi un quasi isomorphisme.

Démonstration : On introduit les complexes quotients $\mathcal{T}(-)_r = \prod_{q\le r}$. Le diagramme ci-dessous dont les lignes sont exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & U^r_{*+r} & \longrightarrow & \mathcal{T}(U)_r & \longrightarrow & \mathcal{T}(U)_{r-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle f^r}\big\downarrow & & {\scriptstyle \mathcal{T}(f)_r}\big\downarrow & & {\scriptstyle \mathcal{T}(f)_{r-1}}\big\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & V^r_{*+r} & \longrightarrow & \mathcal{T}(V)_r & \longrightarrow & \mathcal{T}(V)_{r-1} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

montre par récurrence sur r que $\mathcal{T}(f)_r$ est un quasi-isomorphisme pour tout $r \ge 0$. Il en va donc de même pour $\mathcal{T}(f)$ d'après le théorème de Milnor sur les $\varprojlim$ puisque l'on a $\mathcal{T}(-) = \varprojlim_r \mathcal{T}(-)_r$.

Remarque. Les normalisations simpliciales et cosimpliciales interviennent naturellement dans la construction des morphismes et les démonstrations de [Dwyer] et [Bousfield], mais peuvent être supprimées dans l'énoncé du théorème 7.6. Pour voir que l'on peut supprimer N_*, par exemple, on applique le lemme suivant dont la démonstration est analogue aux précédentes, après utilisation du théorème de Dold-Kan :

Lemme 3. Soit $\underset{\sim}{B}$ un module simplicial cosimplicial. L'application $\mathcal{T}(N^* \underset{\sim}{B}) \to \mathcal{T}(N^* N_* \underset{\sim}{B})$, induite par les projections $B_{n+p} \to N_{n+p}B$, est un quasi-isomorphisme.

Notons enfin le résultat suivant :

Lemme 4. Soient $C^i, i = 0, 1$, deux foncteurs de la catégorie des espaces topologiques vers celles des modules différentiels gradués, et $f : C^0 \to C^1$ un morphisme fonctoriel, tels que pour tout espace topologique X, $f(X)$ soit un quasi-isomorphisme. Soit $\underset{\approx}{X}$ un espace topologique bicosimplicial. On pose, pour $i = 0, 1$, $\Theta^i(\underset{\approx}{X})_n = \prod\limits_{p\ge 0, q\ge 0} N'^p N''^q C^i(\underset{\approx}{X})_{p+q+n}$. Alors l'application $\Theta^0(\underset{\approx}{X}) \to \Theta^1(\underset{\approx}{X})$ induite par f est un quasi-isomorphisme .

Démonstration : on utilise les lemmes précédents.

Corollaire Soit X un espace 2-connexe. Soit C^0 le foncteur $A \otimes \mathrm{Sin}$, ou $N_*(A \otimes \mathrm{Sin})$, le foncteur des chaînes singulières, ou des chaînes singulières normalisées, et soit $f : C^0 \to C^1$ un morphisme satisfaisant à la condition du lemme 4 . Alors Θ^1 permet de calculer l'homologie de $\Omega(\Omega(\mathrm{Sin(X)}))$, i.e. de $\Omega(\Omega(X))$.

3. L'hypothèse de connexité est inutile pour le théorème de convergence forte de Dwyer

Ce résultat utile figure sous forme de remarque dans [Dror-Smith](1) . En voici une démonstration. Soit $\underset{\sim}{B}$ un A-module simplicial cosimplicial. Le complexe total associé $T^1(\underset{\sim}{B})$ est filtré par les $F^p(\underset{\sim}{B}) = \prod_{k\geq p} N^k N_{k+n}(\underset{\sim}{B})$. Cette filtration est complète et co-complète, au sens de [Eilenberg - Moore] . Ces filtrations ont la propriété suivante : si un morphisme de complexes filtrés, dont les filtrations sont complètes et co-complètes, induit un isomorphisme au niveau E^r des suites spectrales pour un certain $r > 1$, alors il induit un quasi-isomorphisme des complexes totaux.
Le terme $E^2(\underset{\sim}{B})$ associé au complexe $T^1(\underset{\sim}{B})$ est $E^2_{p,q} = \pi^p H_{p-q}(\underset{\sim}{B})$. La cohomotopie π^p est la cohomologie du complexe $N^*H(\underset{\sim}{B})$ ou celle du complexe $H(\underset{\sim}{B})$ muni de la différentielle $d = \sum(-1)^i d^i$.

