

ALGÈBRE HOMOLOGIQUE. — Cohomologie des catégories de Banach.

Note (*) de M. MAX KAROUBI, transmise par M. Henri Cartan.

Le groupe de Grothendieck $K(\mathcal{C})$ d'une catégorie additive (\mathcal{C}) est le quotient du groupe libre engendré par les classes d'isomorphie $\{G\}$ d'objets G de \mathcal{C} par le sous-groupe engendré par les relations $\{E \oplus F\} - \{E\} - \{F\} = 0$. Dans cette Note on se propose de définir, pour des catégories additives munies d'une certaine structure, des groupes $K^n(\mathcal{C})$, $n \in \mathbb{Z}$, avec $K^0(\mathcal{C}) \approx K(\mathcal{C})$, jouissant de certaines propriétés « cohomologiques » en relation avec les théorèmes de périodicité de Bott.

1. DÉFINITIONS. — 1.1. Une catégorie de Banach (sur k , avec $k = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) est la donnée d'une catégorie avec objet nul \mathcal{C} et d'une structure de k -espace de Banach sur l'ensemble $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$. Cette donnée est astreinte aux conditions suivantes : a. l'application $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, P) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, P)$, définie par la composition des morphismes, est bilinéaire et continue; b. la somme (donc le produit) de deux objets existe; c. pour tout objet E de \mathcal{C} et tout endomorphisme idempotent p de E , le noyau de p existe.

Exemple de catégorie de Banach. — La catégorie $\mathcal{E}_G(X)$ des G -fibrés vectoriels, réels ou complexes, sur un G -espace compact X (1).

1.2. Soit $C^{p,q}$ l'algèbre de Clifford de \mathbb{R}^{p+q} muni de la forme quadratique Q définie par

$$Q(x_1, \dots, x_{p+q}) = -x_1^2 - \dots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \dots + x_{p+q}^2,$$

et soit \mathcal{C} une catégorie de Banach. On désigne par $\mathcal{C}^{p,q}$ la catégorie de Banach formée des objets de \mathcal{C} où $C^{p,q}$ opère : un objet de $\mathcal{C}^{p,q}$ est donc un couple (E, ρ) où E est un objet de \mathcal{C} et où $\rho : C^{p,q} \rightarrow \text{End } E$ est un homomorphisme d'algèbres ($C^{p,q}$ s'identifiant ainsi à une algèbre d'opérateurs de E); un morphisme de $\mathcal{C}^{p,q}$ de source (E, ρ) et de but (E, ρ') est un \mathcal{C} -morphisme $f : E \rightarrow E'$ tel que, $\forall \lambda \in C^{p,q}, f \cdot \rho(\lambda) = \rho'(\lambda) \cdot f$. Par abus de langage, un objet de $\mathcal{C}^{p,q}$ sera appelé parfois un $C^{p,q}$ -module.

Un $C^{p,q}$ -module E est dit gradué, de graduation ε , s'il est muni d'un automorphisme involutif ε qui anticommute avec les générateurs de l'algèbre $C^{p,q}$. On désignera alors par E^0 l'objet de \mathcal{C} , noyau du projecteur $\frac{1}{2}(\varepsilon - 1)$. Si (E, ε) et (F, η) sont deux $C^{p,q}$ -modules gradués, un $C^{p,q}$ -morphisme $f : E \rightarrow F$ est dit de « degré zéro » si $f \cdot \varepsilon = \eta \cdot f$.

Soient e_i (resp. ε_i), $i = 1, \dots, 4$, les générateurs de l'algèbre de Clifford $C^{4,0}$ (resp. $C^{0,4}$). L'homomorphisme $f : C^{4,0} \rightarrow C^{0,4}$ défini par $f(e_i) = \varepsilon_1 \dots \hat{\varepsilon}_i \dots \varepsilon_4$ est un isomorphisme d'algèbres \mathbb{Z}_2 -graduées. Ceci

implique que les algèbres $C^{p+4, q} \approx C^{p, q} \hat{\otimes} C^{4, 0}$ et $C^{p, q+4} \approx C^{p, q} \hat{\otimes} C^{0, 4}$ sont isomorphes et que les catégories $\mathcal{C}^{p+4, q}$ et $\mathcal{C}^{p, q+4}$ le sont également. Dans le cas où $k = \mathbf{C}$, on montre de même que les catégories $\mathcal{C}^{p+1, q}$ et $\mathcal{C}^{p, q+1}$ sont isomorphes grâce à l'isomorphisme $f_{\mathbf{C}}$ de $C^{1, 0} \otimes \mathbf{C}$ sur $C^{0, 1} \otimes \mathbf{C}$ défini par $f_{\mathbf{C}}(e_1) = i\varepsilon_1$.

