

CHAPITRE V

CALCUL DE LA COHOMOLOGIE

1. PRELIMINAIRES ALGEBRIQUES.

En premier lieu, certaines des propriétés structurales de $\Omega^*(M)$ établies au chapitre précédent sont systématisées et des conséquences fondamentales en sont déduites de façon purement algébrique.

1.1. DEFINITION : On appelle complexe la donnée d'une famille $C = \{C_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ de groupes abéliens et d'une famille $d = \{d_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ d'homomorphismes où $d_k : C_k \rightarrow C_{k-1}$ et où, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $d_k \circ d_{k-1} = 0$.

Noter que dans le cas de $\Omega^*(M)$ on a $C_k = \{0\}$ si $k < 0$, tandis que, bien entendu, $C_k = \Omega^k(M)$ pour $k \geq 0$ et $d_k = d|_{\Omega^k(M)}$.

1.2. DEFINITION : Un morphisme de complexes $f : (C, d) \rightarrow (C', d')$ est une famille d'homomorphismes de groupes $f_k : C_k \rightarrow C'_k$ tels que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 C_k & \xrightarrow{f_k} & C'_k \\
 d_k \downarrow & & \downarrow d'_k \\
 C_{k+1} & \xrightarrow{f_{k+1}} & C'_{k+1}
 \end{array}$$

La construction de la cohomologie faite au chapitre précédent est en fait une opération algébrique réalisable pour tout complexe.

1.3. DEFINITIONS : Le sous-groupe $\text{Ker } d_k$ se note Z_k ; ses éléments s'appellent des cycles.

Le sous-groupe $\text{Im } d_{k-1}$ se note B_k ; ses éléments s'appellent des bords. La propriété $d_k \circ d_{k-1} = 0$ entraîne alors $B_k \subset Z_k$. Le quotient $H^k = Z_k/B_k$ est le $k^{\text{ème}}$ groupe de cohomologie du complexe.

Grâce à 1.2 tout morphisme de complexes $f : C \rightarrow C'$ envoie cycles sur cycles et bords sur bords et induit donc une unique famille d'homomorphismes de groupes $f^k : H^k(C) \rightarrow H^k(C')$.

1.4. REMARQUE : Dans le cas de la cohomologie de De Rham, les morphismes de complexes sont eux-mêmes induits par des applications de classe C^∞ entre variétés, c'est ce qui produit le changement du sens des flèches : à $f : M \rightarrow N$ est associée $f^* : \Omega^*(N) \rightarrow \Omega^*(M)$ d'où $f^* : H^*(N) \rightarrow H^*(M)$. (Et pour achever de noyer le poisson la même notation sert pour les morphismes de complexes et leurs classes de cohomologie).

Pour continuer la systématisation, introduisons la

1.5. DEFINITION : Une suite exacte (courte) de complexes $0 \rightarrow C' \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} C'' \rightarrow 0$ consiste en des complexes C, C', C'' et des morphismes f, g tels que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ la suite $0 \rightarrow C'_k \xrightarrow{f_k} C_k \xrightarrow{g_k} C''_k \rightarrow 0$ soit exacte.

1.6. REMARQUE : Il est clair que le diagramme suivant, où M est une variété différentiable et U, V des ouverts de M tels que $U \cup V = M$, est commutatif, puisque d commute aux restrictions :

$$\begin{array}{ccccc}
 \Omega^k(M) & \xrightarrow{f} & \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) & \xrightarrow{g} & \Omega^k(U \cap V) \\
 \downarrow d & & \downarrow d \circ d & & \downarrow d \\
 \Omega^{k+1}(M) & \xrightarrow{f} & \Omega^{k+1}(U) \oplus \Omega^{k+1}(V) & \xrightarrow{g} & \Omega^{k+1}(U \cap V) .
 \end{array}$$

Les morphismes f et g définissent donc bien, d'après IV.5.14, une suite exacte de complexes

$$0 \rightarrow \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \rightarrow \Omega^*(U \cap V) \rightarrow 0 .$$

Le premier résultat fondamental de l'algèbre homologique est le

1.7. THEOREME : Une suite exacte courte de complexes $0 \rightarrow C' \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} C'' \rightarrow 0$ induit une suite exacte infinie de groupes abéliens

$$\dots \xrightarrow{\partial} H^k(C') \xrightarrow{f^*} H^k(C) \xrightarrow{g^*} H^k(C'') \xrightarrow{\partial} H^{k+1}(C') \xrightarrow{f^*} H^{k+1}(C) \xrightarrow{g^*} \dots$$

où ∂ , l'opérateur-bord de la suite, est un homomorphisme de groupes défini canoniquement ci-dessous.

Démonstration :

(i) Définition de ∂ : $H^k(C'') \rightarrow H^{k+1}(C')$.

On considère le diagramme suivant, qui est commutatif, dont les lignes sont exactes, et où la composée de deux flèches verticales est toujours nulle :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & C_{k-1} & \xrightarrow{g_{k-1}} & C''_{k-1} & \longrightarrow 0 \\
 & & & \downarrow d & & \downarrow d'' & \\
 0 & \longrightarrow & C'_k & \xrightarrow{f_k} & C_k & \xrightarrow{g_k} & C''_k \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow d' & & \downarrow d & & \downarrow d'' \\
 0 & \longrightarrow & C'_{k+1} & \xrightarrow{f_{k+1}} & C_{k+1} & \xrightarrow{g_{k+1}} & C''_{k+1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow d' & & \downarrow d & & \\
 0 & \longrightarrow & C'_{k+2} & \xrightarrow{f_{k+2}} & C_{k+2} & &
 \end{array}$$

a) On commence par définir $\lambda : Z_k(C'') \rightarrow H^{k+1}(C')$ en suivant la recette que voici :

(1) prendre $\xi'' \in Z_k(C'')$ et choisir $\xi \in C_k$ tel que $g_k(\xi) = \xi''$; on a donc $d\xi \in \text{Ker } g_{k+1}$, de sorte qu'il existe un (forcément unique) $\eta' \in C'_{k+1}$ tel que $f_{k+1}(\eta') = d\xi$;

(2) observer que $\eta' \in Z_{k+1}(C')$ puisque $f_{k+2} \circ d'(\eta') = d \circ d(\xi)$ et que f_{k+2} est injective ;

(3) se convaincre que, bien que η' ne soit pas indépendant du choix de ξ parmi les antécédents de ξ'' , sa classe y' modulo $B_{k+1}(C')$ l'est (en effet, si $g_k(\xi) = 0$, soit $\xi' \in C'_k$ tel que $f_k(\xi') = \xi$: alors, par injectivité de f_{k+1} , $\eta' = d'(\xi') \in B_{k+1}(C')$).

On dispose alors au moins d'une fonction $\lambda : Z_k(C'') \rightarrow H^{k+1}(C') : \xi'' \mapsto y'$.

b) Qu'il s'agisse en fait d'un homomorphisme de groupes vient de ce que, si ξ (resp. ξ_1) est un antécédent quelconque de ξ'' (resp. ξ''_1), $\xi + \xi_1$ fait parfaitement l'affaire comme antécédent de $\xi'' + \xi''_1$.

c) Enfin, supposons que $\xi'' \in B_k(C'')$ et prenons $\theta'' \in C''_{k-1}$ tel que $\xi'' = d''(\theta'')$. Si $\theta \in C_{k-1}$ vérifie $g_{k-1}(\theta) = \theta''$, $\xi = d\theta$ est un antécédent de ξ'' , d'où il résulte que $d\xi$, et donc η' , et donc y' , sont nuls. Cela garantit le passage au quotient de λ , et définit $\vartheta : H^k(C'') \rightarrow H^{k+1}(C')$ par $\vartheta(x'') = y'$ (notant x'' la classe de ξ'' modulo $B_k(C'')$).

(ii) Exactitude en $H^k(C)$.

Soit $x' \in H^k(C')$ et $\xi' \in Z_k(C')$ avec $\xi' \in x'$. Par définition, $f^k(x')$ est la classe de $f_k(\xi')$, et $g^k \circ f^k(x') = g_k \circ f_k(\xi') = 0$.

Pour la réciproque, deux observations :

- à cause de 1.2. et de l'injectivité de f_{k+1} , si $\xi' \in C'_k$ a pour image par f_k un cycle, ξ' est un cycle (déjà utilisé dans (i) a)(2)) ;

- à cause de 1.2. et de la surjectivité de g_{k-1} , on peut choisir pour tout $\xi'' \in B_k(C'')$ un antécédent qui soit lui-même un bord (il existe $v \in B_k(C)$ tel que $g_k(v) = \xi''$).

Soit alors $x \in H^k(C)$ tel que $g^k(x) = 0$. Autrement dit, si $\xi \in x$, $g_k(\xi) \in B_k(C'')$. On prend $v \in B_k(C)$ tel que $g_k(v) = g_k(\xi)$: par exactitude de la suite de complexes

donnée en C_k , il existe un unique $\xi' \in C'_k$ tel que $f_k(\xi') = \xi - v$; ce ξ' est dans $Z_k(C')$ puisque $\xi - v \in Z_k(C)$. Si on note $x' \in H^k(C')$ la classe de ξ' , $f^k(x')$ est la classe de $\xi - v$, donc de ξ , donc c'est x .

(iii) Exactitude en $H^k(C'')$.

Soit $x \in H^k(C)$, $\xi \in x \in Z_k(C)$; ainsi $\partial \circ g^k(x) = \lambda \circ g_k(\xi)$. Comme antécédent de $g_k(\xi)$ il serait déraisonnable de prendre autre chose que ξ . Mais alors, avec les notations de (i), $d\xi$, donc η' , donc $y' = \lambda \circ g_k(\xi)$ sont nuls.

Réciproquement, soit $x'' \in H^k(C'')$ tel que $\partial(x'') = 0$; autrement dit (avec les notations de (i)) $\xi'' \in Z_k(C'')$ tel que $\eta' \in B_{k+1}(C')$. On prend $\xi' \in C'_k$ tel que $\eta' = d'(\xi')$; alors $\xi_1 = \xi - f_k(\xi') \in Z_k(C)$ et $g_k(\xi_1) = \xi''$, c'est-à-dire que $x'' = g^k(x_1)$ en notant x_1 la classe de ξ_1 .

(iv) Exactitude en $H^{k+1}(C')$.

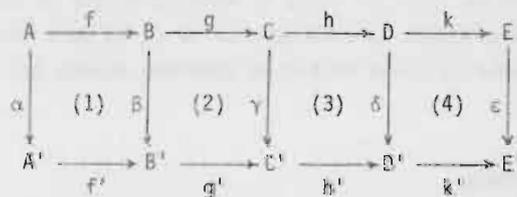
Soit $x'' \in H^{k+1}(C'')$, $\xi'' \in x'' \in Z_{k+1}(C'')$; $f^{k+1} \circ \partial(x'')$ est la classe de $f_{k+1}(\eta')$ qui est un bord par définition.

Soit $x' \in H^{k+1}(C')$ tel que $f^{k+1}(x') = 0$, ou $\xi' \in Z_{k+1}(C')$ tel qu'il existe un $\xi \in C_k$ avec $f_{k+1}(\xi') = d\xi$. On note x'' la classe de $g_k(\xi)$; par définition de ∂ , $x' = \partial(x'')$. \square

Il est indispensable de signaler aussi un résultat classique très utile en particulier dans les raisonnements par récurrence issus de 1.7 :

1.8. THEOREME (Lemme des Cinq) :

Si dans le diagramme suivant



formé de groupes abéliens et d'homomorphismes de groupes.

- les carrés (1) à (4) sont commutatifs
- les lignes horizontales sont des suites exactes
- les flèches $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon$ sont des isomorphismes,

alors γ est un isomorphisme.

Démonstration :

(i) On montre d'abord que, si α est surjective, β et δ injectives, alors γ est injective. Soit $c \in C$ tel que $\gamma(c) = 0$. Par commutativité de (3), $h(c) \in \text{Ker } \delta$, donc, δ étant injective, $h(c) = 0$: de là l'existence d'un $b \in B$ tel que $g(b) = c$. Il suffit alors de trouver un $a \in A$ tel que $f(a) = b$. Or, par commutativité de (2), $\beta(b) \in \text{Ker } g'$, d'où un $a' \in A'$ tel que $f'(a') = \beta(b)$. La surjectivité de α fournit (au moins) un $a \in A$ tel que $\alpha(a) = a'$, et la commutativité de (1), alliée à l'injectivité de β garantit que $f(a) = b$.

(ii) On montre ensuite que, si β et δ sont surjectives, ε injective, alors γ est surjective. Soit $c' \in C'$: $h'(c')$ possède un antécédent $d \in D$ par δ , qui est surjective. Par commutativité de (4) et injectivité de ε , ce d est un élément de $\text{Ker } k$, d'où un $c \in C$ tel que $h(c) = d$. Certes en général $\gamma(c) \neq c'$, mais il suffit désormais de trouver un antécédent à $c' - \gamma(c)$. Or $c' - \gamma(c) \in \text{Ker } h'$ par commutativité de (3) ; il existe donc un $b' \in B'$ tel que $g'(b') = c' - \gamma(c)$. Un antécédent $b \in B$ de b' par β , qui est surjective, vérifie alors, par commutativité de (2), $\gamma \circ g(b) = c' - \gamma(c)$, ou encore $c' = \gamma(g(b) + c)$. \square

1.9. REMARQUE : On voit qu'il n'est pas nécessaire de supposer α injective ni ε surjective. Toutefois le cas le plus fréquent d'utilisation du Lemme des Cinq est son application répétée de degré en degré dans un diagramme infini engendré via 1.7 par un morphisme de suites exactes courtes (le §3 va fournir un exemple typique) : les flèches verticales proviennent de trois en trois du même morphisme de complexes et la même flèche jouera donc successivement le rôle de α et de δ , ou de ε et de β . Autant vaut dans ces conditions retenir la forme faible du théorème donnée ici...

