CHAPITRE I

PRÉLIMINAIRES ALGÉBRIQUES

L'algèbre n'est pas ici un objet d'étude en soi et ce chapitre n'a pas d'autre but que de présenter les concepts et les résultats dont on aura besoin dans les chapitres suivants. On se contentera à l'occasion de démonstrations abrégées, en invitant le lecteur à se reporter à la littérature excellente et nombreuse qui existe sur le sujet ([2], [14],...).

Dans tout le chapitre, K désigne un corps (commutatif). Tous les espaces vectoriels ont K pour corps de base. Si E,F sont deux espaces vectoriels, l'ensemble des applications linéaires $f : E \to F$ muni de la structure canonique d'espace vectoriel sur K est noté $\mathcal{L}(E,F)$.

1. APPLICATIONS BILINÉAIRES.

1.1. <u>DEFINITION</u> : Soit E,F,G trois espaces vectoriels et $f : E \times F \to G$. On dira que f est <u>bilinéaire</u> ssi pour tout $x \in E$ l'application $y \mapsto f(x,y) : F \to G$ est linéaire <u>et</u> pour tout $y \in F$, l'application $x \mapsto f(x,y) : E \to G$ est linéaire également.

L'ensemble de ces applications est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel. Il est noté $\mathcal{B}(E,F ; G)$.

1.2. <u>THEOREME</u> : Si E,F,G sont de dimension finie et que $n = \dim E$, $p = \dim F$, $q = \dim G$, alors $\dim \mathcal{B}(E,F ; G) = npq$.

Si $\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\}$, $\{\eta_1,\dots,\eta_p\}$, $\{\gamma_1,\dots,\gamma_q\}$ sont des bases respectives, les applications ϕ_{ij}^k $(1 \le i \le n,\ 1 \le j \le p,\ 1 \le k \le q)$ définies par

$$\phi_{ij}^k(\varepsilon_r,\varepsilon_s) = \delta_{ir}\,\delta_{js}\,\gamma_k \qquad (1 \le r \le n,\ 1 \le s \le p)$$

où δ désigne le symbole de Kronecker, forment une base de $\mathcal{B}(E,F\ ;\ G)$.

Démonstration : L'application $f \mapsto (f(\varepsilon_i,\eta_j))_{1\le i\le n, 1\le j\le p}$ fournit un isomorphisme entre $\mathcal{B}(E,F\ ;\ G)$ et G^{np} ; la base de G donne un isomorphisme entre G^{np} et K^{npq} ; les ϕ_{ij}^k ne sont autres que les images réciproques des éléments de la base canonique de K^{npq}. $\square$

2. PRODUIT TENSORIEL DE DEUX ESPACES VECTORIELS.

A peine introduites les applications bilinéaires on entreprend de les "linéariser". Pour ce faire, on cherche à associer à tout couple d'espaces vectoriels (E,F) un troisième espace vectoriel, noté $E \otimes F$ ou $E \otimes_K F$ si l'on a besoin de préciser le corps de base, et nommé leur produit tensoriel, ainsi qu'une application bilinéaire

$$j : E \times F \to E \otimes F$$

tels que, à la donnée de tout espace vectoriel G et de toute application bilinéaire $\phi \in \mathcal{B}(E,F\ ;\ G)$, soit associée une unique application linéaire $\psi \in \mathcal{L}(E \otimes F, G)$ qui rende commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
E \times F \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "j"'] & G \\
E \otimes F \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

2.1. THEOREME : Cette construction est toujours possible.

Démonstration : L'ensemble $K^{(E\times F)}$ de toutes les fonctions $f : E \times F \to K$ telles que $f^{-1}(K\setminus\{0\})$ soit fini possède une structure naturelle d'espace vectoriel et une base formée des fonctions caractéristiques des éléments de $E \times F$, c'est-à-dire de toutes les fonctions

$$[x,y] : E \times F \to K : (x',y') \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = x' \text{ et } y = y' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

(Bien entendu l'injection $\sigma : (x,y) \mapsto [x,y]$ permet de faire comme si la base de $K^{(E\times F)}$ était $E \times F$ lui-même ; mais il faut prendre garde que la structure d'espace vectoriel de $E \times F$ n'est alors pas prise en compte : σ n'est ni linéaire ni bilinéaire).

Une propriété classique des bases fait que, étant donné un espace vectoriel G et une application quelconque (bilinéaire ou non) $\phi : E \times F \to G$, il existe une unique application linéaire $\bar{\phi} : K^{(E\times F)} \to G$ telle que $\bar{\phi} \circ \sigma = \phi$.

On considère alors le sous-espace $R(E,F)$ de $K^{(E\times F)}$ engendré par les éléments

$$\begin{array}{ll} [x_1 + x_2, y] - [x_1, y] - [x_2, y] & x_1, x_2 \in E,\ y \in F \quad ; \\ [x, y_1 + y_2] - [x, y_1] - [x, y_2] & x \in E,\ y_1, y_2 \in F \quad ; \\ [\lambda x, y] - \lambda[x,y] & \lambda \in K,\ x \in E,\ y \in F \quad ; \\ [x, \lambda y] - \lambda[x,y] & x \in E,\ \lambda \in K,\ y \in F \quad . \end{array}$$

On note π la projection canonique

$$K^{(E\times F)} \to K^{(E\times F)} / R(E,F) .$$

Il est facile de vérifier que $\pi \circ \sigma$ est bilinéaire ; que, si ϕ est bilinéaire, alors $R(E,F) \subset \operatorname{Ker} \bar{\phi}$; que, par conséquent, si ϕ est bilinéaire, $\bar{\phi}$ se factorise à travers π et donne une unique application linéaire ψ qui rende commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
E \times F \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\sigma"'] & G \\
K^{(E\times F)} \arrow[ur, "\bar{\phi}"] \arrow[d, "\pi"'] & \\
K^{(E\times F)}/R(E,F) \arrow[uur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

Il suffit de poser $E \otimes F = K^{(E\times F)} / R(E,F)$ et $j = \pi \circ \sigma$. □

2.2. <u>REMARQUES</u> :

(i) Une autre formulation possible est que la correspondance $\psi \mapsto \psi \circ j$ fournit un isomorphisme entre $\mathscr{L}(E \otimes F, G)$ et $\mathscr{B}(E,F ; G)$.

(ii) Le couple $(E \otimes F , j)$ est <u>unique</u> à isomorphisme canonique près.

<u>Démonstration de (ii)</u> : Supposant que les deux couples $(E \otimes F , j)$ et $(E \otimes' F , j')$ satisfont les conditions, on obtient deux diagrammes :

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "j"'] & E \otimes' F \\ E \otimes F \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "j"] \arrow[d, "j'"'] & E \otimes F \\ E \otimes' F \arrow[ur, "\psi'"'] & \end{tikzcd}$$

en faisant jouer le rôle du couple (G,ϕ) de 2.1. successivement à $(E \otimes' F , j')$ et $(E \otimes F , j)$. Donc le diagramme

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "j"] \arrow[d, "j"'] & E \otimes F \\ E \otimes F \arrow[ur, "\psi' \circ \psi"'] & \end{tikzcd}$$

obtenu par composition est commutatif et, par unicité de la solution, $\psi' \circ \psi = \mathrm{Id}_{E\otimes F}$. De la même manière, $\psi \circ \psi' = \mathrm{Id}_{E\otimes' F}$. □

Il est de tradition d'écrire $x \otimes y$ pour $j(x,y)$. Les propriétés calculatoires des produits tensoriels sont alors données par la

2.3. <u>PROPOSITION</u> :

(i) Pour $\lambda \in K$, $x \in E$, $y \in F$: $\lambda(x \otimes y) = (\lambda x) \otimes y = x \otimes (\lambda y)$,

pour $x,x' \in E$, $y \in F$: $(x + x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y$,

pour $x \in E$, $y,y' \in F$: $x \otimes (y + y') = x \otimes y + x \otimes y'$.

