(8a)

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur le « théorème de Thom » en* K*-théorie équivariante* [1]. Note [*] de M. **Max Karoubi**, transmise par M. Henri Cartan.

Nous donnons ici un schéma de démonstration de la conjecture 3.3.1 de [9] dans un cas particulier important, celui où la catégorie de Banach $\mathcal{C}$ est celle des espaces vectoriels réels de dimension finie. Cette conjecture fournit un moyen de calcul quasi algébrique de la K-théorie équivariante de l'espace de Thom d'un G-fibré *réel*. Les techniques développées ici s'inspirent pour l'essentiel de [9] et de [6] [*voir* aussi [4]].

1. Énoncés du « théorème de Thom ». — Soit G un groupe de Lie compact augmenté [2] dans le sens de [9] et soit X un espace compact où le groupe G opère continûment. Si E est un fibré *complexe* de base X, les automorphismes $\mathbf{C}$-linéaires et $\mathbf{C}$-antilinéaires (n'induisant pas nécessairement l'identité sur la base) forment de manière naturelle un groupe augmenté $\widetilde{\mathrm{Aut}}(\mathrm{E})$. Par définition, un $\overline{\mathrm{G}}$-fibré est la donnée d'un fibré complexe E et d'un homomorphisme continu de groupes augmentés

$$\tau : \quad \mathrm{G} \to \widetilde{\mathrm{Aut}}(\mathrm{E}).$$

De manière plus précise, à chaque élément g de G et à chaque point x de X, est associé un homomorphisme

$$(\tau(g))_x : \quad \mathrm{E}_x \to \mathrm{E}_{g.x},$$

$\mathbf{C}$-linéaire (resp. $\mathbf{C}$-antilinéaire) si $g \in \mathrm{G}^0$ (resp. si $g \in \mathrm{G}^1$), dépendant continûment du couple (x, g). Considérons maintenant un G-fibré *réel* V de base X, muni d'une forme quadratique Q définie positive invariante par l'action de G. Par définition, un $\overline{\mathrm{G}}$-$\mathrm{C(V)}$-*fibré* sur X est la donnée

— d'un $\overline{\mathrm{G}}$-fibré E sur X au sens précédent;

— d'une structure de C(V)-module sur E compatible avec la structure de $\overline{\mathrm{G}}$-module, C(V) désignant le fibré en algèbres de Clifford associé au couple (V, Q).

Ainsi, pour chaque vecteur v de V_x, $x \in \mathrm{X}$, on a une application linéaire

$$(\sigma(v))_x : \quad \mathrm{E}_x \to \mathrm{E}_x,$$

dépendant continûment de v et telle que $(\sigma(v))^2 = \mathrm{Q}(v)\,.\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$.

De plus, on a la relation $\tau(g)\,\sigma(v) = \sigma(g.v)\,\tau(g)$ pour $g \in \mathrm{G}$ et $v \in \mathrm{V}$. Cette définition vaut dans le cas où E est un fibré vectoriel de dimension finie ou hilbertien [dans ce cas on supposera que les structures de $\overline{\mathrm{G}}$-module et de C(V)-module sont compatibles avec la métrique].

Dans le cas de la dimension finie, les $\overline{G}$-C(V)-fibrés $\mathbf{Z}_2$-gradués sont de manière naturelle les objets d'une catégorie de Banach graduée dans le sens de [9]. Le groupe de Grothendieck gradué de cette catégorie sera noté $KR_G^V(X)$. On définit de manière analogue un groupe $KR_G^V(X, Y)$ lorsque X est localement compact et Y fermé dans X. On a alors $KR_G^V(X, Y) \approx KR_G^V(X - Y)$ [3].

Théorème 1. — *L'homomorphisme*

$$t: \quad KR_G^{W\oplus V}(X) \to KR_G^W(B(V), S(V)) \approx KR_G^W(V),$$

défini dans [9] (§ 3.3), *est un isomorphisme.*

On peut donner un énoncé équivalent du théorème 1 en utilisant les structures multiplicatives en K-théorie. Pour cela, il nous faut décrire le groupe $KR_G^V(X)$ à l'aide des opérateurs de Fredholm. Cette nouvelle définition, calquée sur celle du groupe $\overline{K}^{p,q}(X)$ étudié dans une Note antérieure [10], peut être explicitée de la manière suivante : on considère les classes d'homotopie de couples (E, D), où E est un fibré hilbertien en $\overline{G}$-C(V)-modules gradués et où D est une « quasi-graduation » de E, c'est-à-dire une famille continue d'opérateurs de Fredholm autoadjoints, de degré un, commutant à l'action de G et anticommutant aux vecteurs v de V. On montre alors, comme dans [10], que le groupe $KR_G^V(X)$ s'identifie au quotient du monoïde formé avec de telles paires par la relation d'équivalence engendrée par l'addition de paires (E, D), où D est une famille continue d'opérateurs inversibles. Cette nouvelle définition permet d'interpréter simplement l'homomorphisme t du théorème 1 par une « formule » du type $t(\sigma(E, w, v; D)) = \sigma(E, w; v + D)$ [*cf.* [10]]. Les considérations de [10] relatives aux structures multiplicatives se généralisent aussi de manière triviale dans ce contexte. Soit maintenant V^- le fibré réel sous-jacent à V, G opérant sur V^- par les formules suivantes :

$$g \star v = g.v \quad \text{si} \quad g \in G^0$$
$$g \star v = -g.v \quad \text{si} \quad g \in G^1.$$

On voit alors aisément que $T = V^- \oplus V$ est un $\overline{G}$-fibré et que le fibré en algèbres extérieures complexes $\Lambda(T)$ est un $\overline{G}$-C(T)-fibré $\mathbf{Z}_2$-gradué [*cf.* [5]]. Le couple $(\Lambda(T), o)$ définit donc ainsi un élément de $KR_G^T(X) = KR_G^{V^-\oplus V}(X)$. Par définition, la « classe de Thom » U_V du fibré V est l'image de cet élément par l'homomorphisme

$$t: \quad KR_G^{V^-\oplus V}(X) \to KR_G^{V^-}(V).$$

Le théorème 1 est alors équivalent au théorème suivant [*cf.* aussi [4] et [9]] :

Théorème 2. — *Le cup-produit par la classe de Thom* U_V *définit un isomorphisme*

$$\varphi: \quad KR_G^W(X) \to KR_G^{W\oplus V^-}(V).$$