C. R. Acad. Sc. Paris, t. 263, p. 357-360 (12 septembre 1966). Série A

ALGÈBRE HOMOLOGIQUE. — *Cohomologie des catégories de Banach: applications.* Note de M. **Max Karoubi**, transmise par M. Henri Cartan.

2. K-*théorie des fibrés projectifs réels.* — 2.1. Reprenons les notations du paragraphe 1.2 de la Note précédente ([7]), mais supposons la forme quadratique Q définitive positive (le cas général sera étudié au paragraphe 3). On va définir un homomorphisme p de $K^{W\oplus 1;\, V\oplus 1}(X)$ dans $K^{-1}(P(W), P(V))$. Tout élément de $K^{W\oplus 1;\, V\oplus 1}(X)$ s'écrit $d(E, \eta, \mathfrak{w}^1, \mathfrak{w}^2)$, où η est un automorphisme involutif de E représentant l'action du vecteur unité de $T^{0,1}$, et où $\mathfrak{w}^i$, $i = 1, 2$, représentent deux structures de $C(W)$-module sur E telles que $\mathfrak{w}^1 \|_V = \mathfrak{w}^2 |_V$, $\varphi(X)(\mathfrak{w}^1) = \varphi(X)(\mathfrak{w}^2)$ et que $\eta . \mathfrak{w}^i = - \mathfrak{w}^i . \eta$. On pose alors $p(d(E, \eta, \mathfrak{w}^1, \mathfrak{w}^2)) = d(E', \eta', \varepsilon(\mathfrak{w}^1), \varepsilon(\mathfrak{w}^2))$, où :

a. $E' = E \times_{Z_2} S(W)$, Z_2 opérant sur E par l'involution η et sur S(W) par l'action antipodique. C'est évidemment un fibré sur P(W).

b. η' est l'automorphisme involutif de E' (représentant l'action de $C^{0,1}$) défini par $\eta'(e, \mathfrak{w}) = (\eta e, \mathfrak{w})$.

c. $\varepsilon(\mathfrak{w}^i)$ est la graduation de E' définie au point $(e, \mathfrak{w})$ de E' par $\varepsilon(\mathfrak{w}^i)(e, \mathfrak{w}) = (\mathfrak{w}^i(\mathfrak{w})\, e, \mathfrak{w})$.

Théorème 2.1 ([8]). — *L'homomorphisme*

$$p : K^{W\oplus 1;\, V\oplus 1}(X) \to K^{-1}(P(W), P(V))$$

est un isomorphisme.

Corollaire 1. — *Soit* $\mathcal{C}' = 0$; *le groupe* K(P(W), P(V)) *est alors isomorphe au groupe* K^1 *du foncteur restriction des scalaires* $\mathcal{C}^{W\oplus 1}(X) \to \mathcal{C}^{V\oplus 1}(X)$.

Corollaire 2. — *Soit* $k = \mathbf{R}$; *les groupes* $K^n(P(W), P(V))$ *et* $K^{n+4}(P(W\oplus 4), P(V\oplus 4))$ *sont alors isomorphes. En particulier, les groupes* $K^n(P(W), P(V))$ *et* $K^n(P(W\oplus 8), P(V\oplus 8))$ *sont isomorphes. Soit* $k = \mathbf{C}$; *les groupes* $K^n(P(W), P(V))$ *et* $K^n(P(W\oplus 2), P(V\oplus 2))$ *sont isomorphes.*

2.2. Notons $K^{p,q;p',q'}(X)$ le groupe $K^{T^{p,q};\, T^{p',q'}}(X)$ et supposons les fibrés V et W spinoriels de type Spin $(0, l)$ et Spin $(0, r)$ respectivement. Les équivalences de catégories $\mathcal{C}^{0,r+1}(X) \approx \mathcal{C}^{W\oplus 1}(X)$ et $\mathcal{C}^{0,l+1}(X) \approx \mathcal{C}^{V\oplus 1}(X)$ induisent un isomorphisme u de $K^{0,r+1;\,0,l+1}(X)$ sur $K^{W\oplus 1;\, V\oplus 1}(X)$. Pour $k = \mathbf{C}$, on a un résultat analogue si les fibrés V et W sont « ^{U}spinoriels » (i. e. de groupe structural $Spin^U$).

THÉORÈME 2.2. — *Soit* $k = \mathbf{R}$ (*resp.* $k = \mathbf{C}$) *et soient* V *et* W *des fibrés spinoriels* (*resp.* ${}^{\mathrm{c}}$*spinoriels*). *L'homomorphisme*

$$p.u : \quad \mathrm{K}^{0,r+1;0,l+1}(\mathrm{X}) \to \mathrm{K}^{-1}(\mathrm{P}(\mathrm{W}), \mathrm{P}(\mathrm{V}))$$

est alors un isomorphisme. En particulier, le groupe $\mathrm{K}^n(\mathrm{P}(\mathrm{W}), \mathrm{P}(\mathrm{V}); \varphi)$ *ne dépend que de* n, X, φ *et des dimensions respectives de* V *et de* W.

