C. R. Acad. Sc. Paris, t. 268, p. 1091-1094 (12 mai 1969). Série A

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Matrices de Jacobi, Périodicité de Bott et C^*-algèbres.* Note (*) de M. **Max Karoubi** (1), transmise par M. Henri Cartan.

Cette Note complète deux Notes antérieures [(7), (9)], dont elle conserve la terminologie. On y définit un isomorphisme explicite de $K^n(X; \mathcal{E})$ sur $K^{n-1}(X; \check{\mathcal{H}})$ pour X compact. Ceci fournit une nouvelle démonstration des résultats de (7) et (9) et, *simultanément*, des théorèmes de périodicité de Bott (dans le cas classique). A l'aide de (8), les résultats énoncés ici peuvent se généraliser sans peine aux C^*-algèbres quelconques Les espaces d'endomorphismes considérés seront toujours supposés munis de la topologie de la norme.

1. Matrices de Jacobi. — Soit $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ une suite infinie d'espaces de Hilbert de dimension finie ou infinie et soit

$$H = H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_n \oplus \ldots.$$

Un endomorphisme de H est dit « *de Jacobi* » (12) s'il s'exprime, relativement à la décomposition de H en somme hilbertienne, par une matrice infinie (a_{ji}), $a_{ji} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(H_i, H_j)$, du type suivant : les seuls éléments éventuellement non nuls sont $a_i = a_{ii}$, $b_i = a_{i,i+1}$, $c_i = a_{i+1,i}$. On désignera une telle matrice par la notation abrégée $M(a_i, b_i, c_i)$ en sous-entendant la décomposition. La « matrice de Jacobi » $M = M(a_i, b_i, c_i)$ est dite *quasi involutive* si $(a_i)^2 + c_{i-1} b_{i-1} + b_i c_i = 1$ pour $i > 1$, $a_i b_i + b_i a_{i+1} = 0$, $c_i a_i + a_{i+1} c_i = 0$, $b_i b_{i+1} = 0$ et $c_{i+1} c_i = 0$. Ces relations équivalent au fait que M^2 est encore une matrice de Jacobi $M(a'_i, b'_i, c'_i)$, avec $b'_i = 0$, $c'_i = 0$ et $a'_i = 1$, sauf peut-être pour $i = 1$. En particulier, si a_1, b_1 et c_1 sont complètement continus, ceci implique que l'endomorphisme M est inversible modulo les opérateurs complètement continus.

2. L'isomorphisme $S : K^{p,q}(X; \mathcal{E}) \to K^{p,q+1}(X; \check{\mathcal{H}})$. — On désigne ici par $\mathcal{E}$ ou $\mathcal{E}(k)$, $k = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, la catégorie des k-espaces vectoriels de dimension finie, ceux-ci étant supposés munis d'une forme sesquilinéaire non dégénérée. Si X est un espace paracompact, un triple (E, ε, η), définissant un élément de $K^{p,q}(X; \mathcal{E})$, est dit *unitaire* si l'action de $C^{p,q}$ sur E est compatible avec la métrique et si les *deux* graduations ε et η sont unitaires. En raison d'arguments classiques, on ne change pas le groupe $K^{p,q}(X; \mathcal{E})$ en se restreignant aux triples unitaires. D'autre part, on peut évidemment regarder le couple $E' = (E, -\varepsilon)$ comme un $C^{p,q+1}$-module. On désignera par $\overline{E}'$ le $C^{p,q+1}$-module obtenu à partir de E' en faisant opérer $C^{p,q+1}$ via son involution canonique. Soient λ_n (resp. μ_n) les coefficients de Fourier de la fonction

$$f(e^{i\theta}) = \frac{1}{2}(\cos\theta + |\cos\theta|) \quad \left[\text{resp. } g(e^{i\theta}) = \frac{1}{2}(\cos\theta - |\cos\theta|)\right].$$

Si $\zeta = \varepsilon\eta$, on pose alors

$$f(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n \zeta^n, \qquad g(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n \zeta^n$$