(ii) Tout $z \in E \otimes F$ peut s'écrire comme somme finie $z = \sum_i x_i \otimes y_i$ où $x_i \in E$, $y_i \in F$. Cette décomposition n'est pas unique.

(iii) Pour tout espace vectoriel G et toute $\phi \in \mathcal{B}(E,F\ ;\ G)$, ψ est définie par

$$\psi(\sum_i x_i \otimes y_i) = \sum_i \phi(x_i,y_i)$$

avec $x_i \in E$, $y_i \in F$.

(iv) Si E et F sont de dimension finie respectivement n et p, avec pour bases respectives $\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\}$ et $\{\eta_1,\ldots,\eta_p\}$, alors $E \otimes F$ est de dimension np et admet pour base $B = \{\varepsilon_i \otimes \eta_j \mid 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le p\}$.

Démonstration :

(i), (ii) et (iii) sont laissés au lecteur patient.

(iv) En vertu de (i) et (ii), B engendre $E \otimes F$ qui est donc de dimension au plus np. Mais pour tout espace vectoriel G de dimension finie q, $\dim \mathcal{L}(E \otimes F, G) = \dim \mathcal{B}(E,F\ ;\ G) = npq$. (cf. 1.2) : il faut donc que $\dim E \otimes F = np$, et les $\varepsilon_i \otimes \eta_j$ sont nécessairement indépendants. $\square$

2.4. Notation (abus de) : En vertu de la propriété (ii) ci-dessus, et pour alléger l'écriture, nous nous permettrons systématiquement de remplacer l'expression :

"l'application linéaire $\phi : E \otimes F \to G$ qui envoie un élément de la forme $x \otimes y$ sur z"

par celle-ci, légèrement incorrecte, mais lisible :

"$\phi : E \otimes F \to G : x \otimes y \mapsto z$" .

Le cas particulier où l'un des deux espaces vectoriels est le corps de base revient constamment dans la suite. Le voici en détail à titre de premier exemple.

La structure même de tout espace vectoriel E comporte une application bilinéaire $\mu : K \times E \to E : (\lambda,x) \mapsto \lambda x$.

2.5. THEOREME : Le couple (E,μ) répond aux conditions définissant le produit tensoriel $K \otimes E$.

Démonstration : Si F est un espace vectoriel et $\phi : K \times E \to F$ une application bilinéaire, pour rendre commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} K \times E \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\mu"'] & F \\ E \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

on ne peut que poser pour tout $x \in E$, $\psi(x) = \phi(1,x)$ puisque par définition $\mu(1,x) = x$. On a alors $\psi \circ \mu(\lambda,x) = \psi(\lambda x) = \phi(1,\lambda x) = \lambda\, \phi(1,x)$

$$= \begin{cases} \phi(\lambda,x) & \text{ce qui prouve que } \phi = \psi \circ \mu, \\ \lambda\psi(x) & \text{ce qui prouve que } \psi \text{ est linéaire.} \end{cases} \qquad \square$$

2.6. COROLLAIRE :

(i) Il existe un isomorphisme canonique $\nu : K \otimes E \to E : \lambda \otimes x \mapsto \lambda x$.

(ii) Si E est de dimension finie avec pour base $\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\}$, ν envoie sur cette base la base $\{1 \otimes \varepsilon_1,\ldots,1 \otimes \varepsilon_n\}$ (cf. 2.3.(iv)).

Il est habituel de regarder cet isomorphisme comme une identification.

Démonstration : Il est clair que le diagramme

$$\begin{tikzcd} K \times E \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "j"'] & E \\ K \otimes E \arrow[ur, "\nu"'] & \end{tikzcd}$$

est commutatif ; utiliser 2.2.(ii). $\square$

2.7. PRODUIT TENSORIEL DE GROUPES ABELIENS.

En substituant $\mathbb{Z}$ à K et $\mathbb{Z}$-module à K-espace vectoriel, on peut définir de façon analogue à ce qui précède le produit tensoriel de deux groupes abéliens. Les résultats de ce paragraphe -sauf évidemment 2.3.(iv) et 2.6.(ii)- et beaucoup de ce qui suit -mais pas tout- restent valides. Nous n'y regarderons pas en détail car nous n'avons guère besoin que de la définition.

3. COMMUTATIVITÉ. ASSOCIATIVITÉ.

On rassemble ici des propriétés formelles attendues.

3.1. THEOREME : Si E et F sont deux espaces vectoriels, l'application $x \otimes y \mapsto y \otimes x : E \otimes F \to F \otimes E$ est un isomorphisme.

Démonstration : L'"échange" $\tau : E \times F \to F \times E : (x,y) \mapsto (y,x)$ et sa réciproque τ' induisent les applications linéaires ϕ et ϕ' dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "j"'] & F \times E \arrow[r, "\tau'"] \arrow[d, "j'"'] & E \times F \arrow[d, "j"'] \\ E \otimes F \arrow[r, "\phi"'] & F \otimes E \arrow[r, "\phi'"'] & E \otimes F \end{tikzcd}$$

où $\phi(x \otimes y) = y \otimes x$ par définition. En vertu de l'unicité, ϕ et ϕ' sont réciproques l'une de l'autre. □

3.2. THEOREME : Si E,F,G sont trois espaces vectoriels, l'application $(x \otimes y) \otimes z \mapsto x \otimes (y \otimes z) : (E \otimes F) \otimes G \to E \otimes (F \otimes G)$ est un isomorphisme.

Démonstration : C'est un corollaire immédiat de la construction suivante, d'ailleurs utile en elle-même :

Etant donné quatre espaces vectoriels E,F,G,H, une application $\phi : E \times F \times G \to H$ est dite trilinéaire ssi pour tous $x \in E$, $y \in F$, $z \in G$, les applications

$$\xi \mapsto f(\xi,y,z) : E \to H$$
$$\eta \mapsto f(x,\eta,z) : F \to H$$
$$\zeta \mapsto f(x,y,\zeta) : G \to H$$

sont linéaires (cf. 1.1).

De façon analogue à 2.1. on cherche à construire un espace vectoriel, à noter $E \otimes F \otimes G$, et une application trilinéaire $u : E \times F \times G \to E \otimes F \otimes G$ tels que, pour tout espace vectoriel H et toute application trilinéaire $\phi : E \times F \times G \to H$

il existe une unique application linéaire $\omega : E \otimes F \otimes G \to H$ qui rende le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} E \times F \times G \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "u"'] & H \\ E \otimes F \otimes G \arrow[ur, "\omega"'] & \end{tikzcd}$$

3.3. <u>THEOREME</u> :Cette construction est toujours possible et la solution est unique à isomorphisme canonique près.

<u>Démonstration</u> : L'unicité se prouve comme en 2.2.(ii).

Une première démonstration d'existence consiste à associer à ϕ l'<u>unique</u> application bilinéaire $\lambda : (E \otimes F) \times G \to H$ qui rend le diagramme suivant commutatif

$$\begin{tikzcd} E \times F \times G \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "j \times Id_G"'] & H \\ (E \otimes F) \times G \arrow[ur, "\lambda"'] & \end{tikzcd}$$

(La trilinéarité de ϕ implique que, pour tout $z \in G$, l'application $\phi_z : E \times F \to H : (x,y) \mapsto \phi(x,y,z)$ est bilinéaire ; on en déduit d'après 2.1. l'existence, pour chaque z, d'une unique application linéaire $\psi_z : E \otimes F \to H$ qui rende commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "\phi_z"] \arrow[d, "j"'] & H \\ E \otimes F \arrow[ur, "\psi_z"'] & \end{tikzcd}$$

Comme il est clair que le seul candidat possible pour λ est défini par

$$\lambda(x \otimes y , z) = \phi(x,y,z) = \psi_z(x \otimes y) ,$$

il n'y a plus qu'à vérifier que cette définition donne bien une λ bilinéaire, ce qui est trivial).