Définissons maintenant un foncteur $\chi : \mathcal{C}^{p, q} \rightarrow \mathcal{C}^{p+1, q+1}$ de la manière suivante : soit E un objet de $\mathcal{C}^{p, q}$ et soient $e_i, \varepsilon_j, i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, q$, les générateurs de l'algèbre de Clifford $C^{p, q}$.

On pose alors $\chi(E) = E \oplus E$, les générateurs $e'_i, \varepsilon'_j, i = 1, \dots, p+1, j = 1, \dots, q+1$, de $C^{p+1, q+1}$ opérant sur $\chi(E)$ par les formules

$$e'_i = \begin{pmatrix} e_i & 0 \\ 0 & -e_i \end{pmatrix}, \quad e'_{p+1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon'_j = \begin{pmatrix} \varepsilon_j & 0 \\ 0 & -\varepsilon_j \end{pmatrix}, \quad \varepsilon'_{q+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

pour $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq q$. Pour un morphisme f quelconque de $\mathcal{C}^{p, q}$, on pose de même

$$\chi(f) = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}.$$

PROPOSITION 1. — *Le foncteur χ est une équivalence des catégories $\mathcal{C}^{p, q}$ et $\mathcal{C}^{p+1, q+1}$.*

COROLLAIRE. — *Désignons par \mathcal{C}^n la catégorie $\mathcal{C}^{n, 0}$ si n est positif et la catégorie $\mathcal{C}^{0, -n}$ si n est négatif. Si $k = \mathbf{R}$ (resp. $k = \mathbf{C}$), les catégories \mathcal{C}^n et \mathcal{C}^{n+8} (resp. \mathcal{C}^n et \mathcal{C}^{n+2}) sont équivalentes.*

1.3. Soient \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux catégories de Banach et soit $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur additif. On dit que φ est *linéaire continu* si, quels que soient les objets M et N de \mathcal{C} , l'application $u \rightsquigarrow \varphi(u)$ de $\text{Hom}(M, N)$ dans $\text{Hom}(\varphi M, \varphi N)$ est linéaire continue. Le foncteur φ est dit un *foncteur de Serre* si, en outre, l'application $\text{Aut } M \rightarrow \text{Aut } \varphi M$ est une fibration de Serre. Le foncteur φ est dit *quasi-surjectif* si tout objet de \mathcal{C}' est isomorphe à un facteur direct de l'image d'un objet de \mathcal{C} par φ . On désigne par $\varphi^{p, p}$ le foncteur de $\mathcal{C}^{p, q}$ dans $\mathcal{C}'^{p, q}$ induit par φ . Si φ est un foncteur de Serre (resp. quasi-surjectif), il en est de même de $\varphi^{p, q}$.

Exemple de foncteur de Serre quasi-surjectif. — Le foncteur « restriction » $\mathcal{E}_{\mathbf{G}}(X) \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbf{G}}(Y)$, \mathbf{G} étant un groupe compact et Y étant un sous-espace fermé, invariant par \mathbf{G} , du \mathbf{G} -espace compact X .

1.4. Soit $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur de Serre quasi-surjectif. Désignons par $\mathcal{E}^{p, q}(\varphi)$ l'ensemble des triples (E, F, α) où E et F sont deux objets gradués de $\mathcal{C}^{p, q}$ et où $\alpha : E \rightarrow F$ est un isomorphisme de $C^{p, q}$ -modules, $\varphi\alpha : \varphi E \rightarrow \varphi F$ étant de degré zéro. Un élément (E, F, α) de $\mathcal{E}^{p, q}(\varphi)$ est dit *élémentaire* si α est de degré zéro. Deux éléments (E_0, F_0, α_0) et (E_1, F_1, α_1) sont dits *homotopes* s'il existe deux isomorphismes de degré zéro $f : E_0 \rightarrow E_1, g : F_0 \rightarrow F_1$, et une application continue $\alpha : [0, 1] \rightarrow \text{Iso}_{\mathcal{C}^{p, q}}(E_0, F_0)$ telle que $\alpha(0) = \alpha_0, \alpha(1) = g^{-1}\alpha_1 f$ et que $\varphi(\alpha(t))$