2. SUITE EXACTE DE MAYER-VIETORIS.

Ce résultat, conséquence immédiate des considérations algébriques qui précèdent, est d'application générale. On en donnera ici un exemple fondamental : le calcul de la cohomologie des sphères.

2.1. **THEOREME** : Si une variété différentiable M est réunion de deux ouverts U et V , on a une suite exacte infinie, dite de Mayer-Vietoris :

$$\longrightarrow H^k(U) \oplus H^k(V) \longrightarrow H^k(U \cap V) \xrightarrow{\partial} H^{k+1}(U \cup V) \longrightarrow H^{k+1}(U) \oplus H^{k+1}(V) \longrightarrow H^{k+1}(U \cap V) \longrightarrow$$

Démonstration : On a rappelé en 1.6 l'existence de la suite exacte de complexes

$$0 \longrightarrow \Omega^*(M) \longrightarrow \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \longrightarrow \Omega^*(U \cap V) \longrightarrow 0 .$$

Il suffit donc d'appliquer le Théorème 1.7, en observant que les sommes directes passent à la cohomologie. \square

2.2. **REMARQUE IMPORTANTE** : Dans ce cas précis, le bord ∂ de la suite exacte s'explique assez facilement. En effet, la surjectivité du morphisme $\Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \rightarrow \Omega^k(U \cap V)$ a été démontrée au chapitre précédent (cf. IV.5.14) à l'aide d'une partition de l'unité (α_U, α_V) associée au recouvrement $\{U, V\}$: tout $\omega'' \in Z_k(U \cap V)$ a pour antécédent $\omega = (\alpha_U \omega'', -\alpha_V \omega'')$; la construction de ∂ établie en 1.7 (i) revient alors à considérer successivement $d\omega = (d(\alpha_U \omega''), d(-\alpha_V \omega'')) = (\omega_U, \omega_V)$ où $\omega_U|_{U \cap V} = \omega_V|_{U \cap V}$ puis l'unique $\omega' \in \Omega^{k+1}(U \cup V)$ telle que $\omega'|_U = \omega_U$ et $\omega'|_V = \omega_V$; en passant aux classes de cohomologie : $\partial([\omega'']) = [\omega']$ défini par $\omega'|_U = d(\alpha_U \omega'')$ et $\omega'|_V = -d(\alpha_V \omega'')$.

On déduit immédiatement le résultat annoncé sur la cohomologie des sphères :

2.3. **THEOREME** : Pour tout entier n non nul,

$$H^0(S^n) \cong H^n(S^n) \cong \mathbb{R} ,$$

$$H^k(S^n) = 0 \text{ si } k \neq 0 \text{ et } k \neq n .$$

Démonstration : Par récurrence sur n .

(1) $n = 1$

On introduit les classiques ouverts

$$U = \{(x, y) \in S^1 \mid y \neq -1\}$$

et

$$V = \{(x, y) \in S^1 \mid y \neq 1\}$$

Donc $H^0(U) \cong H^0(V) \cong \mathbb{R}$ et $H^k(U) = H^k(V) = 0$ pour $k > 0$, puisque U et V sont

homéomorphes à \mathbb{R} (et même difféomorphes, mais peu importe d'après IV.3.8). Par ailleurs, le cercle S^1 étant connexe, $H^0(U \cup V) \cong \mathbb{R}$. Enfin, $U \cap V$ a deux composantes connexes, toutes deux homéomorphes à \mathbb{R} , d'où $H^0(U \cap V) \cong \mathbb{R}^2$ et $H^k(U \cap V) = 0$ pour $k > 0$. Le début de la partie non nulle de la suite exacte de Mayer-Vietoris s'écrit alors

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(U \cup V) & \longrightarrow & H^0(U) \oplus H^0(V) & \longrightarrow & H^0(U \cap V) & \longrightarrow & H^1(U \cup V) & \longrightarrow & H^1(U) \oplus H^1(V) & \longrightarrow & \dots \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \xrightarrow{\beta} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\partial} & ? & \longrightarrow & 0 \oplus 0 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

On y trouve que $\text{Ker } \beta = \text{Im } \alpha \cong \mathbb{R}$, d'où $\text{Ker } \partial = \text{Im } \beta \cong \mathbb{R}$. Il en résulte que $H^1(S^1) = H^1(U \cup V) \cong \mathbb{R}$ par surjectivité de ∂ . (N.B. Les flèches α et β sont définies, comme on le voit immédiatement, respectivement par $u \mapsto (u, u)$ et par $(u, v) \mapsto (u-v, u-v)$).

Pour $k > 1$, $H^k(S^1) = H^k(U \cup V)$ se trouve entre deux zéros, donc il est nul lui-même.

(2) $n > 1$

On suppose le théorème vrai pour $n-1$. On introduit cette fois les non moins classiques ouverts $U = S^n \setminus \{(0, \dots, 0, -1)\}$, $V = S^n \setminus \{(0, \dots, 0, +1)\}$. Les projections stéréographiques de pôles respectifs Sud et Nord montrent que U et V sont homéomorphes à \mathbb{R}^n . Donc $H^0(U) \cong H^0(V) \cong \mathbb{R}$ et $H^k(U) \cong H^k(V) = 0$ pour $k > 0$. Quant à $U \cap V$ on voit facilement qu'il est homéomorphe à $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ (par exemple par projection stéréographique de pôle le centre de la sphère sur le cylindre de génératrices parallèles à l'axe des pôles et de directrice l'équateur ; ou bien en observant que $U \cap V = S^n \setminus \{N\} \setminus \{S\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ grâce à l'une des projections stéréographiques précédemment mentionnées : or ce dernier espace est notoirement homéomorphe à $S^{n-1} \times \mathbb{R}_+^*$ (généralisation des coordonnées polaires)). La première projection $S^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow S^{n-1}$ engendrant comme on sait un isomorphisme en cohomologie (utiliser l'homotopie $(S^{n-1} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \rightarrow S^{n-1} \times \mathbb{R} : ((r, \theta), t) \mapsto (r, t\theta)$) on a $H^0(U \cap V) \cong \mathbb{R}$, $H^{n-1}(U \cap V) \cong \mathbb{R}$ et, pour $k \neq 0$ et $k \neq n-1$, $H^k(U \cap V) = 0$ par hypothèse de récurrence.

Si dans la suite exacte

$$\longrightarrow H^{k-1}(U \cup V) \xrightarrow{\alpha} H^{k-1}(U) \oplus H^{k-1}(V) \xrightarrow{\beta} H^{k-1}(U \cap V) \xrightarrow{\partial} H^k(U \cup V) \longrightarrow H^k(U) \oplus H^k(V) \longrightarrow$$

on fait $k = 1$, on obtient $\longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\beta} \mathbb{R} \xrightarrow{\partial} ? \longrightarrow 0 \oplus 0 \longrightarrow$ puisque, par connexité, $H^0(U \cup V) = H^0(S^n) \cong \mathbb{R}$. Sans même remonter à sa définition, on voit que

α est injective (la seule autre possibilité, $\alpha = 0$, est exclue puisque β ne saurait être injective !); de là $\text{Ker } \beta = \text{Im } \alpha \cong \mathbb{R}$ et $\text{Ker } \partial = \text{Im } \beta \cong \mathbb{R}$; mais alors ∂ doit être à la fois nulle et surjective, ce qui oblige $H^1(S^n) = H^1(U \cup V)$ à être nul.

Pour $1 < k < n$, on obtient $\rightarrow ? \rightarrow 0 \otimes 0 \rightarrow 0 \xrightarrow{\partial} ? \rightarrow 0 \otimes 0 \rightarrow$. Il est donc évident que dans ces conditions $H^k(S^n) = H^k(U \cup V) = 0$. (N.B. Le ? de gauche est déterminé de manière analogue en remplaçant k par $k-1$: ne pas s'inquiéter à son sujet.)

Pour $k = n$, on obtient $\rightarrow 0 \rightarrow 0 \otimes 0 \rightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\partial} ? \rightarrow 0 \otimes 0 \rightarrow$. Tout aussi clairement, $H^n(S^n) = H^n(U \cup V) \cong \mathbb{R}$.

Pour $k > n$, on obtient de nouveau $\rightarrow ? \rightarrow 0 \otimes 0 \rightarrow 0 \xrightarrow{\partial} ? \rightarrow 0 \otimes 0 \rightarrow$ avec la même conclusion (et la même remarque) que précédemment. \square

2.4. COROLLAIRE : Pour tout entier n non nul,

$$H^0(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \mathbb{R}$$

$$H^k(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = 0 \text{ si } k \neq 0 \text{ et } k \neq n-1.$$

Démonstration : L'homéomorphisme $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow S^{n-1} \times \mathbb{R}_+^*$ déjà signalé, et la première projection $S^{n-1} \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow S^{n-1}$, induisent des isomorphismes en cohomologie. \square

3. FORMULE DE KUNNETH (premier épisode).

Il s'agit cette fois de calculer la cohomologie d'un produit cartésien connaissant celle des "facteurs". Le résultat qu'on va donner s'applique lorsque l'une des variétés est compacte mais ne sera démontré pour l'instant que dans le cas particulier où l'on prend pour celle-ci une sphère.

3.1. THEOREME : Si X et Y sont des variétés différentiables, X étant compacte, alors, en tant qu'algèbres,

$$H^*(X \times Y) \cong H^*(X) \hat{\otimes} H^*(Y),$$

où $\hat{\otimes}$ représente le produit tensoriel "gauche" (c'est-à-dire avec la condition de signe) introduit en I.8.11.

L'isomorphisme est réalisé par un morphisme d'algèbres que nous commençons par construire en toute généralité.

On note $p : X \times Y \rightarrow X$ et $q : X \times Y \rightarrow Y$ les projections canoniques ; on suppose $\dim X = n$, $\dim Y = m$.

Si $\alpha \in \Omega^i(X)$ est définie "sur" la carte (U, ϕ, A) par $\sum_{I \in J_n^i} \alpha_I dx_I \in \Omega^i(A)$, $p^*(\alpha) \in \Omega^i(X \times Y)$ est définie sur toute carte $(U \times V, \phi \times \psi, A \times B)$ par la forme

$$A \times B \rightarrow \Omega^i(\mathbb{R}^{n+m}) : (x, y) \mapsto \sum_{I \in J_n^i} \alpha_I(x) \epsilon_I^*$$

(en identifiant comme d'habitude les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^n aux n premiers vecteurs de celle de \mathbb{R}^{n+m} (cf. II.5.2)).

De même $\beta \in \Omega^j(Y)$ définie sur (V, ψ, B) par $\sum_{J \in J_m^j} \beta_J dy_J$ induit $q^*(\beta) \in \Omega^j(X \times Y)$ définie sur $(U \times V, \phi \times \psi, A \times B)$ par

$$A \times B \rightarrow \Omega^j(\mathbb{R}^{n+m}) : (x, y) \mapsto \sum_{J \in J_m^j} \beta_J(y) \eta_J^*$$

(avec, cette fois, identification du k^e vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^m au $(n+k)^e$ de celle de \mathbb{R}^{n+m} , soit $\epsilon_{n+k} = \eta_k$).

On obtient donc une forme $\alpha \bar{\wedge} \beta = p^*(\alpha) \wedge q^*(\beta) \in \Omega^{i+j}(X \times Y)$, laquelle est définie sur $(U \times V, \phi \times \psi, A \times B)$ par

$$A \times B \rightarrow \Omega^{i+j}(\mathbb{R}^{n+m}) : (x, y) \mapsto \sum_{I \in J_n^i} \sum_{J \in J_m^j} \alpha_I(x) \beta_J(y) \epsilon_I^* \wedge \eta_J^* .$$

Il est facile de vérifier que cette application

$$\bar{\wedge} : \Omega^i(X) \times \Omega^j(Y) \rightarrow \Omega^{i+j}(X \times Y)$$

est bilinéaire ; que si α et β sont fermées, $\alpha \bar{\wedge} \beta$ est fermée ; que si α ou β est exacte, l'autre étant toujours fermée, $\alpha \bar{\wedge} \beta$ est exacte. De là la

3.2. DEFINITION : On appelle cup-produit l'application linéaire

$$H^i(X) \otimes H^j(Y) \longrightarrow H^{i+j}(X \times Y)$$

induite par $\bar{\wedge}$. L'image de $a \otimes b$ se note $a \smile b$.

3.3. LEMME :

(i) Le cup-produit définit un morphisme d'algèbres graduées

$$H^*(X) \hat{\otimes} H^*(Y) \longrightarrow H^*(X \times Y) .$$

(ii) Si $f : X \longrightarrow X'$ et $g : Y \longrightarrow Y'$ sont des morphismes entre variétés différentiables, le carré suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^*(X') \hat{\otimes} H^*(Y') & \xrightarrow{\smile} & H^*(X' \times Y') \\ f^* \hat{\otimes} g^* \downarrow & & \downarrow (f \times g)^* \\ H^*(X) \hat{\otimes} H^*(Y) & \xrightarrow{\smile} & H^*(X \times Y) . \end{array}$$

Démonstration du Lemme :

(i) Soit $a \in H^i(X)$, $b \in H^j(Y)$, $c \in H^k(X)$, $d \in H^l(Y)$. Il suffit de montrer que $(a \smile b)(c \smile d) = (-1)^{jk} ac \smile bd$. Ou encore, en prenant des représentants $\alpha \in Z_i(X)$, $\beta \in Z_j(Y)$, $\gamma \in Z_k(X)$, $\delta \in Z_l(Y)$, que $(\alpha \bar{\wedge} \beta) \wedge (\gamma \bar{\wedge} \delta) = (-1)^{jk} (\alpha \wedge \gamma) \bar{\wedge} (\beta \wedge \delta)$. Or sur une carte $(U \times V, \phi \times \psi, A \times B)$, le membre de gauche est défini par

$$(x, y) \longmapsto \sum_I \sum_J \sum_K \sum_L \alpha_I(x) \beta_J(y) \gamma_K(x) \delta_L(y) \varepsilon_I^* \wedge \eta_J^* \wedge \varepsilon_K^* \wedge \eta_L^*$$

et le membre de droite par

$$(x, y) \longmapsto (-1)^{jk} \sum_I \sum_K \sum_J \sum_L \alpha_I(x) \gamma_K(x) \beta_J(y) \delta_L(y) \varepsilon_I^* \wedge \varepsilon_K^* \wedge \eta_J^* \wedge \eta_L^* .$$

d'où le résultat.

