Actes, Congrès intern. Math., 1970. Tome 2, p. 27 à 32.

FONDEMENTS DE LA K-THEORIE

par Max KAROUBI

0. Introduction.

Depuis le travail de Grothendieck sur le théorème de Riemann-Roch en géométrie algébrique, la K-théorie a connu un développement intensif, marqué essentiellement par des applications nombreuses dans divers domaines des mathématiques. Elle s'est même divisée en deux branches essentielles : la "K-théorie topologique" dont une idée peut être donnée dans le livre connu d'Atiyah [1] et la "K-théorie algébrique" exposée par exemple dans le livre de Bass [2]. Ces deux livres et bien d'autres publications contiennent évidemment des résultats importants dont je ne parlerai pas ici. Mon but est essentiellement théorique : on va tâcher d'unifier les deux "K-théories" en les intégrant dans la perspective générale de l'algèbre homologique.

De manière plus précise, considérons un anneau A avec élément unité (pour l'instant) et la catégorie $\mathcal{P}(A)$ des A-modules [1] projectifs de type fini. Soit G un groupe abélien et soit

$$f : Ob\,\mathcal{P}(A) \to G$$

une application qui satisfait à la propriété suivante : si

$$0 \to P' \to P \to P'' \to 0$$

est une suite exacte de A-modules projectifs (nécessairement scindée), on a $f(P) = f(P') + f(P'')$. Parmi les couples (G, f) il en existe évidemment un d'universel : on le notera $(K(A), \gamma)$. Un homomorphisme $\epsilon : A \to B$ induit un foncteur "extension des scalaires" $M \to M \otimes_A B$ de $\mathcal{P}(A)$ dans $\mathcal{P}(B)$, d'où un homomorphisme $K(\epsilon)$ de $K(A)$ dans $K(B)$. Il est clair que $K(A)$ devient ainsi un foncteur *covariant* de l'anneau A. Si A n'a pas nécessairement d'élément unité, considérons l'ensemble $A^+ = A \times \mathbf{Z}$ muni des deux lois de composition suivantes

$$(a, \lambda) + (a', \lambda') = (a + a', \lambda + \lambda')$$

$$(a, \lambda) \cdot (a', \lambda') = (aa' + \lambda' a + \lambda a', \lambda\lambda').$$

Alors A^+ est un anneau avec élément unité et A s'identifie au noyau de "l'homomorphisme d'augmentation" $\epsilon : A^+ \to \mathbf{Z}$ où $\epsilon(a, \lambda) = \lambda$. On définit alors $K(A)$ comme le noyau de $K(\epsilon) : K(A^+) \to K(\mathbf{Z})$. Il est facile de voir que cette définition est cohérente avec la définition antérieure dans le cas où A a déjà un élément unité . . .

---

(1) à droite pour fixer les idées.

Considérons une suite d'anneaux et d'homomorphismes

$$\text{(S)} \qquad 0 \to A' \to A \xrightarrow{f} A'' \to 0$$

Cette suite est dite *exacte* si elle est exacte en tant que suite de groupes abéliens (ainsi A' s'identifie à l'idéal noyau de f et n'a pas en général d'élément unité).

THEOREME 0. – (Bass-Schanuel). *La suite*

$$K(A') \to K(A) \to K(A'')$$

obtenue à partir de la suite (S) *en appliquant le foncteur* K *est une suite exacte.*

Le premier réflexe d'un spécialiste d'algèbre homologique ou d'un topologue est évidemment de chercher à construire les foncteurs "satellites" du foncteur "semi-exact" K. En d'autres termes, on aimerait pouvoir définir des foncteurs $K^n(A)$ (1), $n \in \mathbf{Z}$, tels que $K^0(A) = K(A)$ et tels qu'on ait une suite exacte infinie :

$$\cdots \to K^{n-1}(A) \to K^{n-1}(A'') \to K^n(A') \to K^n(A) \to K^n(A'') \to \cdots$$

Nous allons voir que, sous certaines hypothèses restrictives sur les suites (S), il est effectivement possible de définir des foncteurs K^n. Pour cela, nous allons adopter la définition de Villamayor et de l'auteur qui est présentée dans [6]. Des définitions différentes ont été proposées par d'autres auteurs (avec de moins bonnes propriétés formelles en général). Faute de place, nous nous bornerons à les mentionner au passage.