Appliquant de nouveau 2.1., on obtient une unique application linéaire $\omega : (E \otimes F) \otimes G \to H$ telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(E \otimes F) \times G \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "j'"'] & H \\
(E \otimes F) \otimes G \arrow[ur, "\omega"'] &
\end{tikzcd}$$

soit commutatif.
Autrement dit le couple $((E \otimes F) \otimes G\,, j' \circ (j \times Id_G))$ est une solution (la trilinéarité de $j' \circ (j \times Id_G)$ est immédiate).

Mais bien sûr on aurait pu faire une démonstration analogue en isolant d'abord E à gauche, et le candidat $E \otimes F \otimes G$ aurait cette fois été $E \otimes (F \otimes G)$: il en résulte donc que $(E \otimes F) \otimes G \cong E \otimes (F \otimes G)$ et l'isomorphisme A qui paraît dans le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
& E \times F \times G \arrow[dl, "u_1"'] \arrow[dr, "u_2"] & \\
(E \otimes F) \otimes G \arrow[rr, "A"] & & E \otimes (F \otimes G)
\end{tikzcd}$$

est bien $A : (x \otimes y) \otimes z \mapsto x \otimes (y \otimes z)$ puisque

$$u_1 = j' \circ (j \times Id_G) : (x,y,z) \mapsto (x \otimes y) \otimes z$$

et

$$u_2 : (x,y,z) \mapsto x \otimes (y \otimes z) \ . \qquad \square\square$$

3.4. <u>REMARQUE</u> : Le Théorème 3.2. comme la construction 3.3. peuvent s'étendre sans peine à n variables, $n \geq 3$. Dans tous les cas on affecte de prendre les isomorphismes canoniques pour des identifications, en s'abstenant de parenthèses, ou en les plaçant selon l'humeur et la commodité.

4. PRODUIT TENSORIEL D'APPLICATIONS LINÉAIRES.

Etant donné quatre espaces vectoriels E,E',F,F' et deux applications linéaires $f : E \to E'$, $g : F \to F'$ on forme l'application

$$f \times g : E \times F \to E' \times F' : (x,y) \mapsto (f(x), g(y)) \ .$$

4.1. <u>THEOREME</u> : Il existe une unique application linéaire, notée $f \otimes g$, qui rende commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "f \times g"] \arrow[d, "j"'] & E' \times F' \arrow[d, "j'"] \\ E \otimes F \arrow[r, "f \otimes g"'] & E' \otimes F' \end{tikzcd} \ .$$

Autrement dit, cette application est définie par

$$(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y)$$

pour tous $x \in E$, $y \in F$.

<u>Démonstration</u> : Il suffit de vérifier que $j' \circ (f \times g)$ est bilinéaire, ce qui est trivial. □

4.2. <u>REMARQUE</u> : Cela peut s'étendre à n applications linéaires, $n \geq 3$: $f_i \in \mathcal{L}(E_i, E_i')$, $i = 1,\ldots,n$, étant données, on obtient l'application linéaire

$$f_1 \otimes \ldots \otimes f_n : E_1 \otimes \ldots \otimes E_n \to E_1' \otimes \ldots \otimes E_n'$$

définie par $(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n)(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = f_1(x_1) \otimes \ldots \otimes f_n(x_n)$ (cf. 3.4.).

Les propriétés calculatoires sont résumées, pour $n = 2$, dans la

4.3. <u>PROPOSITION</u> :

(i) Etant donné six espaces vectoriels E, E', E'', F, F', F'' et quatre applications linéaires $f : E \to E'$, $f' : E' \to E''$, $g : F \to F'$, $g' : F' \to F''$, alors

$$(f' \circ f) \otimes (g' \circ g) = (f' \otimes g') \circ (f \otimes g) \ .$$

(ii) Pour tous espaces vectoriels E, F,

$$Id_E \otimes Id_F = Id_{E\otimes F}$$

(iii) Si $f : E \to E'$, $g : F \to F'$ sont des isomorphismes, alors $f \otimes g$ est un isomorphisme et $(f \otimes g)^{-1} = (f^{-1}) \otimes (g^{-1})$.

(iv) Etant donné quatre espaces vectoriels et quatre applications linéaires $f, f' : E \to E'$, $g, g' : F \to F'$, et $\lambda \in K$, alors

$$(f+f') \otimes g = f \otimes g + f' \otimes g \ ,$$

$$(\lambda f) \otimes g = \lambda(f \otimes g) \ ,$$

$$f \otimes (g+g') = f \otimes g + f \otimes g' \ ,$$

$$f \otimes (\lambda g) = \lambda(f \otimes g) \ .$$

Démonstration : ... laissée au lecteur, (iii) étant une conséquence de (i) et (ii).□

5. PRODUIT TENSORIEL D'UNE SOMME DIRECTE ("DISTRIBUTIVITÉ").

Si $(E_i)_{i\in I}$ est une famille d'espaces vectoriels indexée par un ensemble I, on rappelle que la somme directe $\bigoplus_{i\in I} E_i$ est le sous-espace du produit cartésien $\prod_{i\in I} E_i$ formé des éléments qui n'ont qu'un nombre fini de coordonnées non nulles. (D'où il résulte que, si I est fini, $\bigoplus_{i\in I} E_i = \prod_{i\in I} E_i$). On note $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$.

5.1. THEOREME : Pour tout espace vectoriel F, l'application $\delta : E \otimes F \to \bigoplus_{i\in I} (E_i \otimes F) : ((x_i)_{i\in I}) \otimes y \mapsto (x_i \otimes y)_{i\in I}$ est un isomorphisme.

Démonstration : Soit $S = \bigoplus_{i\in I} (E_i \otimes F)$.

On note σ_j et λ_j les injections canoniques relatives à E et S respectivement (p.ex. : $\sigma_j : x \mapsto (y_i)_{i\in I}$ où $y_j = x$ et tous les autres y_i sont nuls). Alors δ est induite par l'application clairement bilinéaire

$$E \times F \to S : ((x_i)_{i\in I}, y) \mapsto (x_i \otimes y)_{i\in I}$$

et rend le diagramme suivant commutatif pour tout $j \in I$:

$$\begin{tikzcd} E \otimes F \arrow[r, "\delta"] & S \\ E_j \otimes F \arrow[u, "\sigma_j \otimes \mathrm{Id}_F"] \arrow[ur, "\lambda_j"'] & \end{tikzcd} .$$

Réciproquement, la propriété universelle de S exprime précisément qu'il existe une unique application linéaire $\gamma : S \to E \otimes F$ qui rende le diagramme suivant commutatif pour tout $j \in I$:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\gamma"] & E \otimes F \\ E_j \otimes F \arrow[u, "\lambda_j"] \arrow[ur, "\sigma_j \otimes \mathrm{Id}_F"'] & \end{tikzcd} .$$

On a donc pour tout $j \in I$ un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\delta \circ \gamma"] & S \\ E_j \otimes F \arrow[u, "\lambda_j"] \arrow[r, "="'] & E_j \otimes F \arrow[u, "\lambda_j"'] \end{tikzcd} ,$$

d'où $\delta \circ \gamma = \mathrm{Id}_S$ par définition des sommes directes.