(ii) La commutativité, évidente, du diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xleftarrow{p} & X \times Y & \xrightarrow{q} & Y \\
 \downarrow f & & \downarrow f \times g & & \downarrow g \\
 X' & \xleftarrow{p'} & X' \times Y' & \xrightarrow{q'} & Y'
 \end{array}$$

entraîne celle du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega^i(X') \times \Omega^j(Y') & \xrightarrow{\bar{\lambda}} & \Omega^{i+j}(X' \times Y') \\
 \downarrow f^* \times g^* & & \downarrow (f \times g)^* \\
 \Omega^i(X) \times \Omega^j(Y) & \xrightarrow{\bar{\lambda}} & \Omega^{i+j}(X \times Y)
 \end{array}$$

dont le passage au quotient se vérifie sans peine. \square

On démontre alors plus précisément le

3.1.bis. THEOREME (Künneth) : Si X et Y sont des variétés différentiables, X compacte, le cup-produit

$$\cup : H^*(X) \hat{\otimes} H^*(Y) \longrightarrow H^*(X \times Y)$$

est un isomorphisme.

Démonstration : Comme annoncé, nous nous limiterons ici au cas où X est une sphère. On procède par récurrence sur la dimension de celle-ci.

(i) $X = S^0$

Dans ce cas la question se réduit à vérifier que pour tout entier k $H^0(S^0) \otimes H^k(Y) \xrightarrow{\cong} H^k(S^0 \times Y)$. Les deux espaces vectoriels sont évidemment isomorphes (puisque $H^0(S^0) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ et que $S^0 \times Y$ consiste en la réunion disjointe de deux exemplaires de Y). Reste à s'assurer que le cup-produit réalise bien l'isomorphisme.

Pour y voir clair, posons

$$U = \{1\} \times Y, \quad V = \{-1\} \times Y,$$

$$i : Y \rightarrow U \subset S^0 \times Y : y \rightarrow (1, y),$$

$$j : Y \rightarrow V \subset S^0 \times Y : y \rightarrow (-1, y).$$

Si $\alpha \in \Omega^0(S^0)$, c'est-à-dire $\alpha : S^0 \rightarrow \mathbb{R}$, alors $p^*(\alpha)$ est définie par $p^*(\alpha)(1,y) = \alpha(1)$, $p^*(\alpha)(-1,y) = \alpha(-1)$. De même, si $\beta \in \Omega^k(Y)$, $q^*(\beta)$ est définie par $q^*(\beta)(1,y) = q^*(\beta)(-1,y) = \beta(y)$, c'est-à-dire que $i^*(q^*(\beta)) = j^*(q^*(\beta)) = \beta$. Finalement, $\alpha \bar{\wedge} \beta(1,y) = \alpha(1) \beta(y)$, $\alpha \bar{\wedge} \beta(-1,y) = \alpha(-1) \beta(y)$. Autrement dit, en termes pompeux mais commodes, le diagramme suivant, où figurent les morphismes canoniques $\phi : \Omega^0(S^0) \xrightarrow{\cong} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} : \alpha \mapsto (\alpha(1), \alpha(-1))$ et $\psi : (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) \times \Omega^k(Y) \rightarrow \Omega^k(Y) \times \Omega^k(Y) : ((a,b), u) \mapsto (au, bu)$, est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega^0(S^0) \times \Omega^k(Y) & \xrightarrow[\cong]{\phi \times \text{Id}} & (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) \times \Omega^k(Y) \\
 \bar{\wedge} \downarrow & & \downarrow \psi \\
 \Omega^k(S^0 \times Y) & \xrightarrow[\text{Restriction}]{\cong} \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \xrightarrow[\cong]{i^* \oplus j^*} & \Omega^k(Y) \oplus \Omega^k(Y)
 \end{array}$$

Par ailleurs toutes les flèches dudit diagramme sont compatibles avec les opérateurs-bords des divers $\Omega^k(\)$: par exemple le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega^0(S^0) \times \Omega^k(Y) & \xrightarrow{\text{Id} \times d} & \Omega^0(S^0) \times \Omega^{k+1}(Y) \\
 \bar{\wedge} \downarrow & & \downarrow \bar{\wedge} \\
 \Omega^k(S^0 \times Y) & \xrightarrow{d} & \Omega^{k+1}(S^0 \times Y)
 \end{array}$$

commute, comme on le vérifie directement.

On peut donc passer à la cohomologie, d'où, après linéarisation des \times en \oplus , et en remarquant que $\Omega^0(S^0) = Z^0(S^0) = H^0(S^0)$, le diagramme commutatif suivant, où la flèche de droite, et donc aussi le cup-produit, est un isomorphisme :

$$\begin{array}{ccc}
 H^0(S^0) \oplus H^k(Y) & \xrightarrow{\cong} & (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) \oplus H^k(Y) \\
 \cup \downarrow & & \downarrow \\
 H^k(S^0 \times Y) & \xrightarrow{i} H^k(U) \oplus H^k(V) \xrightarrow{\cong} & H^k(Y) \oplus H^k(Y)
 \end{array}$$

la flèche i étant tout ce qui reste de la suite exacte de Mayer-Vietoris.

(ii) $X = S^m$ ($m > 0$)

On suppose le résultat établi pour $m-1$, et on introduit de nouveau les ouverts U et V (cf. 2.3.(2)) tels que $S^m = U \cup V$, U et V soient homéomorphes à \mathbb{R}^m , et $U \cap V$ ait la même cohomologie que S^{m-1} . On pose $U' = U \times Y$, $V' = V \times Y$, d'où $S^m \times Y = U' \cup V'$, $(U \cap V) \times Y = U' \cap V'$.

Il en résulte deux suites exactes de Mayer-Vietoris :

$$\rightarrow H^k(U') \oplus H^k(V') \rightarrow H^k(U' \cap V') \xrightarrow{\partial} H^{k+1}(U' \cup V') \rightarrow H^{k+1}(U') \oplus H^{k+1}(V') \rightarrow$$

et

$$\rightarrow H^k(U) \oplus H^k(V) \rightarrow H^k(U \cap V) \xrightarrow{\partial} H^{k+1}(U \cup V) \rightarrow H^{k+1}(U) \oplus H^{k+1}(V) \rightarrow.$$

En faisant les produits tensoriels à droite par les $H^k(Y)$ et des sommes directes, on obtient une troisième suite exacte, et les cup-produits définissent des morphismes de celle-ci dans la première, comme on voit sur le diagramme (Δ) de la page suivante.

En fait les choses sont plus simples qu'il n'y paraît de prime abord :
 - dans $[H^*(U) \hat{\otimes} H^*(Y)]_k$ le seul terme non nul est $H^0(U) \otimes H^k(Y)$; et $H^k(U') \cong H^k(Y)$.
 Plus précisément, si on désigne par ρ l'application $U \rightarrow \{\text{Pôle Nord}\}$, par exemple, on sait que ρ^* réalise l'isomorphisme $H^*(\text{Point}) \xrightarrow{\cong} H^*(U)$ et $\tilde{\rho} = (\rho \times \text{Id}_Y)^*$ l'isomorphisme $H^*(Y) \xleftarrow{\cong} H^*(\{\text{Pt}\} \times Y) \xrightarrow{\cong} H^*(U')$. Bien entendu, ceux-ci commutent aux cup-produits (cf. 3.3.(ii)), d'où la commutativité du carré de gauche dans le diagramme ci-dessous

$$\begin{array}{ccccc} H^0(U) \otimes H^k(Y) & \xleftarrow[\cong]{\tilde{\rho}^* \otimes \text{Id}} & H^0(\text{Pt}) \otimes H^k(Y) & \xrightarrow[\cong]{\nu} & \mathbb{R} \otimes H^k(Y) \\ \cup \downarrow & & \cup \downarrow & & \downarrow \sigma \\ H^k(U') & \xleftarrow[\cong]{\tilde{\rho}^*} & H^k(\{\text{Pt}\} \times Y) & \xrightarrow[\cong]{} & H^k(Y) \end{array}$$

Dans le carré de droite, ν est induite par $\Omega^0(\text{Pt}) \rightarrow \mathbb{R} : \alpha \mapsto \alpha(\text{Pt})$ (cf. définition de Φ en (i)) et σ est l'isomorphisme canonique. Ce carré est alors trivialement commutatif, d'où il résulte que les deux cup-produits sont des isomorphismes.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \rightarrow [H^*(U) \hat{\otimes} H^*(Y)]_k \oplus [H^*(V) \hat{\otimes} H^*(Y)]_k & \longrightarrow & [H^*(U \cap V) \hat{\otimes} H^*(Y)]_k & \xrightarrow{\cong} & [H^*(U \cup V) \hat{\otimes} H^*(Y)]_{k+1} & \longrightarrow & \\
 \downarrow \alpha_k = \cup \oplus \cup & & \downarrow \beta_k = \cup & & \downarrow \gamma_{k+1} = \cup & & \\
 \rightarrow H^k(U') \oplus H^k(V') & \longrightarrow & H^k(U' \cap V') & \xrightarrow{\partial'} & H^{k+1}(U' \cup V') & \longrightarrow &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \rightarrow [H^*(U) \hat{\otimes} H^*(Y)]_{k+1} \oplus [H^*(V) \hat{\otimes} H^*(Y)]_{k+1} & \longrightarrow & [H^*(U \cap V) \hat{\otimes} H^*(Y)]_{k+1} & \longrightarrow & & & \\
 \downarrow \alpha_{k+1} = \cup \oplus \cup & & \downarrow \beta_{k+1} = \cup & & & & \\
 \rightarrow H^{k+1}(U') \oplus H^{k+1}(V') & \longrightarrow & H^{k+1}(U' \cap V') & \longrightarrow & & &
 \end{array}$$

Diagramme (Δ)

- Tout ce raisonnement peut se tenir pour V et réussit donc à démontrer que α_k et α_{k+1} du diagramme (Δ) sont des isomorphismes.

- En ce qui concerne $U \cap V$, un raisonnement analogue mène au carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} [H^*(U \cap V) \hat{\otimes} H^*(Y)]_k & \xleftarrow{\cong} & H^*(S^{m-1}) \hat{\otimes} H^*(Y)]_k \\ \beta_k \downarrow & & \downarrow \cup \\ H^k(U' \cap V') & \xleftarrow{\cong} & H^k(S^{m-1} \times Y) \end{array}$$

d'où il résulte que β_k -et, bien sûr, β_{k+1} - sont des isomorphismes par hypothèse de récurrence.

Il ne reste plus qu'à démontrer que les quatre carrés du diagramme (Δ) sont commutatifs. Or les premier, troisième et quatrième carrés le sont parce que les cup-produits commutent aux restrictions (cf. 3.3.(ii) en prenant les inclusions en guise de f et g) : par exemple, $(u \cup y)|_{U' \cap V'} = (u|_{U \cap V}) \cup y$.

En ce qui concerne le deuxième carré, il suffit de définir la partition de l'unité qui permet de construire ∂' à partir de celle qui construit ∂ : si $\{\alpha_U, \alpha_V\}$ est associée au recouvrement $\{U, V\}$ de S^m , la donnée

$$\alpha_{U'}(x, y) = \alpha_U(x) \quad , \quad \alpha_{V'}(x, y) = \alpha_V(x)$$

définit clairement une partition de l'unité associée au recouvrement $\{U', V'\}$ de $S^m \times Y$.

L'avantage de ce choix est qu'il assure, pour $\omega \in \Omega^i(U \cap V)$, $\eta \in \Omega^j(Y)$, $(\alpha_U \omega) \wedge \bar{\eta} = \alpha_{U'}(\omega \wedge \bar{\eta})$ et $(\alpha_V \omega) \wedge \bar{\eta} = \alpha_{V'}(\omega \wedge \bar{\eta})$ dans $\Omega^{i+j}(U \cap V) \times Y = \Omega^{i+j}(U' \cap V')$. (En effet, notant comme précédemment $p : U' \cap V' = (U \cap V) \times Y \rightarrow U \cap V$ et $q : U' \cap V' = (U \cap V) \times Y \rightarrow Y$ les projections canoniques, $\alpha_{U'}$ n'est autre que $p^*(\alpha_U)$, d'où $(\alpha_U \omega) \wedge \bar{\eta} = p^*(\alpha_U) \wedge q^*(\eta) = p^*(\alpha_U) p^*(\omega) \wedge q^*(\eta) = \alpha_{U'}(\omega \wedge \bar{\eta})$; et de même pour $\alpha_{V'}$, $= p^*(\alpha_V)$).

