

4.31. REMARQUE : Par contre, dans le cas où n est impair, un tel champ de vecteurs est très facile à construire : poser, pour tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_{2p-1}, x_{2p}) \in S^{2p-1} \subset \mathbb{R}^{2p}$, $\omega(x) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \dots, -x_{2p}, x_{2p-1})$. \square

Un dernier exemple d'application où la parité apparaît encore plus nettement (cf. aussi 5.4 et suivants) :

4.32. THEOREME : Quel que soit l'entier n , si un groupe cyclique fini opère librement sur $\mathbb{C}P^n$, ce groupe est d'ordre 2.

Démonstration : Soit C un groupe cyclique fini opérant librement sur $\mathbb{C}P^n$, r son ordre, $\omega \in C$ un générateur.

Comme ω^r est l'élément neutre de C , $\tilde{\omega} : \mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{C}P^n$ (cf. III.7.6) vérifie $(\tilde{\omega})^r = (\tilde{\omega}^r) = \text{Id}_{\mathbb{C}P^n}$, donc $\tilde{\omega}^* : H^*(\mathbb{C}P^n) \rightarrow H^*(\mathbb{C}P^n)$ vérifie $(\tilde{\omega}^*)^r = (\tilde{\omega}^r)^* = \text{Id}_{H^*(\mathbb{C}P^n)}$.

Or, pour tout entier i ($0 \leq i \leq n$), $H^{2i}(\mathbb{C}P^n) \cong \mathbb{R}$; ainsi, pour tout i ($0 \leq i \leq n$), $\tilde{\omega}_{2i}^* : H^{2i}(\mathbb{C}P^n) \rightarrow H^{2i}(\mathbb{C}P^n)$ est soit $\text{Id}_{H^{2i}(\mathbb{C}P^n)}$, soit $(-\text{Id}_{H^{2i}(\mathbb{C}P^n)})$.

Dans l'un et l'autre cas, $(\tilde{\omega}_{2i}^*)^2 = \text{Id}_{H^{2i}(\mathbb{C}P^n)}$ et finalement $(\tilde{\omega}^2)^* = (\tilde{\omega}^*)^2 = \text{Id}_{H^*(\mathbb{C}P^n)}$, d'où $\chi_{\tilde{\omega}^2} = \chi(\mathbb{C}P^n) = n+1 \neq 0$: il en résulte que $\tilde{\omega}^2$ a un point fixe donc, C opérant librement sur $\mathbb{C}P^n$, que ω^2 est l'élément neutre de C . \square

5. COMPLÉMENTS ET PROBLÈMES.

D'abord quelques exercices relatifs à la caractéristique d'Euler-Poincaré. On n'a pas besoin pour la définir (cf. 4.16) - non plus d'ailleurs que pour définir le nombre de Lefschetz - de supposer la variété orientable. Par contre la cohomologie de celle-ci doit être de dimension finie, ce qu'on supposera de toutes les variétés qui interviendront dans les énoncés qui suivent.

5.1. : Si U et V sont des ouverts de la variété différentiable M tels que $M = U \cup V$,

$$\chi(M) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V).$$

5.2. : Pour un produit cartésien :

$$\chi(M \times N) = \chi(M) \cdot \chi(N).$$

Plus généralement on peut définir (de façon analogue à V.4.11) la notion de fibration différentielle : (E, π, B) est une fibration différentielle de fibre F (B, E, F étant des variétés différentiables et $\pi : E \rightarrow B$ une application de classe C^∞) si tout point de B possède un voisinage V (dit trivialisant) au-dessus duquel le diagramme suivant est rendu commutatif par un difféomorphisme ϕ :

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(V) & \xrightarrow{\phi} & V \times F \\ \pi \searrow & & \swarrow \text{pr}_1 \\ & V & \end{array}$$

Si B est compacte, il existe un recouvrement fini de B par des ouverts trivialisants possédant la propriété 3.1. (ii).

5.3. : Si (E, π, B) est une fibration différentielle de fibre F , B étant compacte,

$$\chi(E) = \chi(B) \cdot \chi(F) .$$

En déduire

5.4. : Si G est un groupe fini opérant librement sur la variété compacte E (III.7.6), son ordre $|G|$ divise $\chi(E)$.

De là

5.5. : Seul le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ peut opérer librement sur S^{2n} .

Par contre, la sphère S^{2n-1} pouvant être regardée comme sphère unité de \mathbb{C}^n (en particulier $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$),

5.6. : S^1 opère librement sur S^{2n-1} .

Pour tout entier q , $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ (isomorphe au groupe des racines $q^{\text{èmes}}$ de l'unité) opère librement sur S^{2n-1} .

En ce qui concerne les espaces projectifs complexes (cf. 4.32) :

5.7. : Si n est pair, aucun groupe cyclique fini ne peut opérer librement sur $\mathbb{C}P^n$.