Un calcul direct montre que

$$\begin{aligned} \gamma \circ \delta((x_i)_{i \in I} \otimes y) &= \gamma((x_i \otimes y)_{i \in I}) = \gamma(\sum_{i \in I} \lambda_i(x_i \otimes y)) \\ &= \sum_{i \in I} \sigma_i(x_i) \otimes y = (x_i)_{i \in I} \otimes y . \end{aligned}$$

(On utilise les diagrammes précédents. Toutes les sommes sont finies). □

5.2. <u>COROLLAIRE</u> : Pour toute famille d'espaces vectoriels $(F_j)_{j \in J}$, et tout espace vectoriel E :

$$E \otimes \left(\bigoplus_{j \in J} F_j \right) \cong \bigoplus_{j \in J} (E \otimes F_j) .$$

Pour tout couple de familles :

$$\left(\bigoplus_{i\in I} E_i\right) \otimes \left(\bigoplus_{j\in J} F_j\right) \cong \bigoplus_{(i,j)\in I\times J} (E_i \otimes F_j) .$$

Démonstration : Le premier résultat par commutativité de $\otimes$; le deuxième en deux temps. □

5.3. COROLLAIRE : Soit E,F deux espaces vectoriels et $\{\varepsilon_i\}_{i\in I}$, $\{\eta_j\}_{j\in J}$ des bases respectives (non nécessairement finies, cf. 2.3. (iv)). Alors $\{\varepsilon_i \otimes \eta_j\}_{(i,j)\in I\times J}$ est une base de $E \otimes F$.

Démonstration : Par définition d'une base, $E = \bigoplus_{i\in I} K\,\varepsilon_i$ et $F = \bigoplus_{j\in J} K\,\eta_j$. On applique 5.2. en sachant que $K\,\varepsilon_i \otimes K\,\eta_j \cong K(\varepsilon_i \otimes \eta_j)$ (2.3. (iv) avec $n = p = 1$). □

6. SUITES EXACTES.

6.1. DEFINITIONS :

(i) Soit G,G',G" trois groupes abéliens, $\alpha : G' \to G$, $\beta : G \to G''$ deux homomorphismes de groupes.

La suite $G' \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} G''$ est dite exacte ssi $\mathrm{Im}\,\alpha = \mathrm{Ker}\,\beta$.

(ii) Soit X un sous-ensemble de **Z** (fini ou infini à l'un et/ou l'autre bout), $(G_n)_{n\in X}$ une famille de groupes abéliens et, pour tout $n \in X$ tel que $(n+1) \in X$, un homomorphisme de groupes $\gamma_n : G_n \to G_{n+1}$.

La suite $\ldots \longrightarrow G_{n-1} \xrightarrow{\gamma_{n-1}} G_n \xrightarrow{\gamma_n} G_{n+1} \longrightarrow \ldots$ est dite exacte ssi toutes les suites à 3 termes qu'on peut en extraire sont exactes au sens de (i).

(iii) En particulier, une suite exacte à 5 termes du type $0 \longrightarrow G' \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} G'' \longrightarrow 0$ (c'est-à-dire où α est injective, β surjective et $\mathrm{Im}\,\alpha = \mathrm{Ker}\,\beta$) s'appelle suite exacte courte (s.e.c.).

6.2. REMARQUE : Les définitions ci-dessus sont également applicables au cas des espaces vectoriels (et non plus seulement groupes abéliens) et applications linéaires (et non plus seulement homomorphismes de groupes).

6.3. <u>Exemples</u> :

(i) La suite $0 \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_1 \oplus G_2 \longrightarrow G_2 \longrightarrow 0$ où les flèches représentent les injection et projection canoniques est une s.e.c..

(ii) La suite $0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$ où f est induite par la multiplication par 2 dans $\mathbb{Z}$ et g par $Id_{\mathbb{Z}}$, est une s.e.c.. Cependant $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \not\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, d'où la

6.4. <u>DEFINITION</u> : Une s.e.c. $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ est dite <u>scindée</u> ssi il existe un isomorphisme $\phi : B \longrightarrow A \oplus C$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\phi"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\sigma_A"'] & A\oplus C \arrow[r, "\pi_C"'] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où σ_A est l'injection canonique, π_C la projection canonique.

6.5. <u>LEMME</u> : Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(i) La s.e.c. $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ est scindée.

(ii) L'épimorphisme β possède un inverse à droite (ou rétraction) δ.

(iii) Le monomorphisme α possède un inverse à gauche ε.

<u>Démonstration</u> :

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) : pour tout $b \in B$, $b - \delta\circ\beta(b) \in \operatorname{Ker}\beta = \operatorname{Im}\alpha$; il existe donc un unique $a \in A$ tel que $\alpha(a) = b - \delta\circ\beta(b)$. On pose $\varepsilon(b) = a$.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) : si $b \in \operatorname{Ker}\beta = \operatorname{Im}\alpha$, $\alpha\circ\varepsilon(b) = b$. Donc, si $c \in C$ et $b \in B$ avec $\beta(b) = c$, $b - \alpha\circ\varepsilon(b)$ ne dépend que de c. On pose $\delta(c) = b - \alpha\circ\varepsilon(b)$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) et (iii) : la projection π_A étant un inverse à gauche de σ_A et l'injection σ_C un inverse à droite de π_C, on pose $\varepsilon = \pi_A \circ \phi$ et $\delta = \phi^{-1} \circ \sigma_C$.

(ii) ou (iii) $\Longrightarrow$ (i) : étant donné soit δ, soit ε, on construit celui qui manque comme ci-dessus (si les deux sont donnés et qu'ils ne se déduisent pas l'un de l'autre, on laisse tomber l'un des deux...). On vérifie que définir $\phi(b) = (\varepsilon(b),\beta(b))$ et $\phi^{-1}(a,c) = \alpha(a) + \delta(c)$ satisfait les conditions. □

6.6. COROLLAIRE : Toute s.e.c. d'espaces vectoriels est scindée.

Démonstration : Soit $\{c_i\}_{i\in I}$ une base de C. Pour tout $i \in I$, on prend un $b_i \in B$ tel que $\beta(b_i) = c_i$. Poser $\delta(c_i) = b_i$ définit une rétraction. □

Comme on pouvait s'y attendre, nous étudions maintenant le comportement des suites exactes sous l'action du produit tensoriel.

6.7. THEOREME : Soit $0 \longrightarrow G' \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} G'' \longrightarrow 0$ une s.e.c. de groupes abéliens, et H un groupe abélien. Alors la suite

$$G' \otimes H \xrightarrow{\alpha\otimes Id_H} G \otimes H \xrightarrow{\beta\otimes Id_H} G'' \otimes H \longrightarrow 0$$

est exacte.

Démonstration :

1°) que $\beta \otimes Id_H$ soit surjective est clair.

2°) (i) $Im(\alpha \otimes Id_H) \subset Ker(\beta \otimes Id_H)$ parce que $(\beta \otimes Id_H) \circ (\alpha \otimes Id_H) = (\beta \circ \alpha) \otimes Id_H = 0 \otimes Id_H = 0$.

(ii) Réciproquement : à cause du 1°), $G'' \otimes H \cong G \otimes H/Ker(\beta \otimes Id_H)$; grâce au 2°) (i), $\beta \otimes Id_H$ se factorise à travers $Im(\alpha \otimes Id_H)$ et donne une application $\delta : G \otimes H/Im(\alpha \otimes Id_H) \to G'' \otimes H$: il suffit donc de montrer que δ est un isomorphisme. Or, étant donné $x'' \in G''$ et $x, x_1 \in G$ tels que $\beta(x) = \beta(x_1) = x''$, on a $x - x_1 \in Ker\,\beta = Im\,\alpha$ et, pour tout $y \in H$, $x \otimes y - x_1 \otimes y = (x - x_1) \otimes y \in Im(\alpha \otimes Id_H)$. D'où une application bien définie -et clairement bilinéaire-

$$\lambda : G'' \times H \to G \otimes H/Im(\alpha \otimes Id_H) : (x'',y) \mapsto Cl(x \otimes y) \bmod. Im(\alpha \otimes Id_H) .$$

On voit sans peine que l'application induite $\mu : G'' \otimes H \to G \otimes H/Im(\alpha \otimes Id_H)$ est l'inverse de δ. □

6.8. <u>REMARQUE IMPORTANTE</u> : En général, $\alpha \otimes Id_H$ n'est pas injective : prendre p.ex. la s.e.c. 6.3. (ii), $H = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et voir ce qui arrive à $1 \otimes 1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Le seul cas "favorable" est celui des s.e.c. scindées, d'où en particulier :