Soit alors $w \in H^i(U \cap V)$, $y \in H^{k-i}(Y)$, et $\omega \in Z_i(U \cap V)$, $\eta \in Z_{k-i}(Y)$ des représentants respectifs. D'une part, ∂w ayant pour représentant $\lambda \in Z_{i+1}(U \cup V)$ tel que $\lambda|_U = d(\alpha_U \omega)$ et $\lambda|_V = -d(\alpha_V \omega)$ (cf. 2.2), le représentant $\chi = \lambda \wedge \eta$ de $(\partial w) \cup y$ vérifie la condition $\chi|_{U'} = d(\alpha_U \omega) \wedge \bar{\eta}$ et $\chi|_{V'} = -d(\alpha_V \omega) \wedge \bar{\eta}$. D'autre part,

$\partial'(w\omega)$ a pour représentant la forme $\theta \in Z_{k+1}(U' \cup V')$ définie par la condition $\theta|_{U'} = d(\alpha_{V'}^1, \omega \bar{\lambda} \eta)$ et $\theta|_{V'} = -d(\alpha_{U'}^1, \omega \bar{\lambda} \eta)$ (cf. 3.2 et 2.2). Or

$$d(\alpha_{V'}^1, \omega \bar{\lambda} \eta) = d((\alpha_V \omega) \bar{\lambda} \eta) = d(\alpha_V \omega) \bar{\lambda} \eta + (-1)^1 (\alpha_V \omega) \bar{\lambda} d\eta$$

(car il est immédiat sur la définition que les règles de calcul relatives à \wedge se transmettent à $\bar{\lambda}$). Autrement dit, η étant fermée, $\theta|_{U'} = \chi|_{U'}$. De la même manière on montre que $\theta|_{V'} = \chi|_{V'}$, d'où $\theta = \chi$, et le deuxième carré du diagramme (Δ) est commutatif.

Toutes les hypothèses du Lemme des Cinq sont réunies et γ_{k+1} est donc bien un isomorphisme. \square

Comme application tout-à-fait immédiate de cette version simplifiée du théorème de Künneth, on obtient la cohomologie des tores.

Soit $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$ (n facteurs) le tore à n dimensions.

3.4. **THEOREME** : Pour tout entier $n \geq 1$ et tout entier $k \leq n$, $H^k(T^n)$ est de dimension finie et $\dim H^k(T^n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Démonstration :

D'après 3.1 bis, et par récurrence sur le nombre de facteurs,

$$H^*(T^n) = H^*(S^1) \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} H^*(S^1).$$

Or $H^0(S^1) \cong H^1(S^1) \cong \mathbb{R}$ et, pour $k > 1$, $H^k(S^1) = 0$: on obtient le résultat par décompte direct.

Mieux encore, on peut remarquer qu'en tant qu'algèbre $H^*(S^1)$ est l'algèbre extérieure à un générateur $\Lambda(\mathbb{R})$. Ainsi (cf. I.8.12), $H^*(T^n) \cong \Lambda(\mathbb{R}^n)$ et le présent résultat est une conséquence directe de I.8.13. \square

3.5. **COROLLAIRE** : Pour tout entier n , la sphère S^n et le tore T^n ne sont pas homéomorphes.

... ce qui confirme - enfin ! - la différence entre un ballon de football et une chambre à air.

4. COHOMOLOGIE À SUPPORTS COMPACTS ET COHOMOLOGIE RELATIVE.

La suite exacte de Mayer-Vietoris ne faisant intervenir que des inclusions, l'espoir est raisonnable (cf. II.8.4 et IV.4) d'en trouver un équivalent - certes covariant - en cohomologie à supports compacts. C'est bien ce qui se passe.

Soit M une variété différentiable, U et V deux ouverts de M tels que $M = U \cup V$. En se restreignant aux formes à support compact, on peut appliquer IV.5.12 pour obtenir les morphismes

$$\gamma : \Omega_C^*(U \cap V) \rightarrow \Omega_C^*(U) ,$$

$$\delta : \Omega_C^*(U \cap V) \rightarrow \Omega_C^*(V) ,$$

$$\phi : \Omega_C^*(U) \rightarrow \Omega_C^*(M) ,$$

$$\psi : \Omega_C^*(V) \rightarrow \Omega_C^*(M) :$$

ainsi, pour $\omega \in \Omega_C^k(U \cap V)$, $\gamma(\omega)$ est définie par les conditions

$$\gamma(\omega)|_{U \cap V} = \omega \quad \text{et} \quad \gamma(\omega)|_{U \setminus V} = 0 ;$$

les trois autres morphismes sont définis de manière analogue.

De là, pour tout entier k , une suite

$$0 \rightarrow \Omega_C^k(U \cap V) \xrightarrow{(-\gamma, \delta)} \Omega_C^k(U) \oplus \Omega_C^k(V) \xrightarrow{\phi + \psi} \Omega_C^k(M) \rightarrow 0$$

(cf. IV.5.14).

4.1. THEOREME : Cette suite est exacte.

Démonstration :

(i) L'injectivité de $(-\gamma, \delta)$ est triviale.

(ii) Que $(\phi + \psi) \circ (-\gamma, \delta) = 0$ est trivial.

Réciproquement, soit $\omega \in \Omega_C^k(U)$ et $\sigma \in \Omega_C^k(V)$ telles que $\phi(\omega) + \psi(\sigma) = 0$. Les restrictions de cette dernière à $V \setminus U$, $U \setminus V$, $U \cap V$ sont respectivement celles de σ ,

$\omega, \omega + \sigma$. Il en résulte que $\text{Supp } \omega$ et $\text{Supp } \sigma$ sont des compacts de $U \cap V$, d'où $\omega|_{U \cap V} \in \Omega_C^k(U \cap V)$ et $\sigma|_{U \cap V} \in \Omega_C^k(U \cap V)$, et que $-\omega|_{U \cap V} = \sigma|_{U \cap V}$, ce qui fournit l'antécédent cherché.

(iii) Soit $\lambda \in \Omega_C^k(M)$ et (α_U, α_V) une partition de l'unité subordonnée au recouvrement (U, V) . Le support de $\alpha_U \lambda$ est un compact de M inclus dans U , donc un compact de U , et $\alpha_U \lambda \in \Omega_C^k(U)$; de même $\alpha_V \lambda \in \Omega_C^k(V)$. Le couple $(\alpha_U \lambda, \alpha_V \lambda)$ est l'antécédent cherché. \square

4.2. COROLLAIRE : Si une variété différentiable M est réunion de deux ouverts U et V , on a une suite exacte infinie, dite de Mayer-Vietoris à supports compacts

$$\rightarrow H_C^k(U) \oplus H_C^k(V) \rightarrow H_C^k(M) \xrightarrow{\partial} H_C^{k+1}(U \cap V) \rightarrow H_C^{k+1}(U) \oplus H_C^{k+1}(V) \rightarrow H_C^{k+1}(M) \rightarrow \dots$$

Démonstration :

Appliquer 1.7 à la suite exacte de complexes

$$0 \rightarrow \Omega_C^*(U \cap V) \rightarrow \Omega_C^*(U) \oplus \Omega_C^*(V) \rightarrow \Omega_C^*(M) \rightarrow 0$$

dont l'existence est démontrée au théorème précédent. Bien entendu les flèches vont à l'envers de celles de 2.1. \square

4.3. REMARQUE : Ici encore on peut expliciter le bord ∂ : si $\lambda \in Z_C^k(M)$, $\partial([\lambda]) = [\omega]$

$$\text{où } \omega = d(\alpha_V \lambda)|_{U \cap V} = -d(\alpha_U \lambda)|_{U \cap V} . \square$$

La notion suivante est nouvelle (mais non sans rapport avec la précédente : voir 4.10).

Soit M une variété différentiable, N une sous-variété fermée. On note $\Omega^k(M, N)$ le sous-espace vectoriel des k -formes sur M qui s'annulent sur N , autrement dit

$$\Omega^k(M, N) = \text{Ker}(\Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(N))$$

la flèche étant induite par l'inclusion.

Il est immédiat que, si $\omega \in \Omega^k(M, N)$, $d\omega \in \Omega^{k+1}(M, N)$; ainsi $\Omega^*(M, N)$ est un sous-complexe de $\Omega^*(M)$. On notera $Z^k(M, N) = \{\omega \in \Omega^k(M, N) \mid d\omega = 0\}$ et

$$B^k(M,N) = d(\Omega^{k-1}(M,N)).$$

4.4. DEFINITION : Le k^e espace vectoriel de cohomologie de $\Omega^*(M,N)$, noté $H^k(M,N)$, est le k^e espace vectoriel de cohomologie relative de M modulo N .

4.5. REMARQUES :

1°) On peut faire $N = \emptyset$ dans la définition précédente : en effet, III.5.9 assure à \emptyset la structure de sous-variété fermée de n'importe quelle variété différentiable (à ceci près que la dimension de \emptyset n'est pas définie). Evidemment, pour tout entier k , $H^k(M, \emptyset) = H^k(M)$.

2°) L'inclusion $\Omega^*(M,N) \subset \Omega^*(M)$ induit pour tout entier k un homomorphisme $H^k(M,N) \rightarrow H^k(M)$. Celui-ci n'est en général ni un monomorphisme ni un épimorphisme (cf. 4.9(i)).

Soit deux paires (M,N) et (M',N') , où M, M' sont des variétés différentiables et N, N' des sous-variétés fermées de M, M' respectivement. Une application $f : M \rightarrow M'$ telle que $f(N) \subset N'$ sera notée $f : (M,N) \rightarrow (M',N')$. Si celle-ci est de classe C^∞ (ou même seulement continue d'après IV.3.8) elle induit pour tout entier k une application linéaire

$$f^* : H^k(M',N') \rightarrow H^k(M,N).$$

4.6. REMARQUE : En particulier, pour toute paire (M,N) , l'inclusion $(M, \emptyset) \subset (M,N)$ induit précisément les applications linéaires $H^k(M,N) \rightarrow H^k(M)$ indiquées en 4.5.

La définition même de $\Omega^*(M,N)$ signifie que pour tout entier k la suite

$$0 \rightarrow \Omega^k(M,N) \rightarrow \Omega^k(M) \xrightarrow{i^*} \Omega^k(N),$$

où $i : N \rightarrow M$ est l'inclusion, est exacte. En fait,

4.7. THEOREME : Pour tout entier k , la suite

$$0 \rightarrow \Omega^k(M,N) \rightarrow \Omega^k(M) \xrightarrow{i^*} \Omega^k(N) \rightarrow 0$$

est exacte.

Démonstration :

(i) Dans le cas particulier où $M = \mathbb{R}^n$, $N = \mathbb{R}^p$ (n, p entiers, $p < n$) et

$$j = j : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_p) \mapsto (x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0),$$

la projection $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_p)$ vérifie $\pi \circ j = \text{Id}_{\mathbb{R}^p}$ et permet donc d'écrire toute $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^p)$ comme $\omega = j^*(\pi^*(\omega))$, $\pi^*(\omega) \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Dans le cas général, tout point $x \in N$ possède un voisinage V_x dans M diffeomorphe à \mathbb{R}^n par un diffeomorphisme ϕ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} V_x & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{R}^n \\ \uparrow \text{Id}_{V_x \cap N} & & \uparrow j \\ V_x \cap N & \xrightarrow{\phi|_{V_x \cap N}} & \mathbb{R}^p \end{array}$$

soit commutatif.

On considère le recouvrement ouvert $\{V_i\}_{i \in I}$ de M où $I = N \cup \{\infty\}$, $V_\infty = M \setminus N$; soit $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement.

Si $\omega \in \Omega^k(N)$, il existe pour tout $x \in N$, d'après (i) et le diagramme ci-dessus, une forme $\omega_x \in \Omega^k(V_x)$ telle que $\omega|_{V_x \cap N} = \omega_x|_{V_x \cap N}$. On pose $\omega_\infty = 0 \in \Omega^k(M \setminus N)$. Alors la forme $\tilde{\omega} = \sum_{i \in I} \alpha_i \omega_i \in \Omega^k(M)$ (cf. chapitre IV après 5.13) vérifie $\tilde{\omega}|_N = \omega$. \square

4.8. COROLLAIRE : Toute paire (M, N) où M est une variété différentiable et N une sous-variété fermée de M donne lieu à une suite exacte infinie

$$\cdots \rightarrow H^{k-1}(M) \xrightarrow{1^*} H^{k-1}(N) \xrightarrow{\partial} H^k(M, N) \rightarrow H^k(M) \xrightarrow{1^*} H^k(N) \rightarrow \cdots$$

4.9. : REMARQUES :

(i) Ainsi $H^k(M, N) \cong \text{Ker}(H^k(M) \rightarrow H^k(N)) \oplus \text{Coker}(H^{k-1}(M) \rightarrow H^{k-1}(N))$ (cf. 4.5.2^a).

(ii) Le bord ∂ n'est pas aussi simple que dans le cas des suites exactes de Mayer-Vietoris.

Les deux notions de ce paragraphe sont liées dans le cas où M est compacte.

Pour toute paire (M,N) , l'"inclusion" $\Omega_C^k(M \setminus N) \subset \Omega_C^k(M) \subset \Omega^k(M)$, qui consiste en fait (IV.5.12) à prolonger une forme par 0 sur N , factorise évidemment à travers $\Omega^k(M,N)$. Il en résulte même pour tout entier k une application linéaire $\chi: H_C^k(M \setminus N) \rightarrow H^k(M,N)$ puisque les bords commutent aux inclusions. Notre but va être désormais de prouver le

4.10. THEOREME : Si (M,N) est une paire compacte (c'est-à-dire que M est une variété différentiable compacte et N une sous-variété fermée de M), alors, pour tout entier k , l'application linéaire

$$\chi : H_C^k(M \setminus N) \rightarrow H^k(M,N)$$

est un isomorphisme.