Par contre

5.8. : L'opération de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{C}P^{2n-1}$ définie par

$$[z_1, z_2, \dots, z_n, z_{n+1}, \dots, z_{2n}] \mapsto [-\overline{z_{n+1}}, \dots, -\overline{z_{2n}}, \overline{z_1}, \dots, \overline{z_n}]$$

est libre.

Toujours la caractéristique d'Euler-Poincaré :

5.9. : Si M est compacte de dimension impaire,

$$\chi(M) = 0 .$$

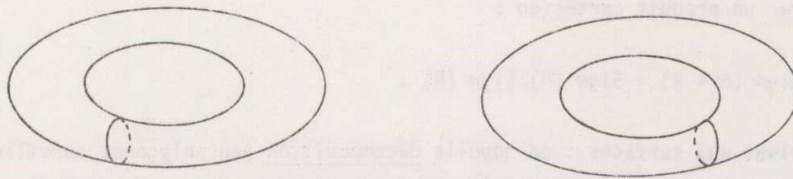
(Démonstration directe si M est orientable. Sinon construire une fibration différentielle (\tilde{M}, π, M) de fibre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ où $\dim \tilde{M} = \dim M$ et \tilde{M} est orientable : \tilde{M} est la variété d'orientation de M).

5.10. : Si M est une surface (variété différentiable compacte de dimension 2) orientable de genre g (cf. 2.22),

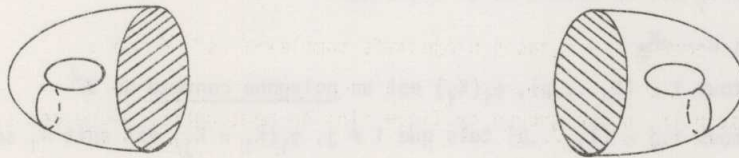
$$\chi(M) = 2 - 2g .$$

Soit $T_1 = S^1 \times S^1$ le tore à 2 dimensions. On admet que l'objet obtenu en

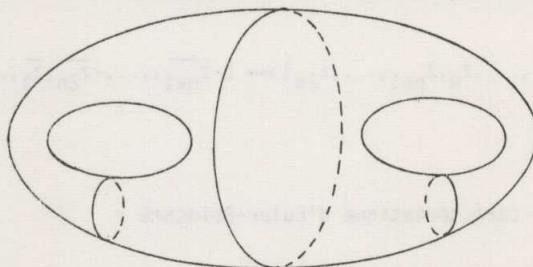
- prenant deux exemplaires de T_1



- ôtant à chacun d'eux l'image d'un disque par une carte



- recollant l'un à l'autre les bords des deux découpes



peut-être muni d'une structure de surface, notée T_2 et baptisée tore à deux trous. (Il est facile de voir que T_2 est une variété topologique. Le problème est de "lisser la soudure" : cf. [13].).

5.11. : Montrer que T_2 est orientable.
Calculer $\chi(T_2)$.

En itérant le procédé, on obtient le tore à m trous T_m (T_3 est le bretzel, T_4 le coup-de-poing américain, etc...).

5.12. : Montrer que T_m est de genre m .

Dans le cas où M est une variété compacte de dimension divisible par 4, sa signature est définie : 2.23.

5.13. : Montrer que $\text{Sign}(M) \equiv \chi(M) \pmod{2}$

5.14. : Pour un produit cartésien :

$$\text{Sign}(M \times N) = \text{Sign}(M) \cdot \text{Sign}(N) .$$

On revient aux surfaces : on appelle décomposition (en polygones curvilignes) d'une surface M la donnée d'une famille finie de compacts K_1, \dots, K_p de M et, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, d'un voisinage ouvert U_i de K_i dans M et d'un difféomorphisme $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$ où V_i est un ouvert de \mathbb{R}^2 tels que

(i) $M = K_1 \cup \dots \cup K_p$

(ii) pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $\phi_i(K_i)$ est un polygone convexe de \mathbb{R}^2

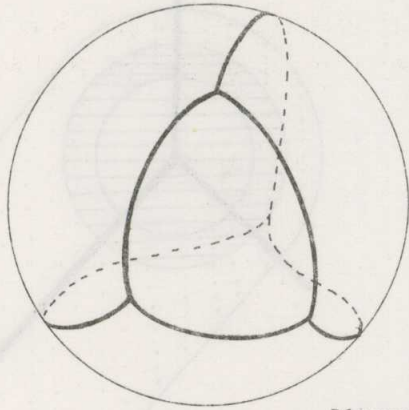
(iii) pour tous $i, j \in \{1, \dots, p\}$ tels que $i \neq j$, $\phi_i(K_i \cap K_j)$ est soit \emptyset , soit

un sommet de P_i , soit un côté de P_i .

(Exemples de figures ci-dessous).