6.9. <u>THEOREME</u> : Une s.e.c. d'<u>espaces vectoriels</u> $0 \longrightarrow E' \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} E'' \longrightarrow 0$ induit pour tout espace vectoriel F une s.e.c.

$$0 \longrightarrow E' \otimes F \xrightarrow{\alpha \otimes Id_F} E \otimes F \xrightarrow{\beta \otimes Id_F} E'' \otimes F \longrightarrow 0 .$$

<u>Démonstration</u> : Toute s.e.c. d'espaces vectoriels étant scindée, α possède un inverse à gauche ε. Il en résulte que

$$(\varepsilon \otimes Id_F) \circ (\alpha \otimes Id_F) = (\varepsilon \circ \alpha) \otimes Id_F = Id_{E'} \otimes Id_F = Id_{E' \otimes F}$$

et donc $\alpha \otimes Id_F$ est injective. □

6.10. <u>COROLLAIRE</u> : Soit $E' \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} E''$ une suite exacte d'espaces vectoriels. Alors, pour tout espace vectoriel F, la suite

$$E' \otimes F \xrightarrow{\alpha \otimes Id_F} E \otimes F \xrightarrow{\beta \otimes Id_F} E'' \otimes F$$

est exacte.

<u>Démonstration</u> : La décomposition canonique d'un homomorphisme fournit les s.e.c. suivantes :

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} \alpha \longrightarrow E' \xrightarrow{\alpha_1} \operatorname{Im} \alpha \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} \beta \xrightarrow{\alpha_2} E \xrightarrow{\beta_1} \operatorname{Im} \beta \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \operatorname{Im} \beta \xrightarrow{\beta_2} E'' \longrightarrow \operatorname{Coker} \beta \longrightarrow 0 ,$$

où $\alpha_2 \circ \alpha_1 = \alpha$, $\beta_2 \circ \beta_1 = \beta$, $\operatorname{Coker} \beta = E''/\operatorname{Im} \beta$.

On en déduit les s.e.c. :

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} \alpha \otimes F \longrightarrow E' \otimes F \xrightarrow{\alpha_1 \otimes Id_F} \operatorname{Im} \alpha \otimes F \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\beta \otimes F \xrightarrow{\alpha_2 \otimes \mathrm{Id}_F} E \otimes F \xrightarrow{\beta_1 \otimes \mathrm{Id}_F} \mathrm{Im}\,\beta \otimes F \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}\,\beta \otimes F \xrightarrow{\beta_2 \otimes \mathrm{Id}_F} E'' \otimes F \longrightarrow \mathrm{Coker}\,\beta \otimes F \longrightarrow 0$$

où $(\alpha_2 \otimes \mathrm{Id}_F) \circ (\alpha_1 \otimes \mathrm{Id}_F) = \alpha \otimes \mathrm{Id}_F$ et $(\beta_2 \otimes \mathrm{Id}_F) \circ (\beta_1 \otimes \mathrm{Id}_F) = \beta \otimes \mathrm{Id}_F$, ce qui montre que $\mathrm{Im}(\alpha \otimes \mathrm{Id}_F) = \mathrm{Im}(\alpha_2 \otimes \mathrm{Id}_F) = \mathrm{Ker}(\beta_1 \otimes \mathrm{Id}_F) = \mathrm{Ker}(\beta \otimes \mathrm{Id}_F)$. □

6.11. <u>REMARQUE</u> : L'équivalent de 6.10. pour les groupes abéliens est faux en général. La plus grande "amélioration" possible de 6.7. consiste à y supposer seulement que $G' \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} G'' \longrightarrow 0$ est exacte, avec la même conclusion.

7. ALGÈBRE TENSORIELLE.

Notre souci va être ici la mise au point d'un procédé qui permette de fournir à une donnée linéaire des ressources multiplicatives.

On rappelle qu'une <u>algèbre graduée</u> sur K est une algèbre A qui, en tant qu'espace vectoriel, est somme directe d'une famille indexée par $\mathbb{N}$ de K-espaces vectoriels A_k $\left(A = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} A_k \right)$ avec la condition que, pour tous entiers n, p, $A_n . A_p \subset A_{n+p}$.

7.1. <u>DEFINITIONS</u> : Si E est un K-espace vectoriel, on pose :

i) $T^0(E) = K$,

ii) $T^1(E) = E$,

iii) pour tout entier $k \geq 2$, $T^k(E) = E^{\otimes k} = E \otimes \ldots \otimes E$ (k facteurs),

iv) $T(E) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} T^k(E)$.

7.2. <u>THEOREME</u> : On peut munir T(E) d'une structure de K-algèbre graduée telle que, pour $a = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ et $b = \sum_{p \in \mathbb{N}} b_p$ (où $a_n \in T^n(E)$, $b_p \in T^p(E)$), $ab = \sum_{q \in \mathbb{N}} c_q$ avec $c_q = \sum_{n+p=q} a_n \otimes b_p$.

On dit que T(E) est l'<u>algèbre tensorielle de</u> E.

<u>Démonstration</u> : Si n et p sont strictement positifs, $T^n(E) \otimes T^p(E) \cong T^{n+p}(E)$ par l'application $(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) \otimes (y_1 \otimes \ldots \otimes y_p) \mapsto x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes \ldots \otimes y_p$ que l'on convient de regarder comme une identification (cf. 3.2., 3.4.).

Si $n = 0$ ou $p = 0$, l'isomorphisme est celui de 2.6. : $K \otimes T^p(E) \to T^p(E) : \lambda \otimes x \mapsto \lambda x$ ou son analogue $T^n(E) \otimes K \to T^n(E) : x \otimes \lambda \mapsto \lambda x$, que l'on regarde aussi comme des identifications. Dans tous les cas on considère donc que $a_n \otimes b_p \in T^{n+p}(E)$ lorsque $a_n \in T^n(E)$ et $b_p \in T^p(E)$. Comme il n'y a qu'un nombre fini de a_n's et de b_p's qui soient non-nuls, un nombre fini de c_q's seulement sont non-nuls : un produit est ainsi défini sur T(E). La vérification de ses propriétés formelles est une affaire de routine. □

7.3. <u>REMARQUE</u> : Si dim E = 1, avec pour base {X}, alors, pour tout entier k, $T^k(E)$ est de dimension 1, engendré par $X \otimes \ldots \otimes X = X^n$, et, en tant que K-algèbres,

$$T(E) \cong K[X].$$

Par définition même, E est un sous-espace vectoriel de T(E). L'idée que l'algèbre tensorielle est en quelque sorte la plus naturelle de toutes les algèbres contenant E est exprimée de façon précise dans la propriété universelle que voici :

7.4. <u>THEOREME</u> : Etant donné une K-algèbre A et une application linéaire $\phi : E \to A$, il existe un unique homomorphisme d'algèbres $\lambda : T(E) \to A$ qui rende commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, hook] & A \\ T(E) \arrow[ur, "\lambda"'] & \end{tikzcd}$$

<u>Démonstration</u> :

i) <u>Unicité</u> : en tant qu'espace vectoriel $T^k(E)$ est engendré par les éléments de la forme $x_1 \otimes \ldots \otimes x_k$ où $x_i \in E$, $i = 1,\ldots,k$, de sorte que deux homomorphismes d'algèbres définis sur T(E) sont égaux ssi ils coïncident sur $T^1(E)$. Or le diagramme impose justement que $\lambda|_{T^1(E)} = \phi$, et deux solutions sont donc forcément égales.

ii) Existence : l'application $E^k \to A : (x_1,\dots,x_k) \mapsto \phi(x_1) \dots \phi(x_k)$ est k-linéaire et induit donc une application linéaire $\lambda_k : T^k(E) \to A : x_1 \otimes\dots\otimes x_k \mapsto \phi(x_1) \dots \phi(x_k)$. On pose $\lambda = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k$ et vérifie les propriétés formelles. □

7.5. REMARQUE : Dans ce cas, comme dans tous les cas analogues vus et à voir, et pour les mêmes raisons, toute autre solution de ce problème universel est naturellement isomorphe à T(E).