La démonstration requiert l'introduction d'un concept qui ne nous servira que d'accessoire technique, mais dont l'intérêt intrinsèque est énorme (voir [7], cf. aussi IV.1.2), celui de fibré vectoriel.

4.11. DEFINITION : On appelle fibré vectoriel un triplet (E,π,M) où E,M sont des variétés différentiables et $\pi : E \rightarrow M$ une application de classe C^∞ possédant les propriétés suivantes :

(1) pour tout $x \in M$, $\pi^{-1}(\{x\})$ est muni d'une structure de K -espace vectoriel de dimension finie ($K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) ;

(2) pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert V de x dans M , un entier n et un difféomorphisme $\phi : \pi^{-1}(V) \rightarrow V \times K^n$ tels que

(i) le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(V) & \xrightarrow{\phi} & V \times K^n \\ \pi \searrow & & \swarrow \text{pr} \\ & V & \end{array}$$

(où pr est la première projection) soit commutatif,

(ii) pour tout $y \in V$, la restriction ϕ_y de ϕ à $\pi^{-1}(\{y\})$ soit un K -isomorphisme

$$\phi_y : \pi^{-1}(\{y\}) \rightarrow \{y\} \times K^n \cong K^n.$$

On appelle M la base du fibré, E l'espace total, π la projection et $\pi^{-1}(\{x\})$, noté E_x , la fibre au-dessus de x .

Le cas le plus simple de fibré est évidemment celui du produit cartésien, où $E = M \times K^n$ et $\pi = \text{pr}$: c'est le fibré trivial. La condition (2) impose que tout fibré soit trivial localement.

4.12. REMARQUE : Le fait que, pour tout $x \in M$, E_x soit un espace vectoriel, donc non vide, assure la surjectivité de π .

Cela permet aussi de définir une injection $\iota : M \rightarrow E$ en prenant, pour tout $x \in M$, $\iota(x)$ égal au zéro de E_x .

Il est clair que $\pi \circ \iota = \text{Id}_M$. En outre, sur chaque ouvert V "trivialisant", $\iota|_V$ est la composée

$$V \rightarrow V \times \{0\} \subset V \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} \pi^{-1}(V)$$

ce qui assure que ι est de classe C^∞ .

Ainsi un fibré vectoriel est d'abord une collection d'espaces vectoriels de dimension finie. Il est donc raisonnable d'espérer, en prenant au besoin quelques précautions, munir les fibrés de propriétés rappelant celles des espaces vectoriels.

Nous allons voir à titre d'exemple et pour les besoins de la présente cause ce qu'il en est de la notion de métrique.

Tout espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{R} est muni du produit scalaire euclidien, lequel est une forme bilinéaire symétrique définie positive. L'idée directrice sera de prendre une telle forme sur chaque fibre en tâchant de les faire se recoller. Pour cela, le plus sûr est d'avoir recours à

$$E \times_M E = \{(a,b) \in E \times E \mid \pi(a) = \pi(b)\}$$

qui se trouve être canoniquement (démonstration facile laissée au lecteur...) fibré de base M et de fibre $E_x \times E_x$ au-dessus de x , et de poser la

4.13. DEFINITION : Une métrieque sur le fibré (E, π, M) est la donnée d'une application continue $\delta : E \times_M E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in M$, la restriction δ_x de δ à la fibre $E_x \times E_x$ soit une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E_x .

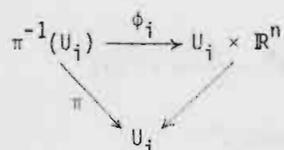
Le procédé est légitimé par le

4.14. THEOREME : Tout fibré vectoriel peut être muni d'une métrique.

Démonstration :

(i) Le fibré est trivial : $E = M \times \mathbb{R}^n$ et $\pi = \text{pr}$. Alors $E \times_M E$ s'identifie naturellement à $M \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et il n'y a qu'à poser $\delta(x, \alpha, \beta) = (\alpha | \beta)$ où $(|)$ désigne le produit scalaire euclidien.

(ii) Dans le cas général, il existe par définition un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i \in I}$ de M tel que, pour tout $i \in I$, le fibré $(\pi^{-1}(U_i), \pi|_{\pi^{-1}(U_i)}, U_i)$ soit trivial, du moins à difféomorphisme près, ce qui ne gêne pas : le diagramme

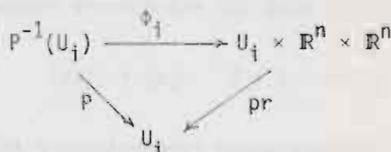


est commutatif.

Le même recouvrement trivialisé également le fibré $(E \times_M E, P, M)$, où $P(\xi, \eta) = \pi(\xi) = \pi(\eta)$: en effet pour tout $i \in I$, si $\lambda_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ est définie en posant pour $\xi \in \pi^{-1}(U_i)$, $\phi_i(\xi) = (\pi(\xi), \lambda_i(\xi))$, on obtient clairement un difféomorphisme

$$\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : (\xi, \eta) \mapsto (\pi(\xi), \lambda_i(\xi), \lambda_i(\eta))$$

et un diagramme commutatif



Soit, pour tout $i \in I$, $\delta_i = \Delta_i \circ \phi_i : P^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{R}$ où $\Delta_i : U_i \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est fournie par (i). En particulier, si $x \in U_i$, la restriction δ_{ix} de δ_i à $E_x \times E_x$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E_x : très précisément, si $(\xi, \eta) \in E_x \times E_x$, $\delta_{ix}(\xi, \eta) = (\lambda_{ix}(\xi) | \lambda_{ix}(\eta))$ (cf. 4.11(2)(ii)).

Soit $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\{U_i\}_{i \in I}$; posons, pour $(\xi, \eta) \in E \times_M E$ et $i \in I$,

$$\tilde{\delta}_i(\xi, \eta) = \begin{cases} \alpha_i(\pi(\xi)) \delta_i(\xi, \eta) & \text{si } \pi(\xi) \in U_i \\ 0 & \text{sinon ;} \end{cases}$$

enfin $\delta = \sum_{i \in I} \tilde{\delta}_i : E \times_M E \rightarrow \mathbb{R}$. Que δ soit bien définie et continue est classique. Pour $x \in M$, il existe un sous-ensemble fini non vide $J \subset I$ tel que $\alpha_i(x) > 0$ ssi $i \in J$; alors $\delta_x = \sum_{i \in J} \alpha_i(x) \delta_{ix}$, et δ_x est bien une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E_x comme combinaison linéaire à coefficients strictement positifs de telles formes. \square

Noter qu'en posant, pour tout $\xi \in E$, $v(\xi) = \sqrt{\delta(\xi, \xi)}$ on munit chaque fibre d'une norme - (En particulier, pour tout $x \in M$, $v(1(x)) = 0$.)

Cela permet de poursuivre l'analogie avec les espaces vectoriels de dimension finie et de définir, pour tout $\varepsilon > 0$, le fibré en boules de rayon ε associé à (E, π, M) . Il s'agit de l'ouvert

$$B_\varepsilon = \{ \xi \in E \mid v(\xi) < \varepsilon \},$$

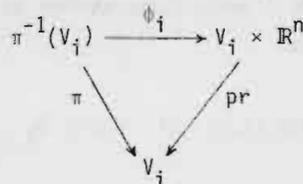
sous-variété de l'espace total E : ainsi, pour tout $x \in M$, $(B_\varepsilon)_x = B_\varepsilon \cap E_x$ est la boule "ordinaire" (pour la norme induite par δ_x) de centre 0 et de rayon ε dans E_x .

Dans le cas particulier où M est compacte, l'analogie est très forte. Dans ce cas, le fibré (E, π, M) possède une famille finie d'ouverts trivialisants. Plus subtilement encore, grâce à la locale compacité de M , il existe un ensemble fini I , deux familles $\{U_i\}_{i \in I}$ et $\{V_i\}_{i \in I}$ d'ouverts de M , et une famille $\{K_i\}_{i \in I}$ de compacts de M telles que

(i) $M = \bigcup_{i \in I} U_i$;

(ii) pour tout $i \in I$, $U_i \subset K_i \subset V_i$;

(iii) pour tout $i \in I$, le fibré est trivial au-dessus de V_i : il existe un difféomorphisme $\phi_i : \pi^{-1}(V_i) \rightarrow V_i \times \mathbb{R}^n$ tel que le diagramme



soit commutatif.

4.15. REMARQUE : Nous regrettons autant que le lecteur l'encombrante présence de la famille $\{V_i\}$: elle n'est là qu'afin d'assurer que tous les fibrés envisagés ont pour base et pour espace total des variétés différentiables (cf. 4.11), ce que ne sont a priori ni les K_i , ni les $\pi^{-1}(K_i)$. Mais seuls ceux-ci jouent véritablement un rôle dans la démonstration du lemme suivant, qui est de nature topologique et non différentielle.

4.16. LEMME : Dans les conditions ci-dessus, les fibrés en boules de rayon ϵ , $\epsilon > 0$, forment un système fondamental de voisinages de ${}_i(M)$.

Démonstration :

(i) Le fibré est trivial et I est un singleton.

Dans ce cas ${}_i(M) = M \times \{0\}$, la topologie de E est la topologie-produit, pour tout $x \in M$, δ_x est le produit scalaire euclidien et, pour tout $(x, \alpha) \in M \times \mathbb{R}^n$, $v((x, \alpha)) = \|\alpha\|$ (cf. 4.14(i)).

Si T est un ouvert de $E = M \times \mathbb{R}^n$ contenant $M \times \{0\}$, l'existence, puisque M est un compact, d'un $\epsilon > 0$ tel que $M \times D_\epsilon \subset T$ (où D_ϵ est la boule ouverte de \mathbb{R}^n , de centre 0 et de rayon ϵ) est un résultat classique de topologie générale. Dans le langage du présent lemme, c'est dire que $B_\epsilon \subset T$.

Remarquer que la structure différentiable de M n'a pas servi.

(ii) Le fibré est quelconque, M restant compacte.

On utilise les notations de l'introduction (avant 4.15) et de 4.14. Soit encore T un ouvert de E tel que $\iota(M) \subset T$.

Pour tout $i \in I$, $T_i = T \cap \pi^{-1}(V_i)$ est un ouvert de $\pi^{-1}(V_i)$ tel que $\iota(V_i) \subset T_i$ et $Z_i = \phi_i(T_i)$ est un ouvert de $V_i \times \mathbb{R}^n$, homéomorphe à T_i , tel que $V_i \times \{0\} \subset Z_i$. La métrique δ_i sur $\pi^{-1}(V_i)$ étant définie comme en 4.14 (ii), on a, pour tout $\xi \in \pi^{-1}(V_i)$, $\nu_i(\xi) = \sqrt{\delta_i(\xi, \xi)} = \|\lambda_i(\xi)\|$.

On se restreint à $K_i \subset V_i$: la démonstration de (i) fournit un $\varepsilon_i > 0$ tel que, si $x \in K_i$ et $\|\alpha\| < \varepsilon_i$, $(x, \alpha) \in Z_i$. Alors, si $\xi \in \pi^{-1}(K_i)$ et $\nu_i(\xi) < \varepsilon_i$, $\phi_i(\xi) = (\pi(\xi), \lambda_i(\xi)) \in Z_i$, c'est-à-dire que $\xi \in T_i$. Cela reste vrai a fortiori au-dessus de U_i :

pour tout $\xi \in \pi^{-1}(U_i)$, si $\nu_i(\xi) < \varepsilon_i$, alors $\xi \in T_i \subset T$.

C'est d'une partition de l'unité $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ subordonnée au recouvrement $\{U_i\}_{i \in I}$ (et non pas à $\{V_i\}$!) qu'on se sert pour construire la métrique δ sur E . Comme I est fini, $\varepsilon = \inf_{i \in I} \varepsilon_i$ est strictement positif ; on va montrer que $B_\varepsilon \subset T$.

Soit $\xi \in E$ tel que $\nu(\xi) = \sqrt{\delta(\xi, \xi)} < \varepsilon$ et $J = \{i \in I \mid \alpha_i(\pi(\xi)) > 0\}$: ainsi

$$\sum_{i \in J} \alpha_i(\pi(\xi)) \delta_i(\xi, \xi) = \delta(\xi, \xi) < \varepsilon^2.$$

Comme $\sum_{i \in J} \alpha_i(\pi(\xi)) = 1$, il existe un $i \in J$ tel que $\delta_i(\xi, \xi) < \varepsilon^2 \leq \varepsilon_i^2$, c'est-à-dire que $\nu_i(\xi) < \varepsilon_i$; par ailleurs, $\xi \in \pi^{-1}(U_i)$ puisque $\text{Supp } \alpha_i \subset U_i$: donc $\xi \in T$. \square

Pour faire intervenir les fibrés vectoriels dans la démonstration de 4.10, nous avons besoin du résultat suivant, que nous admettrons (voir [11]) :

4.17. THEOREME : (du voisinage tubulaire). Soit M une variété différentiable, N une sous-variété fermée de M . Il existe un voisinage ouvert E de N dans M et une projection $\pi : E \rightarrow N$ tels que (E, π, N) puisse être muni d'une structure de \mathbb{R} -fibré vectoriel sur N .

Un tel voisinage est dit tubulaire.

4.18. REMARQUE : Plus précisément, N s'identifie à l'ensemble des vecteurs nuls de toutes les fibres : l'injection ι n'est autre que l'inclusion.

Démonstration de 4.10 :

On rappelle que pour tout entier k l'application linéaire $\chi : H_C^k(M \setminus N) \rightarrow H^k(M, N)$ est induite par l'"inclusion" $\Omega_C^k(M \setminus N) \hookrightarrow \Omega^k(M, N)$. En fait on enlève les guillemets et on garde la même lettre pour une forme de $\Omega_C^k(M \setminus N)$ et la forme prolongée à M par 0 sur N .

