Actes, Congrès intern. Math., 1970. Tome 2, p. 27 à 32.

FONDEMENTS DE LA K-THEORIE

par Max KAROUBI

0. Introduction.

Depuis le travail de Grothendieck sur le théorème de Riemann-Roch en géométrie algébrique, la K-théorie a connu un développement intensif, marqué essentiellement par des applications nombreuses dans divers domaines des mathématiques. Elle s'est même divisée en deux branches essentielles : la "K-théorie topologique" dont une idée peut être donnée dans le livre connu d'Atiyah [1] et la "K-théorie algébrique" exposée par exemple dans le livre de Bass [2]. Ces deux livres et bien d'autres publications contiennent évidemment des résultats importants dont je ne parlerai pas ici. Mon but est essentiellement théorique : on va tâcher d'unifier les deux "K-théories" en les intégrant dans la perspective générale de l'algèbre homologique.

De manière plus précise, considérons un anneau A avec élément unité (pour l'instant) et la catégorie $\mathcal{P}(A)$ des A-modules (1) projectifs de type fini. Soit G un groupe abélien et soit

$$f : Ob\,\mathcal{P}(A) \to G$$

une application qui satisfait à la propriété suivante : si

$$0 \to P' \to P \to P'' \to 0$$

est une suite exacte de A-modules projectifs (nécessairement scindée), on a $f(P) = f(P') + f(P'')$. Parmi les couples (G, f) il en existe évidemment un d'universel : on le notera $(K(A), \gamma)$. Un homomorphisme $\epsilon : A \to B$ induit un foncteur "extension des scalaires" $M \to M \otimes_A B$ de $\mathcal{P}(A)$ dans $\mathcal{P}(B)$, d'où un homomorphisme $K(\epsilon)$ de $K(A)$ dans $K(B)$. Il est clair que $K(A)$ devient ainsi un foncteur *covariant* de l'anneau A. Si A n'a pas nécessairement d'élément unité, considérons l'ensemble $A^+ = A \times \mathbf{Z}$ muni des deux lois de composition suivantes

$$(a, \lambda) + (a', \lambda') = (a + a', \lambda + \lambda')$$

$$(a, \lambda) \cdot (a', \lambda') = (aa' + \lambda' a + \lambda a', \lambda\lambda').$$

Alors A^+ est un anneau avec élément unité et A s'identifie au noyau de "l'homomorphisme d'augmentation" $\epsilon : A^+ \to \mathbf{Z}$ où $\epsilon(a, \lambda) = \lambda$. On définit alors $K(A)$ comme le noyau de $K(\epsilon) : K(A^+) \to K(\mathbf{Z})$. Il est facile de voir que cette définition est cohérente avec la définition antérieure dans le cas où A a déjà un élément unité . . .

---

(1) à droite pour fixer les idées.

Considérons une suite d'anneaux et d'homomorphismes

$$\text{(S)} \qquad 0 \to A' \to A \xrightarrow{f} A'' \to 0$$

Cette suite est dite *exacte* si elle est exacte en tant que suite de groupes abéliens (ainsi A' s'identifie à l'idéal noyau de f et n'a pas en général d'élément unité).

THEOREME 0. – (Bass-Schanuel). *La suite*

$$K(A') \to K(A) \to K(A'')$$

obtenue à partir de la suite (S) *en appliquant le foncteur K est une suite exacte.*

Le premier réflexe d'un spécialiste d'algèbre homologique ou d'un topologue est évidemment de chercher à construire les foncteurs "satellites" du foncteur "semi-exact" K. En d'autres termes, on aimerait pouvoir définir des foncteurs $K^n(A)$ (1), $n \in \mathbf{Z}$, tels que $K^0(A) = K(A)$ et tels qu'on ait une suite exacte infinie :

$$\cdots \to K^{n-1}(A) \to K^{n-1}(A'') \to K^n(A') \to K^n(A) \to K^n(A'') \to \cdots$$

Nous allons voir que, sous certaines hypothèses restrictives sur les suites (S), il est effectivement possible de définir des foncteurs K^n. Pour cela, nous allons adopter la définition de Villamayor et de l'auteur qui est présentée dans [6]. Des définitions différentes ont été proposées par d'autres auteurs (avec de moins bonnes propriétés formelles en général). Faute de place, nous nous bornerons à les mentionner au passage.