En généralisant la démarche du §4, on obtient le

7.6. THEOREME : Etant donné deux espaces vectoriels E,F et une application linéaire $f : E \to F$, il existe un unique homomorphisme d'algèbres graduées (de degré 0) $T(f) : T(E) \to T(F)$ qui rende commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ T(E) & \xrightarrow[T(f)]{} & T(F) \end{array}$$

Démonstration : L'existence et l'unicité de T(f) sont assurées par 7.4., dont la démonstration prouve en plus que la restriction de T(f) à $T^k(E)$ n'est autre que

$$T^k(f) = \underbrace{f \otimes\dots\otimes f}_{k \text{ fois}} : T^k(E) \to T^k(F) : (x_1\otimes\dots\otimes x_k) \mapsto f(x_1) \otimes\dots\otimes f(x_k) . \quad □$$

8. PUISSANCES EXTÉRIEURES. ALGÈBRE EXTÉRIEURE.

Parmi les applications k-linéaires, certaines jouent un rôle particulièrement important dans ce livre (...et ailleurs) : celles qui se comportent "bien" quand on permute leurs variables. Ce que nous entendons par "bien", c'est :

8.1. DEFINITION : Une application k-linéaire $\gamma : E^k \to F$ (où E,F sont des K-espaces vectoriels) est dite alternée ssi $\gamma(x_1,\dots,x_k) = 0$ à chaque fois qu'il existe deux indices i et j, $1 \le i \le k$, $1 \le j \le k$, $i \ne j$, tels que $x_i = x_j$.

Un classique calcul combinatoire prouve la

8.2. <u>PROPOSITION</u> : Si γ est alternée, alors pour toute permutation σ de $\{1,\dots,k\}$:

$$\gamma(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(k)}) = \varepsilon_\sigma \, \gamma(x_1,\dots,x_k)$$

où ε_σ est la signature de σ.

On procède alors à la construction d'une algèbre adaptée à cette nouvelle situation.

8.3. <u>DEFINITION</u> : On appelle <u>$k^{\text{ème}}$</u> <u>puissance extérieure</u> d'un espace vectoriel E le quotient de $T^k(E)$ par le sous-espace engendré par les éléments de la forme $x_1 \otimes \dots \otimes x_k$ où il existe deux indices i,j, $i \neq j$ avec $x_i = x_j$.

On la note $\Lambda^k(E)$.

L'image de $x_1 \otimes \dots \otimes x_k$ par l'épimorphisme canonique $T^k(E) \to \Lambda^k(E)$ se note $x_1 \wedge \dots \wedge x_k$.

8.4. <u>REMARQUE</u> : Par définition, $x_1 \wedge \dots \wedge x_k = 0$ si $x_i = x_j$ pour deux indices différents.

Comme prévisible, $\Lambda^k(E)$ est solution d'un problème universel :

8.5. <u>THEOREME</u> : Etant donné deux espaces vectoriels E,F et une application k-linéaire alternée $\delta : E^k \to F$, il existe une unique application <u>linéaire</u> $\delta : \Lambda^k(E) \to F$ qui rende commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
E^k \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d] & F \\
\Lambda^k(E) \arrow[ur, "\delta"'] &
\end{tikzcd}$$

où la flèche verticale représente la composée de l'application k-linéaire $E^k \to T^k(E)$ définie au §3 (cf. 3.3. et 3.4.) et de l'épimorphisme canonique $\pi : T^k(E) \to \Lambda^k(E)$.

Démonstration :

i) Si δ est une solution, $\delta \circ \pi$ est une solution du problème universel relatif à $T^k(E)$, et donc est déterminée de manière unique : alors δ est déterminée de manière unique parce que π est surjective.

ii) Réciproquement, soit $\omega : T^k(E) \to F$ l'application déduite de γ conformément au §3. Le fait que γ soit alternée garantit que $\omega(\mathrm{Ker}\ \pi) = 0$: donc ω se factorise en δ. □

8.6. DEFINITION : Pour tout K-espace vectoriel E, on pose

i) $\Lambda^0(E) = K$

ii) $\Lambda^1(E) = E$

iii) $\Lambda(E) = \bigoplus_{k \in K} \Lambda^k(E)$.

8.7. THEOREME : On peut munir $\Lambda(E)$ d'une structure d'algèbre graduée grâce à un produit défini au moyen d'applications bilinéaires $\Lambda^n(E) \times \Lambda^p(E) \to \Lambda^{n+p}(E)$ qui envoient $(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n,\ y_1 \wedge \ldots \wedge y_p)$ sur $(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \wedge y_1 \wedge \ldots \wedge y_p)$.

Cette algèbre est l'algèbre extérieure de E.

Démonstration : Notons $\beta_{n,p} : T^n(E) \times T^p(E) \to T^{n+p}(E)$ l'application bilinéaire qui induit l'isomorphisme $T^n(E) \otimes T^p(E) \cong T^{n+p}(E)$ (cf. 7.2.). On considère le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
E^n \times E^p \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "j_n \times j_p"'] & E^{n+p} \arrow[d, "j_{n+p}"] \\
T^n(E) \times T^p(E) \arrow[r, "\beta_{n,p}"] \arrow[d, "\pi_n \times \pi_p"'] & T^{n+p}(E) \arrow[d, "\pi_{n+p}"] \\
\Lambda^n(E) \times \Lambda^p(E) \arrow[r, dashed] & \Lambda^{n+p}(E)
\end{tikzcd}$$

Etant donné que $\pi_{n+p} \circ j_{n+p} \circ \cong$ est alternée par rapport à ses n premiers et à ses p derniers arguments (en fait elle est alternée par rapport à tous ses arguments !), $\pi_{n+p} \circ \beta_{n,p}$ se factorise à travers $\pi_n \times \pi_p$ en l'application bilinéaire annoncée. La vérification des propriétés formelles est immédiate. □

8.8. <u>REMARQUE</u> : L'algèbre $\Lambda(E)$ est <u>anticommutative</u> : si $x \in \Lambda^n(E)$, $y \in \Lambda^p(E)$, alors, dans $\Lambda^{n+p}(E)$:

$$x \wedge y = (-1)^{np}\, y \wedge x .$$

La construction de $\Lambda(E)$ en fait la solution de la propriété universelle suivante :

8.9. <u>THEOREME</u> : Etant donné une algèbre A et une application linéaire $\phi : E \to A$ telle que, pour tout $x \in E$, $(\phi(x))^2 = 0$, il existe un unique homomorphisme d'algèbres $\theta : \Lambda(E) \to A$ qui rende le diagramme suivant commutatif

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, hook] & A \\ \Lambda(E) \arrow[ur, "\theta"'] & \end{tikzcd}$$

<u>Démonstration</u> :

i) Pour des raisons analogues à 7.4. (i), le seul candidat possible est défini par $\theta(x_1 \wedge \ldots \wedge x_k) = \phi(x_1) \ldots \phi(x_k)$.

ii) Pour vérifier que cette définition convient, on part du λ de 7.4. . Il suffit de montrer que λ s'annule sur $\mathrm{Ker}(T(E) \to \Lambda(E))$, autrement dit que $\phi(x_1) \ldots \phi(x_k) = 0$ chaque fois qu'il existe i,j, $i \neq j$ tels que $x_i = x_j$. Or, pour $x,y \in E$,
$\phi(x)\,\phi(y) + \phi(y)\,\phi(x) = \phi(x+y)^2 - \phi(x)^2 - \phi(y)^2 = 0$, donc
$\phi(x_1) \ldots \phi(x_i) \ldots \phi(x_j) \ldots \phi(x_k) = \pm\, \phi(x_1) \ldots \phi(x_i)^2 \ldots \widehat{\phi(x_j)} \ldots \phi(x_k) = 0$ si $x_i = x_j$
(la notation $\widehat{\phi(x_j)}$ signifie que $\phi(x_j)$ est omis du produit). □

En cherchant à calculer l'algèbre extérieure d'une somme directe, nous nous apercevrons qu'une structure d'algèbre sur le produit tensoriel de deux algèbres est nécessaire. Dans le cas non-gradué, cela se fait naturellement :

8.10. <u>THEOREME</u> : Si A et B sont deux algèbres, $A \otimes B$ est une algèbre avec un produit défini par $(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$ (où $a,a' \in A$, $b,b' \in B$).