(i) χ est injective.

Soit $\omega \in Z_C^k(M \setminus N)$ telle que $\chi([\omega]) = 0$: ainsi $\text{Supp } \omega$ est un compact de $M \setminus N$, $d\omega = 0$, et il existe une $\theta \in \Omega^{k-1}(M, N)$ telle que $d\theta = \omega$. Il s'agit en somme de "raboter" θ au voisinage de N - en lui ôtant une forme exacte ! - de façon que la forme rabotée s'annule non seulement sur N mais au voisinage de N ; la compacité de M fera le reste.

A cette fin, soit (E, ν, N) un voisinage tubulaire de N dans M (fourni par 4.17). On le munit d'une métrique δ grâce à 4.14. Comme $\text{Supp } \omega \cap N = \emptyset$ et par compacité de N , on applique 4.16 pour trouver un $\varepsilon > 0$ tel que le fibré en boules B_ε ne rencontre pas $\text{Supp } \omega$: si θ_ε désigne la restriction $\theta|_{B_\varepsilon}$, on a donc $\theta_\varepsilon \in Z^{k-1}(B_\varepsilon, N)$. Or l'inclusion $\iota : N \hookrightarrow B_\varepsilon$ induit un isomorphisme en cohomologie puisque les fibres sont contractiles (le lecteur scrupuleux n'aura pas grand mal à exhiber l'homotopie requise). La suite exacte 4.8 appliquée à la paire (B_ε, N) montre donc que $H^{k-1}(B_\varepsilon, N) = 0$ et il existe une forme $\sigma \in \Omega^{k-2}(B_\varepsilon, N)$ telle que $d\sigma = \theta_\varepsilon$.

Il ne reste plus qu'à introduire une application de classe C^∞

$$\lambda : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$$

telle que $\lambda(s) = 1$ pour $0 \leq s \leq \varepsilon/3$ et $\lambda(s) = 0$ pour $s \geq 2\varepsilon/3$, qui permet de définir une application de classe C^∞

$$\hat{\nu} : E \rightarrow \mathbb{R} : \xi \mapsto \lambda(\nu(\xi)) \quad \text{où} \quad \nu(\xi) = \sqrt{\delta(\xi, \xi)}.$$

Remarque que, si $\xi \in B_{\varepsilon/3}$, $\hat{\nu}(\xi) = 1$ et $(d\hat{\nu})(\xi) = 0$.

La forme $\hat{\nu}\sigma \in \Omega^{k-2}(B_\varepsilon)$ s'étend alors, par 0 hors de B_ε , en une forme $\sigma' \in \Omega^{k-2}(M)$, et $\theta' = \theta - d\sigma' \in \Omega^{k-1}(M)$ est l'antécédent cherché : en effet, d'une part $d\theta' = d\theta = \omega$; d'autre part $\theta'|_{B_\varepsilon} = \theta_\varepsilon - d(\hat{\nu}\sigma) = (1-\hat{\nu})\theta_\varepsilon - (d\hat{\nu})\sigma$, d'où $\theta'|_{B_{\varepsilon/3}} = 0$, ce qui implique $\text{Supp } \theta' \cap N = \emptyset$, donc, par compacité de M , $\theta'|_{M \setminus N} \in \Omega_C^{k-1}(M \setminus N)$.

(ii) χ est surjective.

Soit $\omega \in Z^k(M, N)$. Il s'agit encore de rogner ω au voisinage de N . On utilise toujours les notations de (i).

Soit $\varepsilon > 0$: comme précédemment, $\omega_\varepsilon = \omega|_{B_\varepsilon} \in Z^k(B_\varepsilon, N) = B^k(B_\varepsilon, N)$ et il existe une forme $\theta \in \Omega^{k-1}(B_\varepsilon, N)$ telle que $\omega_\varepsilon = d\theta$. Comme précédemment, $\hat{\omega}$ s'étend, par 0 hors de B_ε , en une forme $\theta' \in \Omega^{k-1}(M, N)$, et $\omega' = \omega - d\theta' \in \Omega^k(M, N)$ est la forme cherchée : en effet $d\omega' = 0$ et $\omega'|_{B_{\varepsilon/3}} = 0$, d'où $\omega'|_{M \setminus N} \in Z_C^k(M \setminus N)$. Trivialement, $\chi([\omega']|_{M \setminus N}) = [\omega'] = [\omega]$. \square

La conjonction des théorèmes 4.8 et 4.10 permet le calcul direct de deux cohomologies importantes.

4.19. THEOREME : Pour tout entier n ,

$$H_C^k(\mathbb{R}^n) = 0 \quad \text{si } k \neq n,$$

$$H_C^n(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}.$$

Démonstration :

Pour $n = 0$, $H_C^*(\mathbb{R}^0) = H^*(\mathbb{R}^0)$ et le résultat est déjà connu.

Soit alors $n \geq 1$ et $a \in S^n$. On sait (cf. par exemple III.2.2 (iii) 1°)) que \mathbb{R}^n est homéomorphe à $S^n \setminus \{a\}$, $\{a\}$ étant une sous-variété fermée de dimension 0 de la variété compacte S^n . D'après 4.10 on a donc, pour tout entier k , $H_C^k(\mathbb{R}^n) \cong H^k(S^n, \{a\})$.

Si $n = 1$, la suite exacte 4.8 se réduit à

$$0 \rightarrow H^0(S^1, \{a\}) \rightarrow H^0(S^1) \xrightarrow{\cong} H^0(\{a\}) \rightarrow H^1(S^1, \{a\}) \rightarrow H^1(S^1) \rightarrow 0.$$

Partout ailleurs, elle est de la forme $\rightarrow 0 \rightarrow H^k(S^1, \{a\}) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow$, d'où $H_C^k(\mathbb{R}) = 0$ pour $k \geq 2$.

Le début peut se réécrire

$$0 \rightarrow H_C^0(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R} \xrightarrow{0} H_C^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow 0,$$

d'où $H_C^0(\mathbb{R}) = 0$ et $H_C^1(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$.

Si $n \geq 2$, la suite exacte 4.8 n'a de termes non nuls qu'en deux endroits :

$$0 \rightarrow H^0(S^n, \{a\}) \rightarrow H^0(S^n) \xrightarrow{\cong} H^0(\{a\}) \xrightarrow{0} H^1(S^n, \{a\}) \rightarrow 0$$

et

$$0 \rightarrow H^n(S^n, \{a\}) \rightarrow H^n(S^n) \rightarrow 0,$$

lesquels donnent respectivement

$$H_C^0(\mathbb{R}^n) \cong H_C^1(\mathbb{R}^n) = 0 \text{ et } H_C^n(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R} \quad . \quad \square$$

4.20. REMARQUE :

Ici, on connaît explicitement un voisinage tubulaire de $\{a\}$ dans S^n : il n'est donc pas nécessaire de faire appel au Théorème 4.17.

Un fibré dont la base est réduite à un point ne peut qu'être trivial, et il n'y a pas de conditions topologiques à vérifier. Il suffit de munir l'unique fibre d'une structure d'espace vectoriel.

Or, si $a' = -a$, $S^n \setminus \{a'\}$ est un voisinage ouvert de a (ou de $\{a\}$) dans S^n , difféomorphe à \mathbb{R}^n par la projection stéréographique ϕ de pôle a' sur l'hyperplan équatorial orthogonal à a et a' . La structure d'espace vectoriel de dimension n sur \mathbb{R} est fournie à $S^n \setminus \{a'\}$ en posant,

$$\text{pour tous } x, y \in S^n \setminus \{a'\}, \quad x+y = \phi^{-1}(\phi(x) + \phi(y))$$

et

$$\text{pour tous } x \in S^n \setminus \{a'\}, \quad \lambda x = \phi^{-1}(\lambda \phi(x)) .$$

4.21. THEOREME :

Soit n et k deux entiers.

$$\text{Si } k = 2\ell, \ell \in \mathbb{N}, 0 \leq \ell \leq n, \quad H^k(\mathbb{C}P^n) \cong \mathbb{R} .$$

$$\text{Dans tous les autres cas, } H^k(\mathbb{C}P^n) = 0 .$$

Démonstration :

(i) On sait que $\mathbb{C}P^0$ est un point et que $\mathbb{C}P^1$ est homéomorphe à S^2 (cf. III.7.2). Le théorème est donc vrai dans ces deux cas.

(ii) Dans tous les cas, comme $\mathbb{C}P^n$ est une variété de dimension $2n$ (III.6.6), $H^k(\mathbb{C}P^n) = 0$ si $k > 2n$.

(iii) On suppose désormais $n \geq 2$. On pose $M = \mathbb{C}P^n$, $N = \mathbb{C}P^{n-1}$. Il s'agit bien d'une paire compacte ; en outre $M \setminus N$ est un ouvert de carte de $\mathbb{C}P^n$, homéomorphe à \mathbb{C}^n , donc à \mathbb{R}^{2n} (cf. III.2.8, 2.10 et 6.6).

La suite exacte 4.8

$$H^{k-1}(M, N) \rightarrow H^{k-1}(M) \rightarrow H^{k-1}(N) \rightarrow H^k(M, N) \rightarrow H^k(M) \rightarrow H^k(N)$$

s'écrit alors

$$H_{\mathbb{C}}^{k-1}(\mathbb{R}^{2n}) \rightarrow H^{k-1}(\mathbb{C}P^n) \rightarrow H^{k-1}(\mathbb{C}P^{n-1}) \rightarrow H_{\mathbb{C}}^k(\mathbb{R}^{2n}) \rightarrow H^k(\mathbb{C}P^n) \rightarrow H^k(\mathbb{C}P^{n-1}).$$

Ainsi pour $k = 2n$ on obtient (cf. (ii) et 4.19)

$$0 \rightarrow H^{2n-1}(\mathbb{C}P^n) \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow H^{2n}(\mathbb{C}P^n) \rightarrow 0,$$

d'où $H^{2n-1}(\mathbb{C}P^n) = 0$ et $H^{2n}(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{R}$.

Pour $k < 2n$, on obtient

$$0 \rightarrow H^{k-1}(\mathbb{C}P^n) \rightarrow H^{k-1}(\mathbb{C}P^{n-1}) \rightarrow 0$$

et le résultat s'ensuit par récurrence. \square

4.22. REMARQUE :

Ici encore on dispose d'un voisinage tubulaire explicite. (On reprend les notations du chapitre III).

Soit $q : \mathbb{C}P^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ la projection canonique. Conformément à la tradition on note $[z_1, \dots, z_{n+1}]$ pour $q(z_1, \dots, z_{n+1})$. L'inclusion $\iota : \mathbb{C}P^{n-1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ est donnée par $\iota([z_1, \dots, z_n]) = [z_1, \dots, z_n, 0]$. D'autre part, pour tous $z, z' \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $[0, \dots, 0, z] = [0, \dots, 0, z']$: soit $Z \in \mathbb{C}P^n$ ce point. (Autrement dit, $Z = \{0\}_{\mathbb{C}^n} \times \mathbb{C}$).

Alors $E = \mathbb{C}P^n \setminus \{Z\}$ est un ouvert de $\mathbb{C}P^n$, $\mathbb{C}P^{n-1} \subset E$, et $\pi : E \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$: $[z_1, \dots, z_{n+1}] \mapsto [z_1, \dots, z_n]$ vérifie $\pi \circ \iota = \text{Id}_{\mathbb{C}P^{n-1}}$. De plus $(E, \pi, \mathbb{C}P^{n-1})$ est un fibré vectoriel dont les ouverts trivialisants ne sont autres que les ouverts de cartes standard de $\mathbb{C}P^{n-1}$.

En effet, pour $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$, $\pi^{-1}(U_i) = \{[z_1, \dots, z_{n+1}] \in \mathbb{C}P^n \mid z_i \neq 0\}$ car $[z_1, \dots, z_{n+1}] \in E$ si $z_i \neq 0$ pour $i \leq n$. On peut alors définir

$$\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{C} : [z_1, \dots, z_{n+1}] \mapsto ([z_1, \dots, z_n], \frac{z_{n+1}}{z_i}) .$$

Vérifier qu'il s'agit bien d'un difféomorphisme rendant commutatif le diagramme 4.11(2) (i) est affaire de routine.

Pour l'aspect vectoriel des choses, on donne, si $\zeta = [z_1, \dots, z_n] \in U_i$, sa structure d'espace vectoriel de dimension 1 sur \mathbb{C} (4.11(1)) à E_ζ en imposant que l'évidente bijection

$$\lambda_i : E_\zeta \rightarrow \mathbb{C} : [z_1, \dots, z_{n+1}] \mapsto \frac{z_{n+1}}{z_i}$$

soit un \mathbb{C} -isomorphisme : alors 4.11 (2) (ii) sera automatiquement vérifié... Encore faut-il s'assurer que cette définition est sans ambiguïté (et donc en fait naturelle), ce qui est vrai puisque, si $\zeta \in U_i \cap U_j$, $\lambda_j \circ \lambda_i^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : u \mapsto \frac{z_j}{z_i} u$: il s'agit d'un isomorphisme ; autrement dit, λ_i est un isomorphisme ssi λ_j en est un.

Pour les espaces projectifs réels, voir 5.15 et la suite.

5. QUELQUES THEOREMES CÉLÈBRES.

Il s'agit de résultats classiques et frappants qui sont démontrables par les moyens de ce chapitre.