[les séries convergent absolument car λ_n et μ_n sont $\mathrm{O}(1/n^2)$]. Dans l'espace de Hilbert, $\mathrm{F} = \mathrm{E}' \oplus \overline{\mathrm{E}}' \oplus \mathrm{E}' \oplus \ldots$, considérons l'endomorphisme de Jacobi,

$$\mathrm{M} = \mathrm{M}(a_i, b_i, c_i), \qquad \text{où} \quad a_i = (-1)^{i+1} \frac{\varepsilon(\zeta - \zeta^{-1})}{2},$$
$$b_i = c_i = g(\zeta) \quad \text{pour } i \text{ pair}, \qquad b_i = c_i = f(\zeta) \quad \text{pour } i \text{ impair}.$$

On vérifie alors aisément que M est une quasi involution qui anticommute aux générateurs de $\mathrm{C}^{p,q+1}$. Par suite, $\check{\mathrm{M}} = \mathrm{J}(\varepsilon, \eta)$ est une graduation de $\check{\mathrm{F}}$ dans la catégorie $\check{\mathcal{H}}$. L'application $(\mathrm{E}, \varepsilon, \eta) \to \big(\check{\mathrm{F}}, \mathrm{J}(\varepsilon, \varepsilon), \mathrm{J}(\varepsilon, \eta)\big)$ induit donc un homomorphisme S de $\mathrm{K}^{p,q}(\mathrm{X}; \mathcal{E})$ dans $\mathrm{K}^{p,q+1}(\mathrm{X}; \check{\mathcal{H}})$. Si Y est un sous-espace fermé de X, on définit par les mêmes formules un homomorphisme de $\mathrm{K}^{p,q}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}; \mathcal{E})$ dans $\mathrm{K}^{p,q+1}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}; \check{\mathcal{H}})$.

THÉORÈME (1). — *Supposons* X *compact. L'homomorphisme* S *est alors inverse à gauche de l'homomorphisme*

$$(2) \qquad k^{-1}.\partial^{p,q+1} : \quad \mathrm{K}^{p,q+1}(\mathrm{X}; \check{\mathcal{H}}) \to \mathrm{K}^{p,q}(\mathrm{X}; \mathcal{E})$$

défini dans (7). *En particulier* S *est un isomorphisme.*

La démonstration de la première partie du théorème 2 nécessite le calcul spectral des opérateurs unitaires; elle s'étend de manière immédiate au cas relatif. Bien entendu, puisque la catégorie des fibrés hilbertiens est flasque (8), $k^{-1}.\partial^{p,q+1}$ est un isomorphisme, ce qui implique que S l'est aussi. On peut aussi procéder de la manière suivante [sans faire appel au théorème 2.2.2 de (6)]. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{K}^{p,q+1}(\mathrm{X}; \mathcal{E}) \arrow[r, "\mathrm{S}"] \arrow[d, "t"'] & \mathrm{K}^{p,q+2}(\mathrm{X}; \check{\mathcal{H}}) \arrow[d, "\mathrm{T}"] \\
\mathrm{K}^{p,q}(\mathrm{X} \times \mathrm{D}^1, \mathrm{X} \times \mathrm{S}^0; \mathcal{E}) \arrow[r, "\mathrm{S}_1"] & \mathrm{K}^{p,q+1}(\mathrm{X} \times \mathrm{D}^1, \mathrm{X} \times \mathrm{S}^0; \check{\mathcal{H}}) \arrow[ul, "k^{-1}.\partial", "\approx"']
\end{tikzcd}$$

où les homorphismes t et T sont ceux du théorème 2.2.2 de (6) pour les catégories de Banach $\mathcal{E}$ et $\check{\mathcal{H}}$ et où $\partial.\mathrm{T} = \partial^{p,q+1}$ [*cf.* (6), § 2.3]. Il résulte alors de la première partie du théorème que $t' = -k^{-1}.\partial.\mathrm{S}_1$ est inverse à droite de t. En utilisant les structures multiplicatives en K-théorie, on en déduit formellement que $t'.t = 1$ et que, toutes les flèches du diagramme sont des isomorphismes [*cf.* (5), § 1 pour ce formalisme ainsi que le paragraphe 4 de cette Note]. On obtient ainsi une autre démonstration des résultats de ([7]) et des théorèmes de périodicité de Bott classiques [*cf.* ([6]), § 2.3 pour la traduction].