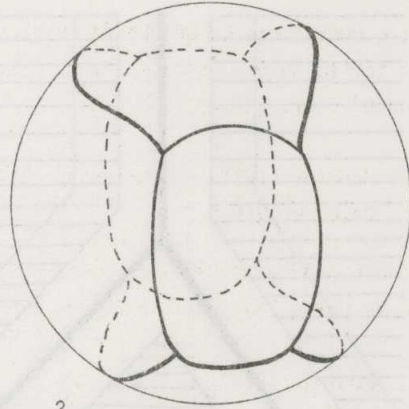
On appelle sommets de la décomposition les images des sommets des P_i par les ϕ_i^{-1} ; arêtes les images des côtés; faces les images des P_i .

Soit S, A, F les nombres respectifs de sommets, arêtes, faces, de la décomposition.



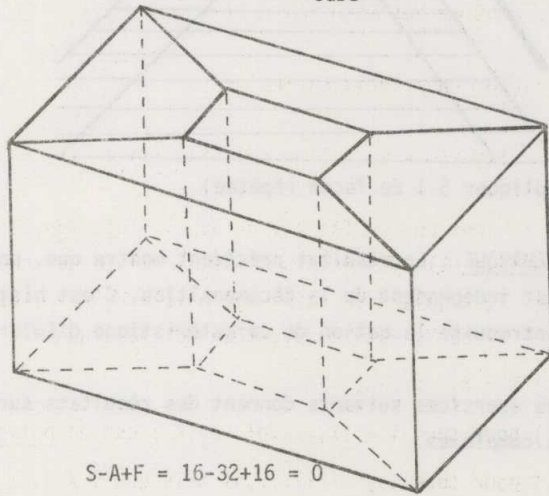
Décompositions de S^2

$S-A+F = 4-6+4 = 2$
"Tétraèdre"



$S-A+F = 8-12+6 = 2$
"Cube"

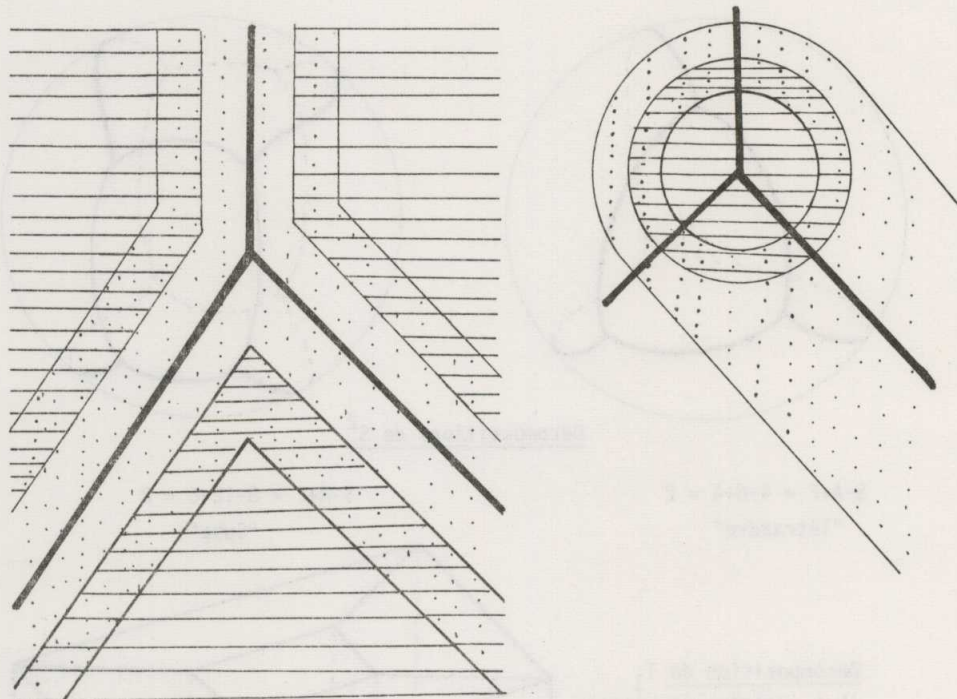
Décomposition de T_1
(à la différentiabilité près...)



$S-A+F = 16-32+16 = 0$

5.15. : Montrer que $S-A+F = \chi(M)$.

(Utiliser des disques centrés sur les sommets des polygones P_i , et des polygones inclus dans les P_i et de côtés parallèles à ceux des P_i , pour obtenir des voisinages ouverts des sommets et arêtes de la décomposition inspirés par les figures suivantes :



Appliquer 5.1 de façon répétée).

5.16. REMARQUE : Le résultat précédent montre que, pour une surface donnée, le nombre $S-A+F$ est indépendant de la décomposition. C'est historiquement sous cette forme que s'est introduite la notion de caractéristique d'Euler.

Les exercices suivants donnent des résultats sur la cohomologie des Grassmanniennes complexes.