1. Anneaux de Banach.

L'originalité de la K-théorie dans la présentation adoptée réside dans le fait que la définition des groupes $K^n(A)$ va dépendre du choix d'une topologie (plus précisément d'une norme) sur l'anneau A. Ainsi, si l'anneau A est discret, on obtiendra des foncteurs K^n intéressants pour les algébristes ; si A est une algèbre de Banach réelle ou complexe, les foncteurs K^n obtenus seront intéressants pour les topologues. De manière plus précise, posons la définition suivante :

DEFINITION 1. – *Un "anneau de Banach" est un anneau A (non nécessairement unitaire) muni d'une "norme" $p : A \to \mathbf{R}^+$ satisfaisant aux axiomes suivants :*

(1) $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(2) $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$

(3) $p(-x) \;\; = p(x)$

(4) $p(xy) \;\;\; \leqslant p(x)\, p(y)$

(5) *A est complet pour la distance* $d(x, y) = p(x - y)$.

Il est clair que les anneaux discrets, les algèbres de Banach ordinaires ou ultra-métriques sont des exemples d'anneaux de Banach. Pour simplifier l'écriture, on notera $\|x\|$ l'expression $p(x)$ comme il est d'usage.

---

(1) Dans la littérature on écrit aussi K_{-n} au lieu de K^n. Nous nous conformons ici à la tradition de la K-théorie topologique.

Si A est un anneau de Banach, $A < x >$ est le sous-anneau de $A[[x]]$ formé des séries formelles $S = S(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i$ telles que $\sum_{i=0}^{+\infty} \|a_i\| < +\infty$; $A < x >$ est évidemment un anneau de Banach pour la norme $\|S\| = \sum_{i=0}^{+\infty} \|a_i\|$ (si A est discret, on a $A < x > = A[x]$). Plus généralement, le sous-anneau $A < x_1, \ldots, x_n >$ de $A[[x_1, \ldots, x_n]]$ formé des séries S telles que la somme des normes des coefficients soit finie est un anneau de Banach. Un homomorphisme borné $f : A \to B$ induit un homomorphisme borné $f_n : A < x_1, \ldots, x_n > \to B < x_1, \ldots, x_n >$. Pour tout anneau C, posons

$$GL(C, p) = \mathrm{Ker}[GL(C^+, p) \to GL(\mathbf{Z}, p)] \quad \text{et} \quad GL(C) = \varinjlim GL(C, p).$$

Alors f_n induit un homomorphisme de groupes

$$GL(A < x_1, \ldots, x_n >) \to GL(B < x_1, \ldots, x_n >)$$

que nous noterons encore f_n.

DEFINITION 2. – *L'homomorphisme $f : A \to B$ est une "fibration" si, pour tout élément $\beta = \beta(x_1, \ldots, x_n)$ de $GL(B < x_1, \ldots, x_n >)$ tel que $\beta(0, \ldots, 0) = 1$, il existe un élément α de $GL(A < x_1, \ldots, x_n >)$ tel que $f_n(\alpha) = \beta$. L'homomorphisme f est une "cofibration" si f est surjectif et si la norme de B est équivalente à la norme quotient de A.*

Exemples. – Si A et B sont des algèbres de Banach sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, tout homomorphisme surjectif est à la fois une fibration et une cofibration. Il en est de même si f est surjectif et si B est un anneau noethérien régulier discret.

Soit

$$\text{(S)} \qquad 0 \to A' \to A \xrightarrow{f} A'' \to 0$$

une suite exacte d'anneaux de Banach et d'homomorphismes bornés. Par abus de langage, on dit que (S) est une fibration (resp. une cofibration) si la norme de A' est équivalente à la norme induite par A et si f est une fibration (resp. une cofibration).

2. Définition des foncteurs K^n.

Soit $\mathcal{B}$ la "catégorie" des anneaux de Banach, les morphismes étant les homomorphismes bornés. Une "*théorie de la cohomologie positive*" (resp. "*négative*") sur $\mathcal{B}$ est la donnée de foncteurs $K^n, n \geqslant 0$ (resp. $n \leqslant 0$) de $\mathcal{B}$ dans la catégorie des groupes abéliens ainsi que d'opérateurs de connexion naturels

$$\partial^{n-1} : K^{n-1}(A'') \to K^n(A') \quad , \quad n \geqslant 1 \text{ (resp. } n \leqslant 0)$$

définis pour toute cofibration (S) (resp. toute fibration (S)). On suppose en outre que la suite

$$K^{n-1}(A') \to K^{n-1}(A) \to K^{n-1}(A'') \to K^n(A') \to K^n(A) \to K^n(A'')$$

est exacte pour les valeurs de n où elle est définie.