Désignons par $\mathcal{H}_c$ la catégorie $\mathcal{L}(\mathcal{K}^+)$ où $\mathcal{K}^+$ est l'algèbre $\mathcal{K}$ des opérateurs complètement continus augmentée d'un élément unité. L'homomorphisme S se factorise alors en la suite

$$K^{p,q}(X; \mathcal{E}) \xrightarrow{l} \tilde{K}^{p,q}(X; \mathcal{H}_c) \xrightarrow{S'} K^{p,q+1}(X; \check{\mathcal{H}}).$$

Pour X compact, l et S' sont des isomorphismes. Pour X paracompact, seul S' est un isomorphisme en général. On peut en déduire une autre démonstration du théorème 2 de ([9]) pour l'algèbre de Banach $A = \operatorname{End} H/\mathcal{K}$ (sans utiliser le théorème de Kuiper).

3. Interprétation de S sur les espaces classifiants. — Par « fonctorialité », les considérations précédentes sur les groupes $K^{p,q}$ se reflètent sur les espaces classifiants $\widetilde{\mathrm{Grad}}^{p,q}$ ou $\mathcal{F}^{p,q}$ [*cf.* ([9]), ([11])]. Grâce aux algèbres de Clifford, on obtient ainsi des équivalences d'homotopie *explicites* $\mathbf{Z} \times B_0 \to \mathcal{F}^{0,0}$, $O \to \mathcal{F}^{0,1}$, $O/U \to \mathcal{F}^{0,2}$, $U/Sp \to \mathcal{F}^{0,3}$, etc. (dans le cas complexe il n'y a que deux applications). Décrivons par exemple l'application $O \to \mathcal{F}^{0,1}$. Pour cela, il est commode de considérer le groupe orthogonal infini $o = \varinjlim O(n)$ comme plongé (avec une topologie plus forte) dans $O_c(H)$ qui est le groupe des automorphismes unitaires de H de la forme $1 + k$, k complètement continu. On est ainsi ramené à décrire une application continue

$$S' : \ O_c(H) \to \mathcal{F}^{0,1}(H') \approx \mathcal{F}^{0,1} \tag{3}$$

où $H' = H \oplus H \oplus H \oplus \ldots$. On pose alors

$$S'(\alpha) = M(a_i, b_i, c_i), \qquad \text{où} \quad a_i = (-1)^{i+1}\frac{\alpha - \alpha^{-1}}{2},$$

$$b_i = -c_i = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n \alpha^n \quad \text{pour } i \text{ pair}, \qquad b_i = -c_i = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n \alpha^n \quad \text{pour } i \text{ impair}.$$

4. Extension aux C*-algèbres. — Soit A une C*-algèbre réelle ou complexe plongée dans la C*-algèbre $\operatorname{End}_{\mathcal{H}}(H)$. Si on pose $H' = H \oplus H \oplus H \oplus \ldots$, un endomorphisme de H' sera dit « *A-permutant* » s'il s'exprime, relativement à la décomposition de H', par une matrice infinie (a_{ji}), où $a_{ji} \in A$ et où, dans chaque ligne et chaque colonne, il y a au plus un élément non nul. Par définition, le « *cône* » CA de A est la plus petite C*-algèbre contenue dans $\operatorname{End}_{\mathcal{H}}(H')$ et contenant les endomorphismes A-permutants. Soit $\mathcal{J}$ le plus petit idéal fermé de CA contenant les matrices permutantes (a_{ji}) telles que $a_{ji} = 0$, sauf pour un nombre fini de couples (i, j). Par définition, la « *suspension* » SA de A est la C*-algèbre quotient $CA/\mathcal{J}$ ([4]). Les méthodes précédentes s'appliquent alors trivialement dans ce contexte [remplacer $\mathcal{E}$ par $\mathcal{L}(A)$, $\mathcal{H}$ par $\mathcal{L}(CA)$, $\check{\mathcal{H}}$ par $\mathcal{L}(SA)$]. Pour X compact, on obtient