1. Anneaux de Banach.

L'originalité de la K-théorie dans la présentation adoptée réside dans le fait que la définition des groupes $K^n(A)$ va dépendre du choix d'une topologie (plus précisément d'une norme) sur l'anneau A. Ainsi, si l'anneau A est discret, on obtiendra des foncteurs K^n intéressants pour les algébristes ; si A est une algèbre de Banach réelle ou complexe, les foncteurs K^n obtenus seront intéressants pour les topologues. De manière plus précise, posons la définition suivante :

DEFINITION 1. – *Un "anneau de Banach" est un anneau A (non nécessairement unitaire) muni d'une "norme"* $p : A \to \mathbf{R}^+$ *satisfaisant aux axiomes suivants :*

(1) $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(2) $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$

(3) $p(-x) \quad = p(x)$

(4) $p(xy) \quad \leqslant p(x)\, p(y)$

(5) *A est complet pour la distance* $d(x, y) = p(x - y)$.

Il est clair que les anneaux discrets, les algèbres de Banach ordinaires ou ultramétriques sont des exemples d'anneaux de Banach. Pour simplifier l'écriture, on notera $\|x\|$ l'expression $p(x)$ comme il est d'usage.

---

(1) Dans la littérature on écrit aussi K_{-n} au lieu de K^n. Nous nous conformons ici à la tradition de la K-théorie topologique.

Si A est un anneau de Banach, $A<x>$ est le sous-anneau de $A[[x]]$ formé des séries formelles $S = S(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i$ telles que $\sum_{i=0}^{+\infty} \|a_i\| < +\infty$; $A<x>$ est évidemment un anneau de Banach pour la norme $\|S\| = \sum_{i=0}^{+\infty} \|a_i\|$ (si A est discret, on a $A<x> = A[x]$). Plus généralement, le sous-anneau $A<x_1, \ldots, x_n>$ de $A[[x_1, \ldots, x_n]]$ formé des séries S telles que la somme des normes des coefficients soit finie est un anneau de Banach. Un homomorphisme borné $f : A \to B$ induit un homomorphisme borné $f_n : A<x_1, \ldots, x_n> \to B<x_1, \ldots, x_n>$. Pour tout anneau C, posons

$$GL(C, p) = \mathrm{Ker}[GL(C^+, p) \to GL(\mathbf{Z}, p)] \quad \text{et} \quad GL(C) = \varinjlim GL(C, p).$$

Alors f_n induit un homomorphisme de groupes

$$GL(A<x_1, \ldots, x_n>) \to GL(B<x_1, \ldots, x_n>)$$

que nous noterons encore f_n.

DEFINITION 2. – *L'homomorphisme $f : A \to B$ est une "fibration" si, pour tout élément $\beta = \beta(x_1, \ldots, x_n)$ de $GL(B<x_1, \ldots, x_n>)$ tel que $\beta(0, \ldots, 0) = 1$, il existe un élément α de $GL(A<x_1, \ldots, x_n>)$ tel que $f_n(\alpha) = \beta$. L'homomorphisme f est une "cofibration" si f est surjectif et si la norme de B est équivalente à la norme quotient de A.*

Exemples. – Si A et B sont des algèbres de Banach sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, tout homomorphisme surjectif est à la fois une fibration et une cofibration. Il en est de même si f est surjectif et si B est un anneau noethérien régulier discret.

Soit

(S) $$0 \to A' \to A \xrightarrow{f} A'' \to 0$$

une suite exacte d'anneaux de Banach et d'homomorphismes bornés. Par abus de langage, on dit que (S) est une fibration (resp. une cofibration) si la norme de A' est équivalente à la norme induite par A et si f est une fibration (resp. une cofibration).

2. Définition des foncteurs K^n.

Soit $\mathcal{B}$ la "catégorie" des anneaux de Banach, les morphismes étant les homomorphismes bornés. Une "*théorie de la cohomologie positive*" (resp. "*négative*") sur $\mathcal{B}$ est la donnée de foncteurs K^n, $n \geqslant 0$ (resp. $n \leqslant 0$) de $\mathcal{B}$ dans la catégorie des groupes abéliens ainsi que d'opérateurs de connexion naturels

$$\partial^{n-1} : K^{n-1}(A'') \to K^n(A') \ , \quad n \geqslant 1 \text{ (resp. } n \leqslant 0)$$

définis pour toute cofibration (S) (resp. toute fibration (S)). On suppose en outre que la suite

$$K^{n-1}(A') \to K^{n-1}(A) \to K^{n-1}(A'') \to K^n(A') \to K^n(A) \to K^n(A'')$$

est exacte pour les valeurs de n où elle est définie.