<u>Démonstration</u> : On part de l'application

$$A \times B \times A \times B \xrightarrow{\mathrm{Id}_A \times \tau \times \mathrm{Id}_B} A \times A \times B \times B \xrightarrow{\mu_A \times \mu_B} A \times B \xrightarrow{j} A \otimes B$$

où τ est l'"échange" et μ_A (resp. μ_B) le produit dans A (resp. B). □

On peut bien sûr étendre tel quel ce produit au cas gradué, mais la condition sur la signature en 8.2. nous avertit d'être plus prudents.

8.11. THEOREME : Soit A et B deux algèbres graduées. On peut faire de $A \otimes B$ une algèbre de deux manières : pour $a \in A_n$, $b \in B_p$, $a' \in A_q$, $b' \in B_r$, on peut poser

i) ou bien $(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$

ii) ou bien $(a \otimes b)(a' \otimes b') = (-1)^{pq}\, aa' \otimes bb'$.

Pour distinguer les deux cas, on garde la notation $A \otimes B$ pour le premier et on note le second $A \hat{\otimes} B$.

Démonstration : Pour (ii), remplacer l'"échange" ordinaire par l'"échange avec signe" : $\tau'(b,a) = (-1)^{pq}\,(a,b)$ si $a \in A_q$, $b \in B_p$. □

On peut alors passer au calcul de l'algèbre extérieure d'une somme directe :

8.12. THEOREME : Si E,F sont deux espaces vectoriels, il existe un isomorphisme canonique d'algèbres graduées

$$\Lambda(E \oplus F) \cong \Lambda(E) \hat{\otimes} \Lambda(F) .$$

En particulier, pour tout entier k,

$$\Lambda^k(E \oplus F) \cong \bigoplus_{i+j=k} \Lambda^i(E) \otimes \Lambda^j(F)$$

en tant qu'espaces vectoriels.

Démonstration :

i) L'application $\phi : E \oplus F \to \Lambda(E) \hat{\otimes} \Lambda(F) : (x,y) \mapsto x \otimes 1 + 1 \otimes y$ est linéaire et

$$\begin{aligned}\phi(x,y)^2 &= (x \otimes 1)^2 + (x \otimes 1)(1 \otimes y) + (1 \otimes y)(x \otimes 1) + (1 \otimes y)^2 \\ &= x^2 \otimes 1 + x \otimes y - x \otimes y + 1 \otimes y^2 = 0.\end{aligned}$$

De là un unique homomorphisme d'algèbres $\theta : \Lambda(E \oplus F) \to \Lambda(E) \hat{\otimes} \Lambda(F)$ d'après 8.9. .

ii) Réciproquement, les monomorphismes canoniques $\varepsilon : E \to E \oplus F$, $\eta : F \to E \oplus F$ induisent des homomorphismes d'algèbres $\bar{\varepsilon} : \Lambda(E) \to \Lambda(E \oplus F)$, $\bar{\eta} : \Lambda(F) \to \Lambda(E \oplus F)$ qui envoient respectivement $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \in \Lambda^n(E)$ sur $(x_1,0) \wedge \ldots \wedge (x_n,0) \in \Lambda^n(E \oplus F)$ et $y_1 \wedge \ldots \wedge y_p \in \Lambda^p(F)$ sur $(0,y_1) \wedge \ldots \wedge (0,y_p) \in \Lambda^p(E \oplus F)$. On pose $\psi_{n,p} : \Lambda^n(E) \otimes \Lambda^p(F) \to \Lambda^{n+p}(E \oplus F) : a \otimes b \mapsto \bar{\varepsilon}(a)\,\bar{\eta}(b)$; on vérifie que les $\psi_{n,p}$ définissent un homomorphisme d'algèbres $\psi : \Lambda(E) \hat{\otimes} \Lambda(F) \to \Lambda(E \oplus F)$ et que θ et ψ sont inverses l'un de l'autre. □

Il s'en déduit le résultat suivant dont on fera un usage intensif au prochain chapitre :

8.13. <u>THEOREME</u> : Soit E un espace vectoriel de dimension finie n muni d'une base $\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\}$. Si k est un entier, $1 \le k \le n$, $\Lambda^k(E)$ est de dimension $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ et a une base formée des produits $\varepsilon_{i_1} \wedge \varepsilon_{i_2} \wedge \ldots \wedge \varepsilon_{i_k}$ tels que $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$. Si k est un entier, $k > n$, $\Lambda^k(E) = \{0\}$.

<u>Démonstration</u> : De 8.12. il découle que, en tant qu'algèbres graduées, $\Lambda(E) \cong \Lambda(K\varepsilon_1) \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} \Lambda(K\varepsilon_n)$. Or $T^p(K\varepsilon_i)$ admet pour base le singleton $\{\varepsilon_i \otimes \ldots \otimes \varepsilon_i\}$ (p facteurs) ; donc $\Lambda^p(K\varepsilon_i) = \{0\}$ si $p \ge 2$ et $\Lambda(K\varepsilon_i) = \Lambda^0(K\varepsilon_i) \oplus \Lambda^1(K\varepsilon_i) \cong K \oplus K\varepsilon_i$ avec pour base $\{1,\varepsilon_i\}$ (1 en degré 0, ε_i en degré 1).

Dans ces conditions $[\Lambda(K\varepsilon_1) \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} \Lambda(K\varepsilon_n)]_k$ possède une base formée des éléments $\varepsilon_1^{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes \varepsilon_n^{\alpha_n}$, $\alpha_i = 0$ ou 1, où exactement k des α_i's sont égaux à 1 (et, bien sûr, $\varepsilon_i^0 = 1$) : d'où la dimension pour $k \le n$ et la nullité pour $k > n$.

De plus (cf. 8.12.(i)), l'image de $\varepsilon_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varepsilon_{i_k}$ par l'isomorphisme est précisément $\varepsilon_1^{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes \varepsilon_n^{\alpha_n}$ où $\alpha_{i_1} = \ldots = \alpha_{i_k} = 1$, $\alpha_i = 0$ pour tous les autres indices. □

Enfin, comme dans le cas de l'algèbre tensorielle, une application linéaire induit un homomorphisme entre les algèbres extérieures :

Soit E,F deux espaces vectoriels, $f : E \to F$ une application linéaire. Pour tout entier $k \ge 1$, on définit $\Lambda^k(f) : \Lambda^k(E) \to \Lambda^k(F)$ en posant

$$\Lambda^k(f)(x_1 \wedge \ldots \wedge x_k) = f(x_1) \wedge \ldots \wedge f(x_k) \ .$$

8.14. THEOREME : Ces applications sont linéaires et leur somme directe définit l'unique homomorphisme d'algèbres qui rende commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & F \arrow[d, hook] \\ \Lambda(E) \arrow[r, "\Lambda(f)"] & \Lambda(F) \end{tikzcd} .$$

Démonstration : Immédiate (ici $f(x)^2 = f(x) \wedge f(x) = 0$.) □

9. PUISSANCES SYMÉTRIQUES. ALGÈBRE SYMÉTRIQUE.

On aurait pu penser que parmi les applications k-linéaires, il y en a qui se comportent "encore mieux" que les applications alternées : les applications k-linéaires symétriques. En réalité, de notre point de vue, elles se comportent seulement "presque aussi bien", mais nous leur consacrerons quand même ce paragraphe. Toutefois nous omettrons les démonstrations, qui peuvent s'adapter presque mécaniquement du paragraphe précédent.

