C. R. Acad. Sc. Paris, t. 263, p. 341-344 (5 septembre 1966). Série A

ALGÈBRE HOMOLOGIQUE. — *Cohomologie des catégories de Banach : applications*. Note de M. **Max Karoubi**, transmise par M. Henri Cartan.

1. *Le théorème de Thom-Gysin en* K-*théorie*. — 1.1. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, où $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ est muni d'une structure d'espace de Banach. On dit que $\mathcal{C}$ est une *catégorie prébanachique* si elle satisfait aux axiomes des catégories de Banach (¹), excepté l'axiome *c*. Étant donné une catégorie prébanachique $\mathcal{C}$, soit $\mathcal{T}$ la catégorie prébanachique suivante : un objet de $\mathcal{T}$ est une paire $(\mathrm{E}, p)$, où E est un objet de $\mathcal{C}$ et où $p$ est un endomorphisme idempotent de E; un morphisme de $\mathcal{T}$ de source $(\mathrm{E}, p)$ et de but $(\mathrm{E}', p')$ est un $\mathcal{C}$-morphisme $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}'$ tel que $p'.f = f.p$. De tels morphismes $f_0$ et $f_1$ de $\mathcal{T}$ sont dits équivalents si $p'.f_0 = p'.f_1$. Soit $\tilde{\mathcal{C}}$ la catégorie dont les objets sont les objets de $\mathcal{T}$ et dont les morphismes sont les classes d'équivalence de morphismes de $\mathcal{T}$. La catégorie $\tilde{\mathcal{C}}$ est alors une catégorie de Banach, et $\mathcal{C}$ se plonge dans $\tilde{\mathcal{C}}$ de manière évidente. La catégorie $\tilde{\mathcal{C}}$ est dite la *catégorie de Banach associée à la catégorie prébanachique* $\mathcal{C}$.

Considérons en particulier un espace compact X, une catégorie de Banach $\mathcal{C}$ et la catégorie prébanachique $\mathcal{C}_{\mathrm{T}}(\mathrm{X})$ ainsi décrite : un objet de $\mathcal{C}_{\mathrm{T}}(\mathrm{X})$ est un objet de $\mathcal{C}$; un morphisme de $\mathcal{C}_{\mathrm{T}}(\mathrm{X})$ de source M et de but N est une famille de morphismes $f_x : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$, $x \in \mathrm{X}$, telle que l'application $x \rightsquigarrow f_x$ soit une applications continue de X dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$. La catégorie $\mathcal{C}_{\mathrm{T}}(\mathrm{X})$ est dite la catégorie des *$\mathcal{C}$-fibrés triviaux* au-dessus de X. La catégorie de Banach associée $\mathcal{C}(\mathrm{X}) = \widetilde{\mathcal{C}_{\mathrm{T}}(\mathrm{X})}$ est dite celle des *$\mathcal{C}$-fibrés localement triviaux* sur X. Cette terminologie est justifiée par le fait que, pour tout fibré $\xi$, il existe un recouvrement ouvert $[\mathrm{U}_i]$ de X tel que $\xi|_{\mathrm{U}_i}$ soit isomorphe à un fibré trivial. Si $\mathcal{C}$ est la catégorie des espaces vectoriels réels ou complexes de dimension finie, on retrouve la notion de fibré vectoriel classique (à équivalence de catégories près). Enfin si $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ est un foncteur linéaire continu, il induit de manière évidente un foncteur linéaire continu $\varphi(\mathrm{X}) : \mathcal{C}(\mathrm{X}) \to \mathcal{C}'(\mathrm{X})$.

1.2. Soit W un fibré vectoriel réel de dimension finie sur un espace compact X, muni d'une forme quadratique non dégénérée Q, et soit une catégorie de Banach $\mathcal{C}$. Si E est un objet de $\mathcal{C}(\mathrm{X})$, une structure de $\mathrm{C}(\mathrm{W})$-*module* sur E [C(W) désignant le fibré en algèbres de Clifford associé à W et Q] est une application continue $\rho : \mathrm{W} \to \mathrm{End}\,\mathrm{E}$ telle que $(\rho(w))^2 = \mathrm{Q}(w)\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$. Dans cette définition End E est le fibré banachique dont la fibre au point $x$ de X est l'espace de Banach $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathrm{E}_x)$ : si $\mathrm{E} = (\mathrm{M}, p)$, il est l'image du projecteur $q$ de $\mathrm{X} \times \mathrm{End}\,\mathrm{M}$ défini par $q(x, f) = (x, p_x.f.p_x)$. On désigne par $\mathcal{C}^{\mathrm{W}}(\mathrm{X})$ la catégorie de Banach des $\mathcal{C}$-fibrés en C(W)-modules.