DEFINITION 3. – *Soit A un anneau de Banach et soient $q_i : A < x > \to A$, $i = 0, 1$, les homomorphismes définis par $q_i(S) = S(i)$. On dit que A est "contractile" s'il existe un homomorphisme borné $h : A \to A < x >$ tel que $q_0 \bullet h = 0$ et $q_1 \bullet h = \mathrm{Id}$.*

Exemple. – L'anneau $EA = \mathrm{Ker}\ q_0$ est contractile.

THEOREME 4. – *Il existe une théorie de la cohomologie négative et une seule à isomorphisme près sur $\mathcal{B}$ qui satisfait aux axiomes suivants :*

(1) *$K^n(A) = 0$ pour $n < 0$ si A est contractile.*

(2) $K^0(A) = K(A)$.

Cette définition est évidemment à rapprocher de celle des groupes d'homotopie d'un espace topologique. La définition des groupes K^n pour n positif va nécessiter quelques préliminaires techniques qui trouvent leur origine dans la théorie des opérateurs de Fredholm dans un espace de Hilbert (cf. [4]).

Soit $M = (a_{ji})$ une matrice infinie à coefficients dans A. On pose

$$\|M\| = \operatorname*{Sup}_i \sum_{j=0}^{\infty} \|a_{ji}\|.$$

Les matrices M telles que $\|M\| < +\infty$ forment un anneau de Banach B. Une matrice diagonale M est dite de type fini si elle ne contient qu'un nombre fini d'éléments de A différents. Le "*cône*" CA de A est le plus petit anneau de Banach contenu dans B qui contient les matrices diagonales de type fini et les matrices de permutation. La limite inductive $A(\infty) = \varinjlim A(n)$ suivant les inclusions

$$M \longrightarrow \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est un sous-anneau de CA. Son adhérence $\widetilde{A}$ est "*l'anneau stabilisé*" de A (dans le cas discret on a $\widetilde{A} = A(\infty)$). L'anneau stabilisé est en fait un idéal dans CA et l'anneau de Banach quotient $SA = CA/\widetilde{A}$ est la "*suspension*" de A.

Un anneau de Banach unitaire C est dit "*flasque*" s'il existe un bimodule de Banach M sur C, projectif de type fini à droite, tel que $M \oplus C$ soit isomorphe à M en tant que bimodule (exemples : le cône CA d'un anneau de Banach unitaire A ; l'algèbre des endomorphismes d'un espace de Hilbert de dimension infinie).

THEOREME 5. – *Il existe une théorie de la cohomologie positive et une seule à isomorphisme près sur $\mathcal{B}$ qui satisfait aux axiomes suivants :*

(1) *L'inclusion naturelle $A \to \widetilde{A}$ induit un isomorphisme $K^n(A) \xrightarrow{\approx} K^n(\widetilde{A})$.*

(2) *$K^n(A) = 0$ si A est un anneau flasque.*

(3) $K^0(A) = K(A)$.

3. Comparaison avec d'autres définitions.

THEOREME 6. — *Soit A une algèbre de Banach sur* $\mathbf{R}$ (resp. $\mathbf{C}$). *Alors les groupes $K^n(A)$ définis ici coïncident avec les groupes K^n de la catégorie de Banach $\mathcal{P}(A)$ définis dans* [3]. *En particulier, ils sont périodiques de période* 8 (resp. 2). *Si A est l'algèbre de Banach des fonctions continues sur un espace compact X, on retrouve les groupes $K^n(X)$ introduits par Atiyah et Hirzebruch* [1].

THEOREME 7. — *Soit A un anneau discret. Alors, pour $n \geqslant 0$, $K^n(A)$ coincide avec le groupe $K_{-n}(A)$ défini par Bass* [2]. *En particulier $K^n(A) = 0$ pour $n > 0$ si A est un anneau noethérien régulier. Enfin, on a la formule*

$$K_n(A) = K^{-n}(A) \oplus \binom{n-1}{1} K^{-n+1}(A) \oplus \binom{n-1}{2} K^{-n+2}(A) \oplus \cdots \oplus K^{-1}(A)$$

où K_n est le foncteur introduit par Nobile et Villamayor [8].