La simple connaissance de la cohomologie des sphères, obtenue dès le § 2, permet de prouver le

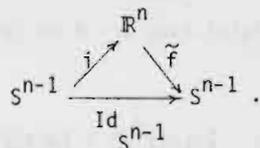
5.1. THEOREME : Si n est un entier, $n \geq 1$, la sphère S^{n-1} n'est pas un rétracte de B^n , la boule-unité fermée de \mathbb{R}^n ; c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'application continue $f : B^n \rightarrow S^{n-1}$ dont la restriction à S^{n-1} soit l'application identique.

Démonstration : Le théorème est évident si $n = 1$. En effet, $B^1 = [-1, +1]$ est connexe tandis que $S^0 = \{-1, +1\}$ ne l'est pas. Une application continue $f : B^1 \rightarrow S^0$ est forcément constante, ce qui est incompatible avec la condition que $f|_{S^0} = \text{Id}_{S^0}$.

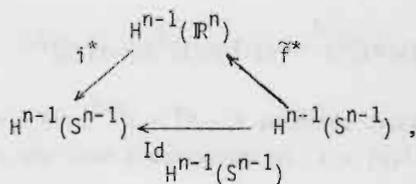
Pour $n \geq 2$, raisonnons par l'absurde. Si une $f : B^n \rightarrow S^{n-1}$ conforme à l'énoncé existait, l'application $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow S^{n-1}$ définie en posant

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in B^n \\ \frac{x}{\|x\|} & \text{si } x \notin B^n \end{cases}$$

serait continue et rendrait commutatif le digramme suivant (i est l'inclusion) :



Prenant la cohomologie en dimension $(n-1)$, on obtient (grâce à IV.3.8 puisque \tilde{f} est seulement continue)



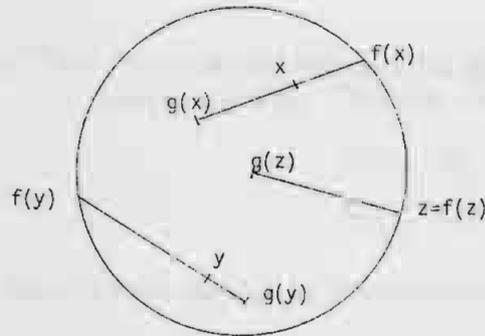
c'est-à-dire



une évidente absurdité. \square

5.2. COROLLAIRE (Théorème du point fixe de Brouwer). Soit $g : B^n \rightarrow B^n$ une application continue. Alors il existe un $x \in B^n$ tel que $g(x) = x$.

Démonstration : Si, pour tout $x \in B^n$, $g(x) \neq x$, soit $f(x)$ le point d'intersection avec S^{n-1} de la demi-droite d'origine $g(x)$ passant par x .



En écrivant que $f(x) = \lambda x + (1-\lambda)g(x)$ avec $\lambda > 0$ et $\|f(x)\| = 1$, on trouve que λ est la racine positive du trinôme

$$\|x-g(x)\|^2 \lambda^2 + 2(x|g(x)) - \|g(x)\|^2 \lambda + \|g(x)\|^2 - 1,$$

soit $\lambda = \frac{\|g(x)\|^2 - (x|g(x)) + \sqrt{\Delta}}{\|x-g(x)\|^2}$ où

$$\Delta = [(x|g(x)) - \|g(x)\|^2]^2 + (1-\|g(x)\|^2)\|x-g(x)\|^2.$$

On définit ainsi une fonction continue $f : B^n \rightarrow S^{n-1}$. Si $x \in S^{n-1}$, il est clair (sans calculs...) que $\lambda = 1$, ou $f(x) = x$. On obtiendrait donc une contradiction au théorème précédent. \square

Autre résultat dès à présent disponible le

5.3. THEOREME : (Invariance du domaine). Soit n, p deux entiers non nuls, U un ouvert non vide de \mathbb{R}^n , V un ouvert non vide de \mathbb{R}^p . Si U est homéomorphe à V , alors $n = p$.

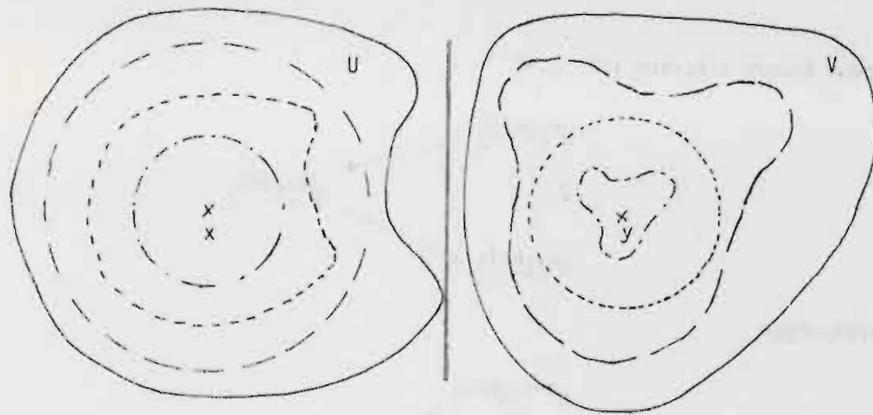
Démonstration :

Soit $f : U \rightarrow V$ un homéomorphisme, $x \in U$, $y = f(x) \in V$. On introduit successivement :

B , une boule ouverte de \mathbb{R}^n , de centre x , telle que $B \subset U$;

B' , \mathbb{R}^p , y , $B' \subset f(B)$;

C , \mathbb{R}^n , x , $C \subset f^{-1}(B')$.



Légende :

----- B et f(B) ; ...B' et f⁻¹(B') ; - . - . - . - C et f(C).

Le diagramme suivant (où les flèches horizontales, induites par f, sont des isomorphismes et les flèches verticales sont induites par les inclusions) est alors commutatif pour tout entier k :

$$\begin{array}{ccc}
 H^k(B \setminus \{x\}) & \xleftarrow{\cong} & H^k(f(B) \setminus \{y\}) \\
 \downarrow i & & \downarrow \\
 H^k(f^{-1}(B') \setminus \{x\}) & \xleftarrow{\cong} & H^k(B' \setminus \{y\}) \\
 \downarrow j & & \downarrow \\
 H^k(C \setminus \{x\}) & \xleftarrow{\cong} & H^k(f(C) \setminus \{y\}) .
 \end{array}$$

Il est immédiat que l'inclusion de C \setminus \{x\} dans B \setminus \{x\} est homotope à l'identité de C \setminus \{x\}, donc la composée j \circ i est un isomorphisme, et l'on tire du diagramme le triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 H^k(B \setminus \{x\}) & & \\
 \downarrow j \circ i \cong & \searrow & H^k(B' \setminus \{y\}) \\
 H^k(C \setminus \{x\}) & \swarrow &
 \end{array}$$

Cela peut encore s'écrire (cf. 2.4)

$$\begin{array}{ccc}
 H^k(S^{n-1}) & \longrightarrow & H^k(S^{p-1}) \\
 \cong \downarrow & & \swarrow \\
 H^k(S^{n-1}) & \longleftarrow &
 \end{array}$$

En particulier

$$\begin{array}{ccc}
 H^{n-1}(S^{n-1}) & \longrightarrow & H^{n-1}(S^{p-1}) \\
 \cong \downarrow & & \swarrow \\
 H^{n-1}(S^{n-1}) & \longleftarrow &
 \end{array}$$

Si on suppose $n < p$, on obtient donc soit

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R} & \longrightarrow & 0 \\
 \cong \downarrow & & \swarrow \\
 \mathbb{R} & \longleftarrow &
 \end{array} \quad (\text{si } n > 1)$$

soit

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 \cong \downarrow & & \swarrow \\
 \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \longleftarrow &
 \end{array} \quad (\text{si } n = 1)$$

absurdité dans les deux cas.

L'hypothèse $p < n$ s'exclut de manière analogue en permutant les rôles de U et de V . \square

Pour les considérations qui suivent, les §§ 2 et 3 sont nécessaires. Le résultat visé est 5.11, mais il y faut d'abord quelques définitions préliminaires.

Soit p un entier, $p \geq 1$, et α un générateur (quelconque) de $H^p(S^p) \cong \mathbb{R}$. Toute application continue $f : S^p \rightarrow S^p$ induit une application linéaire

$f^* : H^p(S^p) \rightarrow H^p(S^p) : \text{il existe donc un (unique) } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ indépendant du choix de } \alpha, \text{ tel que } f^*(\alpha) = \lambda\alpha.$

5.4. DEFINITION : Ce coefficient λ s'appelle degré de f .

5.5. REMARQUES :

(i) Deux applications homotopes ont évidemment le même degré.

(ii) En fait le degré est toujours un entier (mais la cohomologie de De Rham n'est pas le bon cadre pour démontrer ce fait).

Toute application continue $g : S^p \times S^p \rightarrow S^p$ induit une application linéaire $g^* : H^p(S^p) \rightarrow H^p(S^p \times S^p)$. Comme $H^*(S^p \times S^p) \cong H^*(S^p) \otimes H^*(S^p)$, $H^p(S^p \times S^p) \cong H^p(S^p) \otimes H^0(S^p) \oplus H^0(S^p) \otimes H^p(S^p)$, et $g^*(\alpha) = u(\alpha \otimes 1) + v(1 \otimes \alpha)$.

5.6. DEFINITION : On appelle bidegré de g le couple (μ, ν) . (Ici encore, $(\mu, \nu) \in \mathbb{Z}^2$).

L'intérêt porté aux applications continues $S^p \times S^p \rightarrow S^p$ provient en fait de préoccupations algébriques (ce n'est pas le seul cas où la topologie est nécessaire pour régler des questions d'algèbre ; voir par exemple le théorème de d'Alembert-Gauss). Il s'agit de déterminer les valeurs de l'entier n pour lesquelles \mathbb{R}^n peut être muni d'une structure d'algèbre sans diviseurs de 0, c'est-à-dire d'une application $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui soit \mathbb{R} -bilinéaire (donc en particulier distributive à gauche et à droite par rapport à l'addition) et telle que, si $x \neq 0$ et $y \neq 0$, $\phi(x, y) \neq 0$. Noter qu'on ne demande ni commutativité ni même associativité.

La donnée de ϕ permet de définir - d'une part une application linéaire $\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ telle que, si $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\text{Dét } \gamma(x) \neq 0$ en posant, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\gamma(x).y = \phi(x, y)$;

- d'autre part une application linéaire $\delta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ telle que, si $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\text{Dét } \delta(y) \neq 0$ en posant pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\delta(y).x = \phi(x, y)$. (Ces applications linéaires sont différentes si ϕ n'est pas commutative).

Plus précisément, la donnée de ϕ , celle de γ ou celle de δ sont équivalentes.

Noter que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et tout $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\gamma(x)$ et $\delta(y)$ sont des isomorphismes.

5.7. LEMME : A toute structure d'algèbre Φ sur \mathbb{R}^n sans diviseurs de 0 peut être associée une structure d'algèbre $\hat{\Phi}$ sur \mathbb{R}^n sans diviseurs de 0 qui soit unitaire c'est-à-dire pour laquelle existe un $\varepsilon \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\hat{\Phi}(x, \varepsilon) = \hat{\Phi}(\varepsilon, x) = x$.

Démonstration : Partant de Φ , on considère δ définie comme ci-dessus, on choisit arbitrairement $\varepsilon \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et on pose, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $\bar{\delta}(y) = \delta(\varepsilon)^{-1} \circ \delta(y) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Alors l'application $\bar{\delta} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : y \mapsto \bar{\delta}(y)$ est linéaire et, si $y \neq 0$, $\text{Dét } \bar{\delta}(y) = (\text{Dét } \delta(\varepsilon))^{-1} \cdot (\text{Dét } \delta(y)) \neq 0$. En outre $\bar{\delta}(\varepsilon) = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$, c'est-à-dire, notant $\bar{\Phi}$ la structure d'algèbre associée à $\bar{\delta}$, que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $x = \bar{\delta}(\varepsilon).x = \bar{\Phi}(x, \varepsilon)$. Ainsi $\bar{\Phi}$ est muni d'une unité à droite ε .

On considère alors

$$\bar{\gamma} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : x \mapsto (y \mapsto \bar{\Phi}(x, y)).$$

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\bar{\gamma}(x).\varepsilon = \bar{\Phi}(x, \varepsilon) = x$; il s'en déduit en particulier que $\varepsilon = \bar{\gamma}(\varepsilon).\varepsilon$, d'où $\bar{\gamma}(\varepsilon)^{-1}.\varepsilon = \varepsilon$.

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\hat{\gamma}(x) = \bar{\gamma}(x) \circ \bar{\gamma}(\varepsilon)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\hat{\Phi}(x, y) = \hat{\gamma}(x).y$. Comme précédemment, $\hat{\gamma} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : x \mapsto \hat{\gamma}(x)$ est linéaire et, si $x \neq 0$, $\text{Dét } \hat{\gamma}(x) \neq 0$.

Mais cette fois, non seulement $\hat{\gamma}(\varepsilon) = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$ (et ε est unité à gauche pour $\hat{\Phi}$), mais encore, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}(x).\varepsilon &= \bar{\gamma}(x).\bar{\gamma}(\varepsilon)^{-1}.\varepsilon \\ &= \bar{\gamma}(x).\varepsilon = x. \end{aligned}$$

Ainsi ε est unité bilatère pour $\hat{\Phi}$. \square

5.8. COROLLAIRE : Si \mathbb{R}^n est muni d'une structure d'algèbre sans diviseurs de 0, on peut définir une application continue

$$m : S^{n-1} \times S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$$

et trouver un élément $e \in S^{n-1}$ tel que, pour tout $x \in S^{n-1}$,

$$m(e, x) = m(x, e) = x.$$

Démonstration : On rappelle qu'une application \mathbb{R} -bilineaire $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est nécessairement continue.