Soit X un espace non connexe ; posons $X = X_0 \coprod X_1$, X_0 étant la composante connexe du point base $*$. L'inclusion $X_0 \subset X$ induit un morphisme d'espaces cosimpliciaux $\underset{\sim}{L}(X_0) \to \underset{\sim}{L}(X)$, de modules simpliciaux cosimpliciaux $A \otimes \underset{\sim}{L}(X_0) \to A \otimes \underset{\sim}{L}(X)$, de complexes $T^1(A \otimes \underset{\sim}{L}(X_0)) \to T^1(A \otimes \underset{\sim}{L}(X))$, et finalement de suites spectrales $E^r(A \otimes \underset{\sim}{L}(X_0)) \to E^r(A \otimes \underset{\sim}{L}(X))$. Par ailleurs on a $\mathrm{tot}(\underset{\sim}{L}(X_0)) = \mathrm{tot}(\underset{\sim}{L}(X)) = \Omega(X_0)$. Montrons que les suites spectrales sont isomorphes à partir de $r = 2$. D'après Eilenberg- Moore il en résultera que le morphisme $T^1(A \otimes \underset{\sim}{L}(X_0)) \to T^1(A \otimes \underset{\sim}{L}(X))$ est un quasi-isomorphisme. Ainsi, si la suite spectrale pour X_0 converge fortement vers $H(\Omega(X_0), A)$, il en ira de même pour celle de X. Ainsi le théorème de convergence forte est aussi valable pour les espaces non connexes.
Montrons donc que l'application naturelle $H(A \otimes \underset{\sim}{L}(X_0)) \to H(A \otimes \underset{\sim}{L}(X))$ induit un isomorphisme en cohomotopie. En degré p ces modules cosimpliciaux sont égaux respectivement à $H(X_0^p, A)$ et $H(X^p, A)$. Soit n un entier écrit en base 2 , $n = \alpha_1 \cdots \alpha_p$, avec les α égaux à 0 ou 1. Notons $X_n = X_{\alpha_1} \times \cdots \times X_{\alpha_p}$. Il vient $H(X^p, A) = \bigoplus_{n=0,\cdots 2^p} H(X_n, A))$. Posons $K^p = \bigoplus_{n=1,\cdots 2^p} H(X_n, A))$. Il reste à montrer que la suite

$$0 \xrightarrow{d} K^1 \xrightarrow{d} K^2 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} K^p \to \cdots$$

est exacte. Soit $k(r)$ l'ensemble des entiers $n = \alpha_1 \cdots \alpha_p$ tels que $\alpha_i = 0$ pour $i \leq r$ et $\alpha_{r+1} = 1$, $0 \leq r < p$, et posons $K_r^p = \bigoplus_{n \in k(r)} H(X_n, A))$. Posons, pour $r > 0$, $h^p \mid K_r^p = (-1)^{r-1} s^{r-1}$, et $h^p \mid K_0^p = 0$. On vérifie sans peine que l'on a $dh + hd =\mathrm{id}$, ce qui termine la démonstration.

(1) comme l'a indiqué M.A. Mandell à M. Karoubi.

A.K. Bousfield : *On the Homology Spectral Sequence of a Cosimplicial Space.* Amer. J. Math. 109, $N^0 2$, 361-394 (1987)

W.G. Dwyer : *Strong convergence of the Eilenberg-Moore spectral sequence.* Topology, Vol. 13, 255-265 (1974)

S. Eilenberg et J.C. Moore : *Limits and Spectral Sequences.* Topology, Vol. 1, 1-23

E. Dror-Farjoun et J. Smith : *A geometric interpretation of Lannes' functor* T. Astérisque 191, 87-96 (1990)