THEOREME 8. — *Soit A un anneau de Banach. On a alors des homomorphismes naturels*

$$h_1 : K_1(A) \to K^{-1}(A)$$
$$h_2 : K_2(A) \to K^{-2}(A)$$

où K_1 et K_2 sont les foncteurs introduits par Bass et Milnor respectivement [2] [7]. *L'homomorphisme h_1 est toujours surjectif. Si A est noethérien régulier discret, h_1 est bijectif et h_2 est surjectif.*

4. Interprétation de la périodicité de Bott.

La périodicité de Bott "naïve" $K^n(A) \approx K^{n+\alpha}(A)$, $\alpha \neq 0$, pour tout anneau de Banach A est fausse en général (considérer par exemple un anneau noethérien régulier). Cependant, Bass a montré dans [2] que la "bonne" généralisation de la périodicité s'exprime par une formule du type "$LK^n \approx K^{n+1}$". Avec nos notations, ceci peut se formuler de la manière suivante. Soit $A < t, t^{-1} >$ l'anneau des séries formelles $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i t^i$ telles que $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \|a_i\| < +\infty$. Si F est un foncteur quelconque de $\mathcal{B}$ dans la catégorie des groupes abéliens, on pose

$$(LF)(A) = \operatorname{Coker}\,[F(A<t>) \oplus F(A<t^{-1}>) \to F(A<t, t^{-1}>)].$$

THEOREME 9. — *Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a un isomorphisme naturel de foncteurs $K^{n+1} \approx LK^n$.*

Le théorème analogue pour $n < 0$ va nécessiter quelques hypothèses restrictives sur l'anneau de Banach A. On a par exemple le résultat suivant :

THEOREME 10. — *Soit A une algèbre de Banach sur* $\mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$ *ou un anneau noethérien régulier discret. Pour $n < 0$, on a alors un isomorphisme naturel de foncteurs $K^{n+1} \approx LK^n$* (voir [5] pour un résultat de portée plus générale).

Remarque. – Notons ΓA l'idéal de $A < t , t^{-1} >$ formé des séries $S(t)$ telles que $S(1) = 0$. Alors le théorème précédent peut s'écrire aussi $K^n(\Gamma A) \approx K^{n+1}(A)$. Dans le cas où A est une algèbre de Banach complexe, $K^n(\Gamma A)$ est isomorphe à $K^n(\Omega A) \approx K^{n-1}(A)$, ΩA désignant l'idéal de $A < x >$ formé des séries $S(x)$ telles que $S(0) = S(1) = 0$. La périodicité de Bott classique (dans le cas complexe) en résulte.

Les techniques permettant de démontrer le théorème précédent servent aussi à démontrer le résultat suivant sur le foncteur K_2 de Milnor :

THEOREME 11. – *Soit A un anneau discret. Alors $K_2(A[t , t^{-1}])$ peut s'écrire de manière naturelle sous la forme $K_2(A) \oplus K_1(A) \oplus X$ où X est un groupe en général inconnu* (1).

BIBLIOGRAPHIE

[1] ATIYAH M.F. — *K-theory*, Benjamin, 1967.
[2] BASS H. — *Algebraic K-theory*. Benjamin, 1968.
[3] KAROUBI M. — Algèbres de Clifford et K-theorie, *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, 1968, p. 161-270.
[4] KAROUBI M. — Foncteurs dérivées et K-théorie, Séminaire Heidelberg-Saarbrücken-Strasbourg, 1967-68. *Exposé 4. Springer Lecture Note* n° 136.
[5] KAROUBI M. — La périodicité de Bott en K-théorie générale. *C.R. Acad. Sci.*, Paris, t. 270, 1970, p. 1305-1307.
[6] KAROUBI M. et VILLAMAYOR O. — Foncteurs K^n en algèbre et en topologie. A paraître; en attendant *cf. C.R. Acad. Sci.* Paris, 269, 1969, p. 416-419.
[7] MILNOR J. — *Notes on algebraic K-theory* (preprint).
[8] NOBILE A et VILLAMAYOR O. — Sur la K-théorie algébrique. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 1968, p. 581-616.

Institut de Mathematiques
7, Rue René Descartes
67. Strasbourg (France)

---

(1) Ce résultat a été aussi prouvé indépendamment par Farrell et Wagoner et, dans le cas où A est noethérien régulier, par Gersten.