Si $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une structure d'algèbre sans diviseurs de 0, on construit $\hat{\phi}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ selon le lemme précédent. On pose alors, pour tous $x, y \in S^{n-1}$,

$$m(x, y) = \frac{\hat{\phi}(x, y)}{\|\hat{\phi}(x, y)\|} \in S^{n-1}.$$

Cette définition a bien un sens (puisque $0 \notin S^{n-1} \dots$). Si on pose $e = \frac{\varepsilon}{\|\varepsilon\|}$, alors pour tout $y \in S^{n-1}$,

$$m(e, y) = \frac{\frac{1}{\|\varepsilon\|} \hat{\phi}(\varepsilon, y)}{\frac{1}{\|\varepsilon\|} \|\hat{\phi}(\varepsilon, y)\|} = \frac{y}{\|y\|} = y;$$

de même, pour tout $x \in S^{n-1}$, $m(x, e) = x$. \square

Cette propriété est élevée au rang de

5.9. DEFINITION : Une H-variété est la donnée d'une variété différentiable X , d'une application continue $m : X \times X \rightarrow X$ et d'un élément $e \in X$ tels que, pour tout $x \in X$, $m(e, x) = m(x, e) = x$.

... et l'on est ramené à la recherche des valeurs de n pour lesquelles S^{n-1} peut être munie d'une structure de H-variété.

5.10. REMARQUES :

(i) On voit directement que, si n est impair, $n \geq 3$, \mathbb{R}^n ne peut être muni d'une structure d'algèbre sans diviseurs de 0.

En effet, dès que $n \geq 2$, si ϕ , donc γ , existent, donc sont continues, l'image par $\text{Dét} \circ \gamma$ de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ - qui est connexe - sera connexe et contenue dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Or, pour n impair et pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

$$\text{Dét}(\gamma(x)) = - \text{Dét}(\gamma(-x)) ,$$

d'où une contradiction.

Il reste qu'on peut se poser la question d'une éventuelle structure de H-variété pour S^{n-1} même dans ce cas, et que, de toute façon, l'argument est inutilisable pour n pair.

(ii) Des structures d'algèbre sans diviseurs de zéro sont connues pour \mathbb{R}^n quand $n = 1$ (et pour cause...), 2 (corps des complexes \mathbb{C}), 4 (corps (gauche !) des quaternions \mathbb{H}) et 8 (algèbre (non associative !!!) des octaves de Cayley définie en identifiant \mathbb{R}^8 à \mathbb{H}^2 et en posant, pour tous $q, r, q', r' \in \mathbb{H}$, $(q, r) \cdot (q', r') = (qq' - \bar{r}'r, r'q + r\bar{q}')$).

Nous devons nous contenter ici du

5.11. THEOREME : (Hopf) Si S^{n-1} est une H-variété, n est pair ou $n = 1$.

Cependant la question est complètement résolue par le

5.12. THEOREME (J.F. Adams) Les seules valeurs de n pour lesquelles S^{n-1} est une H-variété (et donc aussi pour lesquelles \mathbb{R}^n peut être muni d'une structure d'algèbre sans diviseurs de zéro) sont 1, 2, 4 et 8. (cf. [8] V.1).

Démonstration de 5.11 : Hormis le cas $n = 1$, qui est trivial, elle découle immédiatement des deux lemmes suivants.

5.13. LEMME : Si p est un entier strictement positif et que S^p soit une H-variété donnée par $m : S^p \times S^p \rightarrow S^p$ et $e \in S^p$, le bidegré de m est $(1, 1)$.

Démonstration : Pour $b \in S^p$, soit $\delta_b : S^p \rightarrow S^p : x \mapsto m(x, b)$. Quels que soient b et $c \in S^p$, $\delta_b = \delta_c$ puisque S^p est connexe par arcs pour $p \geq 1$. Ainsi (5.5(i)) toutes les applications δ_b ont le même degré quel que soit $b \in S^p$: soit r ce degré commun. On voit de même que toutes les applications $\gamma_a : S^p \rightarrow S^p : y \mapsto m(a, y)$ ont le même degré s quel que soit $a \in S^p$.

Montrons que (r, s) est le bidegré de m . En introduisant pour tout $b \in S^p$ l'application $\epsilon_b : S^p \rightarrow S^p \times S^p : x \mapsto (x, b)$, on obtient $\delta_b = m \circ \epsilon_b$. De même pour

tout $a \in S^p$, $\gamma_a = m \circ \eta_a$ où $\eta_a : S^p \rightarrow S^p \times S^p : y \mapsto (a, y)$. Or il est immédiat (regarder au besoin ce qui arrive à $\sigma \bar{\wedge} 1$ et $1 \bar{\wedge} \sigma$, où σ est la forme-volume canonique sur S^p et 1 la fonction constante égale à 1 sur S^p ; cf. l'introduction à 3.2 et IV.6.5).

$$\varepsilon_b^*(\alpha \otimes 1) = \alpha, \quad \varepsilon_b^*(1 \otimes \alpha) = 0,$$

$$\eta_a^*(\alpha \otimes 1) = 0, \quad \eta_a^*(1 \otimes \alpha) = \alpha.$$

Si le bidegré de m est (μ, ν) , on a donc

$$r\alpha = \delta_b^*(\alpha) = \varepsilon_b^*(\mu(\alpha \otimes 1) + \nu(1 \otimes \alpha)) = \mu\alpha,$$

et $r = \mu$. De même $s = \nu$.

Par ailleurs, en faisant $a = b = e$, donc $\gamma_a = \delta_b = \text{Id}_{S^p}$, on trouve $r = s = 1$. \square

5.14. LEMME : Si p est un entier pair non nul et que S^p soit une H -variété donnée par $m : S^p \times S^p \rightarrow S^p$, le bidegré de m est de la forme $(0, s)$ ou $(r, 0)$.

Démonstration : Si α est un générateur de $H^p(S^p)$, $\alpha^2 \in H^{2p}(S^p) = 0$, d'où

$$\begin{aligned} 0 &= m^*(\alpha^2) = (m^*(\alpha))^2 = [r(\alpha \otimes 1) + s(1 \otimes \alpha)]^2 \\ &= r^2(\alpha^2 \otimes 1) + rs(1 + (-1)^{p^2})(\alpha \otimes \alpha) + s^2(1 \otimes \alpha^2) \\ &= rs(1 + (-1)^{p^2})(\alpha \otimes \alpha). \end{aligned}$$

Dans le cas où p est pair, on obtient

$$rs(\alpha \otimes \alpha) = 0$$

et comme $\alpha \otimes \alpha$, générateur de $H^{2p}(S^p \times S^p) \cong H^p(S^p) \otimes H^p(S^p)$, n'est pas nul, il résulte que $rs = 0$. \square

Enfin il ne saurait être question de terminer ce chapitre sans calculer la cohomologie des espaces projectifs réels, la seule qui nous manque encore parmi les variétés vraiment élémentaires.

On pouvait s'attendre que ce calcul trouve sa place au §4 en compagnie de l'analogue complexe. En effet, $\mathbb{R}P^0$ est un point, $\mathbb{R}P^1$ est homéomorphe à S^1 (III.7.1), d'où

$$H^0(\mathbb{R}P^0) \cong \mathbb{R}, \quad H^k(\mathbb{R}P^0) = 0 \text{ pour } k \geq 1;$$

$$H^0(\mathbb{R}P^1) \cong H^1(\mathbb{R}P^1) \cong \mathbb{R}, \quad H^k(\mathbb{R}P^1) = 0 \text{ pour } k \geq 2.$$

Il est vrai aussi que, pour tout $n \geq 2$, la paire $(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^{n-1})$ est compacte, $\mathbb{R}P^n \setminus \mathbb{R}P^{n-1}$ étant un ouvert de carte homéomorphe à \mathbb{R}^n , et la démonstration semble s'enclencher comme en 4.21.

Or, dès la valeur $n = 2$, on trouve ceci :

$$0 \rightarrow H^0(\mathbb{R}P^2) \rightarrow H^0(\mathbb{R}P^1) \rightarrow H^1_C(\mathbb{R}^2) \rightarrow H^1(\mathbb{R}P^2) \rightarrow H^1(\mathbb{R}P^1) \xrightarrow{\partial} H^2_C(\mathbb{R}^2) \rightarrow H^2(\mathbb{R}P^2) \rightarrow 0$$

c'est-à-dire

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow 0 \rightarrow ? \rightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\partial} \mathbb{R} \rightarrow ? \rightarrow 0.$$

Deux cas seulement sont possibles par surjectivité de l'avant-dernière flèche :

ou bien $H^2(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{R}$, auquel cas $\partial = 0$ et $H^1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{R}$;

ou bien $H^2(\mathbb{R}P^2) = 0$, auquel cas ∂ est surjective, donc bijective, et $H^1(\mathbb{R}P^2) = 0$.

La suite exacte ne permet pas de décider (faute, par exemple, de connaître assez bien ∂ : cf. 4.9 (ii)).

En dimensions supérieures, la suite exacte se terminera par

$$0 \rightarrow H^{n-1}(\mathbb{R}P^n) \rightarrow H^{n-1}(\mathbb{R}P^{n-1}) \xrightarrow{\partial} \mathbb{R} \rightarrow H^n(\mathbb{R}P^n) \rightarrow 0.$$

Ainsi, pour tout $n \geq 2$, $\dim H^n(\mathbb{R}P^n) \leq 1$ et la question sera réglée en n si $H^{n-1}(\mathbb{R}P^{n-1}) = 0$. Mais si $H^{n-1}(\mathbb{R}P^{n-1}) \cong \mathbb{R}$, on retrouve la même ambiguïté que précédemment.

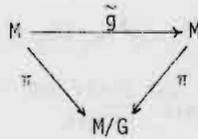
La première urgence est donc de déterminer $H^n(\mathbb{R}P^n)$ pour $n \geq 2$ par d'autres moyens :

Soit $M = S^n$ et $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On fait agir G librement sur M en posant pour tout $x \in M$

$$\bar{0}.x = x \quad \text{et} \quad \bar{1}.x = -x,$$

et la variété différentiable (cf. III.7.6) M/G n'est autre que $\mathbb{R}P^n$.

Dans cette situation d'une variété différentiable M sur laquelle un groupe fini G opère librement, on a pour tout $g \in G$ un diagramme commutatif



où π est la projection canonique et, pour tout $x \in M$, $\tilde{g}(x) = g.x$. Il en résulte que, pour tout entier k ,

$$\pi^* : \Omega^k(M/G) \longrightarrow \Omega^k(M)$$

factorise à travers $\Omega^k(M)^G = \{\omega \in \Omega^k(M) \mid \text{pour tout } g \in G, \tilde{g}^*(\omega) = \omega\}$.

Le lecteur démontrera sans aucune peine le

5.15. LEMME : Pour tout entier k , π^* est un isomorphisme entre $\Omega^k(M/G)$ et $\Omega^k(M)^G$.

On est alors ramené à des considérations algébriques, et d'ailleurs élémentaires, dont on abandonne également la démonstration au vaillant lecteur :

5.16. LEMME : Si C^* est un complexe d'espaces vectoriels sur lequel opère un groupe fini G , alors G opère aussi sur $H^*(C^*)$ et, pour tout entier k , $H^k(C^{*G}) = H^k(C^*)^G$.

Dans les circonstances qui nous occupent, on en déduit le

5.17. COROLLAIRE : Pour tous entiers n, k ,

$$H^k(\mathbb{R}P^n) \cong H^k(S^n)^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}.$$

La question étant immédiatement réglée si $0 < k < n$ (pour cause de nullité de $H^k(S^n)$) et si $k = 0$ (par connexité de $\mathbb{R}P^n$), il ne reste plus qu'à déterminer comment $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ opère sur $H^n(S^n)$.

5.18. LEMME :

Si n est pair, $H^n(S^n)^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} = 0$.

Si n est impair, $H^n(S^n)^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \cong \mathbb{R}$.

(L'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur S^n est l'action antipodale définie dans l'introduction à 5.15).

Démonstration : On sait que $\sigma_n = \int_{i=1}^{n+1} (-1)^i x_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_{n+1}$ est la forme-volume canonique sur S^n (IV.6.5). Il est clair que l'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur S^n , elle-même induite par l'action analogue sur \mathbb{R}^{n+1} , induit

$$\tilde{0}^*(\sigma_n) = \sigma_n \quad \text{et} \quad \tilde{1}^*(\sigma_n) = (-1)^{n+1} \sigma_n.$$

Il en est de même pour $[\sigma_n]$, lequel engendre $H^n(S^n)$. \square

En récapitulant, on a démontré le

5.19. THEOREME : Pour tout entier n , $H^0(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{R}$.

Si n est pair, $n \neq 0$, $H^n(\mathbb{R}P^n) = 0$,

si n est impair, $H^n(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{R}$.

Pour tous entiers $n, k, k \neq 0, k \neq n$, $H^k(\mathbb{R}P^n) = 0$.

5.20. REMARQUE : On peut se passer de 5.18 en retournant à la suite exacte. D'après 5.17, pris avec $k = n-1$, $H^{n-1}(\mathbb{R}P^n) = 0$ pour tout $n \geq 2$. Ainsi la suite exacte 4.8 se termine par

$$0 \rightarrow H^{n-1}(\mathbb{R}P^{n-1}) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R} \rightarrow H^n(\mathbb{R}P^n) \rightarrow 0$$

et une récurrence, démarrée avec $H^1(\mathbb{R}P^1) \cong \mathbb{R}$, montre que $H^n(\mathbb{R}P^n)$ est nul ou isomorphe à \mathbb{R} suivant la parité de n .