9.1. DEFINITION : Une application k-linéaire $\chi : E^k \to F$ est dite symétrique ssi, pour tout $(x_1,\dots,x_k) \in E^k$ et toute permutation σ, $\chi(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(k)}) = \chi(x_1,\dots,x_k)$.

9.2. DEFINITION : La $k^{\text{ème}}$ puissance symétrique d'un espace vectoriel E est le quotient de $T^k(E)$ par le sous-espace engendré par tous les éléments de la forme $x_1 \otimes\dots\otimes x_k - x_{\sigma(1)} \otimes\dots\otimes x_{\sigma(k)}$ où σ parcourt l'ensemble des permutations de $\{1,\dots,k\}$.

Elle se note $S^k(E)$.

9.3. THEOREME : Etant donné un espace vectoriel F et une application k-linéaire symétrique $\chi : E^k \to F$, il existe une unique application linéaire $\psi : S^k(E) \to F$ telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} E^k \arrow[r, "\chi"] \arrow[d] & F \\ S^k(E) \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

9.4. DEFINITION : Pour tout K-espace vectoriel E, on pose

i) $S^0(E) = K$

ii) $S^1(E) = E$

iii) $S(E) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} S^k(E)$.

9.5. THEOREME : Le produit de T(E) induit sur S(E) une structure d'algèbre graduée commutative, qu'on appelle l'algèbre symétrique de E.

Etant donné une algèbre commutative C et une application linéaire $\phi : E \to C$, il existe un unique homomorphisme d'algèbres $\zeta : S(E) \to C$ qui rende commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, hook] & C \\ S(E) \arrow[ur, "\zeta"'] & \end{tikzcd}$$

9.6. THEOREME : Etant donné deux espaces vectoriels E,F, il y a un isomorphisme canonique d'algèbres graduées $S(E \oplus F) \cong S(E) \otimes S(F)$.

9.7. THEOREME : Si E est de dimension finie n, avec $\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\}$ pour base, S(E) est isomorphe à l'algèbre polynomiale $K[X_1,\dots,X_n]$ en prenant pour "inclusion" $E \hookrightarrow K[X_1,\dots,X_n]$ l'application qui envoie ε_i sur X_i (cf. 7.3).

10. DUALITÉ.

Ce paragraphe ne s'applique qu'au cas de la dimension finie.

On rappelle que, étant donné un K-espace vectoriel de dimension n et une base $\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\}$ de E, la base duale est la base $\{\varepsilon_1^*,\dots,\varepsilon_n^*\}$ de $E^* = \mathscr{L}(E,K)$ définie par $\langle\varepsilon_i^*,\varepsilon_j\rangle = \varepsilon_i^*(\varepsilon_j) = \delta_{ij}$ pour tous $i,j \in \{1,\dots,n\}$, où δ_{ij} est le symbole de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, 0 si $i \neq j$).

10.1. THEOREME : Soit E,F deux espaces vectoriels (de dimension finie). L'application

$$\lambda : E^* \otimes F \to \mathcal{L}(E,F) : u \otimes y \mapsto (x \mapsto \langle u,x\rangle y)$$

est un isomorphisme.

<u>Démonstration</u> : Les deux espaces $E^* \otimes F$ et $\mathcal{L}(E,F)$ ont la même dimension. De plus, si $\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\}$ est une base de E et $\{\eta_1,\dots,\eta_p\}$ une base de F, $\mathcal{L}(E,F)$ a une base dont les éléments sont les applications ϕ_{ij} telles que $\phi_{ij}(\varepsilon_k) = \eta_j$ si $k = i$, 0 si $k \neq i$. Il est clair que $\phi_{ij} = \lambda(\varepsilon_i^* \otimes \eta_j)$. □

10.2. <u>COROLLAIRE</u> : Sous les mêmes hypothèses, $E^* \otimes F^* \cong (E \otimes F)^*$.

<u>Démonstration</u> :

$$E^* \otimes F^* \cong \mathcal{L}(E,F^*) = \mathcal{L}(E,\mathcal{L}(F,K)) \cong \mathcal{B}(E\,,F\,;K) \cong \mathcal{L}(E\otimes F\,,K) = (E\otimes F)^* \,. \quad \square$$

10.3. <u>THEOREME</u> : Etant donné un espace vectoriel (de dimension finie) E, il y a pour tout entier k un isomorphisme naturel $\Lambda^k(E^*) \cong \Lambda^k(E)^*$ induit par une application bilinéaire (où l'on note Dét le déterminant) :

$$\Lambda^k(E^*) \times \Lambda^k(E) \to K : (u_1\wedge\dots\wedge u_k, x_1\wedge\dots\wedge x_k) \mapsto \operatorname*{Dét}_{\substack{1\le i\le k\\ 1\le j\le k}} (\langle u_i,x_j\rangle).$$

<u>Démonstration</u> : L'application $(E^*)^k \times E^k \to K : (u_1,\dots,u_k,x_1,\dots,x_k) \mapsto \operatorname*{Dét}_{\substack{1\le i\le k\\ 1\le j\le k}} (\langle u_i,x_j\rangle)$ est 2k-linéaire et alternée par rapport aux u_i's et par rapport aux x_j's : d'où l'application bilinéaire annoncée.

Soit alors $\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\}$ une base de E. Les éléments $\varepsilon_{i_1}\wedge\dots\wedge\varepsilon_{i_k}$, $1 \le i_1 <\dots< i_k \le n$, forment une base de $\Lambda^k(E)$ (cf. 8.13). L'élément $(\varepsilon_{i_1}\wedge\dots\wedge\varepsilon_{i_k})^*$ de la base duale envoie par définition $\varepsilon_{j_1}\wedge\dots\wedge\varepsilon_{j_k}$ sur 1 ssi, pour tout r, $i_r = j_r$, sur 0 autrement.

Par ailleurs, étant donné deux suites $1 \le i_1 <\dots< i_k \le n$, $1 \le j_1 <\dots< j_k \le n$, $\operatorname*{Dét}_{\substack{1\le p\le k\\ 1\le q\le k}} (\langle \varepsilon_{i_p}^*, \varepsilon_{j_q}\rangle)$ est nul, sauf si $(j_1,\dots,j_k)$ est une permutation de $(i_1,\dots,i_k)$.

l'unique possibilité étant $i_1 = j_1, \ldots, i_k = j_k$, et dans ce cas

$\underset{\substack{1\le p\le k\\ 1\le q\le k}}{\mathrm{D\acute{e}t}}\,(\langle\varepsilon_{i_p},\varepsilon_{i_q}\rangle) = 1$. Autrement dit l'application

$\Lambda^k(E^*) \to \Lambda^k(E)^* : u_1 \wedge \ldots \wedge u_k \mapsto (x_1 \wedge \ldots \wedge x_k \mapsto \underset{\substack{1\le i\le k\\ 1\le j\le k}}{\mathrm{D\acute{e}t}}\,(\langle u_i, x_j\rangle))$ déduite de l'application bilinéaire de l'énoncé envoie $\varepsilon^*_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varepsilon^*_{i_k}$ sur $(\varepsilon_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varepsilon_{i_k})^*$: elle envoie base sur base, c'est un isomorphisme. □

11. MODULES.

Si l'on remplace l'espace vectoriel E sur un corps K par un module M sur un anneau commutatif A (cf. 2.7), les constructions "universelles" des paragraphes 7, 8, 9 peuvent toujours se faire : on obtient successivement

l'algèbre tensorielle T(M)

les puissances extérieures $\Lambda^k(M)$ et l'algèbre extérieure $\Lambda(M)$,

les puissances symétriques $S^k(M)$ et l'algèbre symétrique $S(M)$.

Si M est un module libre de type fini, le Théorème 8.13 donnant des bases de $\Lambda^k(M)$ reste vrai.