Considérons maintenant un foncteur de Serre quasi-surjectif ([1]) $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ entre deux catégories de Banach [si $\varphi$ n'est pas de Serre, on le remplace par son « cylindre d'application »; *cf.* ([3])]. Soit V un sous-fibré de W tel que la restriction de Q à V soit non dégénérée. Si Y est un sous-ensemble fermé de X, on désigne par $\mathcal{E}^{W;V}(X, Y; \varphi)$ l'ensemble des triples $(E, w^1, w^2)$, où E est un $\mathcal{C}$-fibré et où $w^1$ et $w^2$ sont deux structures de C(W)-module sur E telles que $w^1|_V = w^2|_V$, $w^1|_Y = w^2|_Y$ et que $\varphi(X)(w^1) = \varphi(X)(w^2)$. Un triple $(E, w^1, w^2)$ est dit *élémentaire* si $w^1 = w^2$; deux triples $(E_0, w_0^1, w_0^2)$ et $(E_1, w_1^1, w_1^2)$ sont dits *homotopes* s'il existe un élément $(E, w^1, w^2)$ de $\mathcal{E}^{W\times[0,1];V\times[0,1]}(X\times[0,1], Y\times[0,1]; \varphi)$ dont les restrictions à $X \times \{0\}$ et à $X \times \{1\}$ soient les deux triples donnés. Définissons la somme de deux triples $(E_0, w_0^1, w_0^2)$ et $(E_1, w_1^1, w_1^2)$ comme étant $(E_0 \oplus E_1, w_0^1 \oplus w_1^1, w_0^2 \oplus w_1^2)$. Le quotient de $\mathcal{E}^{W;V}(X, Y; \varphi)$ par la relation d'équivalence engendrée par l'homotopie et l'addition de triples élémentaires est alors un groupe abélien qu'on note $K^{W;V}(X, Y; \varphi)$. On écrit $d(E, w^1, w^2)$ la classe de l'élément $(E, w^1, w^2)$ dans $K^{W;V}(X, Y; \varphi)$. Remarquons que, dans cette expression, on peut supposer le $\mathcal{C}$-fibré E trivial.

En particulier, soit $T^{p,q}$ le fibré trivial $X \times R^{p+q}$, muni de la forme quadratique $-x_1^2 - \ldots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \ldots + x_{p+q}^2$, et supposons que $W = V \oplus T^{0,1}$; on note alors $K^V(X, Y; \varphi)$ le groupe $K^{W,V}$ obtenu. Si $V = T^{p,q}$ et si $Y = \emptyset$, on retrouve ainsi la définition de $K^{p,q}(X; \varphi) = K^{p,q}(\varphi(X))$. En effet, on définit un isomorphisme $c$ de $K^{T^{p,q}}(X; \varphi)$ dans $K^{p,q}(X; \varphi)$ par la formule $c(d(E, w^1, w^2)) = d(E^1, E^2, \alpha) : E^i$, $i = 1, 2$, est l'objet E muni de la structure de $C^{p,q+1}$-module $w^i$ et $\alpha : E^1 \to E^2$ est le $C^{p,q}$-morphisme égal à l'identité sur les objets de $\mathcal{C}$ sous-jacents (la donnée d'un $C^{p,q+1}$-module équivaut évidemment à celle d'un $C^{p,q}$-module gradué).

*Notations.* — On se permettra souvent d'écrire $K^{W;V}(X, Y)$, $K^V(X, Y)$, $K^{p,q}(X, Y)$, ... au lieu de $K^{W;V}(X, Y; \varphi)$, $K^V(X, Y; \varphi)$, $K^{p,q}(X, Y; \varphi)$, .... Dans la suite de cette Note, W sera toujours le fibré $V \oplus T^{0,1}$.

1.3. Soit $V = V' \oplus V''$ une décomposition de V en sous-fibrés orthogonaux pour Q, la restriction de Q à V' étant définie positive. Identifions le fibré en boules $B(V')$ à l'hémisphère supérieur $S^+(V' \oplus 1)$ du fibré en sphères $S(V' \oplus 1)$, 1 désignant le fibré $T^{0,1}$. On définit alors un homomorphisme $t$ de $K^{V'\oplus V''}(X)$ dans $K^{\pi^* V''}(B(V'), S(V'))$ par la formule $t(d(E, w^1, w^2)) = d(\pi^* E, \varepsilon(w^1), \varepsilon(w^2))$, où :

*a.* $\pi : S^+(V' \oplus 1) \to X$ désigne la projection canonique;

*b.* les structures de $C(V'' \oplus 1)$-module de $\pi^* E$ sont représentées par les applications $\varepsilon(w^i) : V'' \oplus 1 \to \mathrm{End}\, \pi^* E$, $i = 1, 2$, qui sont définies au point $(v', \lambda)$ de $S^+(V' \oplus 1)$ par

$$\varepsilon(w^i)(v'', \mu) = w^i(0, v'', 0) + \mu w^i(v', 0, \lambda).$$