COROLLAIRE 1. — *Soit* $\mathcal{C}' = 0$, $k = \mathbf{R}$, $r = l + 8t$, $l \equiv 0 \bmod 2$; *si* V *et* W *sont des fibrés spinoriels, les groupes* $\mathrm{K}^n(\mathrm{P}(\mathrm{W}), \mathrm{P}(\mathrm{V}))$ *et* $\mathrm{K}^n(\mathrm{X}; \mathrm{Z}_{16t})$ *sont isomorphes. Soit* $\mathcal{C}' = 0$, $k = \mathbf{C}$, $r = l + 2t$, $l \equiv 1 \bmod 2$; *si* V *et* W *sont des fibrés* ${}^{\mathrm{c}}$*spinoriels, les groupes* $\mathrm{K}^n(\mathrm{P}(\mathrm{W}), \mathrm{P}(\mathrm{V}))$ *et* $\mathrm{K}^n(\mathrm{X}; \mathrm{Z}_{2t})$ *sont aussi isomorphes.*

COROLLAIRE 2 [(1), (4), (8)]. — *Soit* X = Point, $\mathcal{C}' = 0$, $\mathcal{C} = \mathrm{P}(\mathbf{R})$ *la catégorie des espaces vectoriels réels de dimension finie* [*resp.* $\mathcal{C} = \mathrm{P}(\mathbf{C})$ *la catégorie des espaces vectoriels complexes de dimension finie*). *Soit* P_n, $n \geq -1$, *l'espace projectif réel de* $\mathbf{R}^{n+1}$. *Le groupe* $\mathrm{K}(\mathrm{P}_r, \mathrm{P}_l)$ *est alors isomorphe au conoyau de l'homomorphisme de restriction naturel* $\mathrm{K}(\mathcal{C}^{0,r+1}) \to \mathrm{K}(\mathcal{C}^{0,l+1})$. *En particulier, soit* $b_{r,l}$ *le nombre d'entiers* m *tels que* $l < m \leq r$ *et* $m \equiv 0, 1, 2, 4 \bmod 8$ (*resp.* $m \equiv 0 \bmod 2$). *Soit* $a_{r,1} = 2^{b_{r,1}}$. *Alors, si* $l \geq 0$,

$$\mathrm{K}(\mathrm{P}_r, \mathrm{P}_l) = \mathrm{Z}_{a_{r,l}} \quad \text{si } l \not\equiv -1 \bmod 4 \quad (\textit{resp. } l \not\equiv -1 \bmod 2),$$
$$\mathrm{K}(\mathrm{P}_r, \mathrm{P}_l) = \mathrm{Z} \oplus \mathrm{Z}_{a_{r,l}} \quad \text{si } l \equiv -1 \bmod 4 \quad (\textit{resp. } l \equiv -1 \bmod 2),$$
$$\mathrm{K}^4(\mathrm{P}_r, \mathrm{P}_l) = \mathrm{K}(\mathrm{P}_{r+4}, \mathrm{P}_{l+4}).$$

3. *Applications à la théorie* KR (3). — 3.1. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie de Banach et X un Z_2-espace compact (i. e. un espace compact muni d'un automorphisme involutif σ). Soit $\mathcal{C}_{\mathbf{C}}$ la catégorie formée des objets de $\mathcal{C}$ où $\mathbf{C}$ opère (i. e. $\mathcal{C}^{1,0}$). On désigne par $\mathcal{C}^{\mathrm{R}}(\mathrm{X})$ la catégorie de Banach suivante : un objet de $\mathcal{C}^{\mathrm{R}}(\mathrm{X})$ est un couple (E, τ) où E est un $\mathcal{C}_{\mathbf{C}}$-fibré et où τ est une involution *antilinéaire* de E dont la projection sur X est l'automorphisme σ; un $\mathcal{C}^{\mathrm{R}}(\mathrm{X})$-morphisme de (E, τ) dans (E', τ') est un morphisme de $\mathcal{C}_{\mathbf{C}}(\mathrm{X})$ commutant aux involutions τ et τ'. On appelle $\mathrm{KR}^{p,q}(\mathrm{X}; \mathcal{C})$ le groupe $\mathrm{K}^{p,q}(\mathcal{C}^{\mathrm{R}}(\mathrm{X}))$ [(3), (8)].

Soit $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur de Serre quasi surjectif et soit Y un sous-ensemble fermé de X invariant par σ. Soit W un Z_2-fibré réel sur X (5) d'involution h, muni d'une forme quadratique non dégénérée Q invariante par h, et soit V un sous-Z_2-fibré de W tel que la restriction de Q à V soit non dégénérée. En suivant le schéma du paragraphe 1.2, on construit un groupe plus général $\mathrm{KR}^{\mathrm{W};\mathrm{V}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}; \varphi)$ à partir d'éléments (E, ϖ^1, ϖ^2) ainsi définis : E est un $\mathcal{C}$-fibré trivial sur X; ϖ^i, $i = 1, 2$, sont deux structures de C(W)-module sur $\mathrm{E} \otimes \mathbf{C} \in ob\, \mathcal{C}_{\mathbf{C}}$, vérifiant les conditions $\varphi(\mathrm{X})(\varpi^1) = \varphi(\mathrm{X})(\varpi^2)$, $\varpi^1|_{\mathrm{V}} = \varpi^2|_{\mathrm{V}}$, $\varpi^1|_{\mathrm{Y}} = \varpi^2|_{\mathrm{Y}}$ et $\varpi^i_{\sigma x} = \overline{h(\varpi^i_x)}$ ($\overline{}$ désignant la conjugaison complexe).

Si les involutions de X et de W sont triviales (i. e. égales à l'identité), on retrouve le groupe $K^{W;V}(X, Y, \varphi)$. Si $W = V \oplus T^{0,1}$ (h étant sur $T^{0,1}$ le produit de σ par l'identité), on désigne par $KR^{V}(X, Y; \varphi)$ le groupe $KR^{W;V}$ obtenu. De manière générale, on se permettra les abus de langage signalés à la fin du paragraphe 1.2.

3.2. Supposons, pour simplifier, l'involution sur X triviale. Soit $V = V' \oplus V''$ un fibré vectoriel réel sur X muni d'une forme quadratique non dégénérée $Q = Q' \oplus Q''$, où Q' (resp. Q'') est définie positive (resp. définie négative). Dans ce cas, B (V) et S (V), fibrés en boules et en sphères de V pour la forme quadratique $Q' \oplus (-Q'')$, sont des Z_2-espaces de manière naturelle, l'involution σ étant définie par $\sigma(v', v'') = (v', -v'')$. Si U est un autre fibré vectoriel réel, muni d'une forme quadratique non dégénérée et de l'involution h égale à l'identité, on définit un homomorphisme t de $K^{V\oplus U}(X)$ dans $KR^{\pi^* U}(B(V), S(V))$ par la formule

$$t(d(E, w^1, w^2)) = d(\pi^* E, \varepsilon(\tilde{w}^1), \varepsilon(\tilde{w}^2)).$$

Dans cette formule on pose $\tilde{w}^\alpha(u, v', v'', \lambda) = w^\alpha(u, v', iv'', \lambda)$, $\alpha = 1, 2$, les autres notations étant celles du paragraphe 1.3. Le théorème suivant généralise alors le théorème 1.1.

Théorème 3.1. — *L'homomorphisme*

$$t: \ K^{V\oplus U}(X) \to KR^{\pi^* U}(B(V), S(V))$$

est un isomorphisme.

Corollaire. — *Supposons* V *spinoriel de type* Spin (p, q). *L'homomorphisme* $t.u$ *de* $K^{p,q}(X)$ *dans* KR $(B(V), S(V))$ *est un isomorphisme.*

Les hypothèses du corollaire sont vérifiées notamment lorsque V' et V'' sont spinoriels ou lorsque V est de la forme $T \otimes \mathbf{C}$, l'involution sur V étant définie par la conjugaison complexe.

Application. — En suivant Anderson ([2]) et Atiyah ([3]), posons

$$KO^n(\varphi) = K^n(\varphi), \qquad KU^n(\varphi) = K^n(\varphi^{1,0}), \qquad Ksp^n(\varphi) = K^n(\varphi^{2,0}),$$
$$KC^n(\varphi) = KR^n(S^{2,0}; \varphi)$$

où $S^{2,0}$ désigne la sphère de dimension 1 munie de l'involution antipodique. Le théorème 3.1 permet alors de démontrer l'existence de suites exactes naturelles en φ :

$$\ldots \to KC^{n-1}(\varphi) \to KU^n(\varphi) \to KO^n(\varphi) \oplus Ksp^n(\varphi) \to KC^n(\varphi) \to \ldots,$$
$$\ldots \to KU^{n-1}(\varphi) \to KC^{n+1}(\varphi) \to KO^n(\varphi) \oplus Ksp^n(\varphi) \to KU^n(\varphi) \to \ldots,$$
$$\ldots \to KU^{n-1}(\varphi) \to KU^{n-1}(\varphi) \to KC^n(\varphi) \to KU^n(\varphi) \to \ldots.$$

Un cas particulièrement intéressant est celui où $\mathcal{C}' = 0$ et où $\mathcal{C}$ est la catégorie de Banach $\mathcal{E}_G(X)$ ([6]). Pour G = 1 ou pour X réduit à un point, on retrouve ainsi un résultat d'Anderson ([2]).