C. R. Acad. Sc. Paris, t. 270, p. 1305-1307 (20 mai 1970). Série A

ALGÈBRE ET TOPOLOGIE. — *La périodicité de Bott en K-théorie générale.*
Note (*) de M. **Max Karoubi**, transmise par M. Henri Cartan.

La « K-théorie générale » désigne ici la K-théorie axiomatique développée dans la Note ([6]). Les résultats principaux que l'on établira seront valables aussi bien en K-théorie algébrique qu'en K-théorie topologique. Le but de cette Note est le théorème 2 qui est d'ordre très général mais qui implique presque immédiatement le théorème de périodicité de Bott dans le cas complexe. Le théorème 2 se présente ainsi comme une justification *a posteriori* de la définition des foncteurs K^n, $n \in \mathbf{Z}$, proposée dans la Note ([6]), Note dont nous conserverons les notations et la terminologie.

1. Soit A un anneau de Banach dans le sens de ([6]) (par exemple un anneau discret, ou une algèbre de Banach réelle, complexe ou p-adique). On désigne par $A\{t, t^{-1}\}$ l'anneau des séries formelles $T = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n t^n$ avec $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \|a_n\| < +\infty$ et par ΓA l'idéal formé des séries satisfaisant à la condition supplémentaire $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n = 0$. On peut définir un homomorphisme $\varphi : A\{t, t^{-1}\} \to SA$ de la manière suivante : à la série T on associe dans SA la classe de la matrice infinie

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

Le but de cette Note est d'étudier l'effet de cet homomorphisme sur les groupes K^n [noter que $K^n(SA) = K^{n+1}(A)$ pour $n \geq 0$ par définition des groupes K^n]. On notera $A_{r,n}$ ou $A\{x_1, \ldots, x_r, t_1, \ldots, t_n, t_1^{-1}, \ldots, t_n^{-1}\}$ l'anneau des séries formelles $\sum_{\substack{i_1, \ldots, i_r \in \mathbf{N}^r \\ j_1, \ldots, j_n \in \mathbf{Z}^n}} a_{i_1 \ldots i_r, j_1 \ldots j_n} x_1^{i_1} \ldots x_r^{i_r} t_1^{j_1} \ldots t_n^{j_n}$ telles que la somme des quasi-normes de leurs coefficients soit bornée (noter que $A_{0,1} = A\{t, t^{-1}\}$ et que $A_{1,0} = A\{x\}$).

Définition 1. — *Soit A un anneau de Banach. On dira que A est « K-régulier » si, pour tout couple (r, n), l'inclusion naturelle de $A_{0,n}$ dans $A_{r,n}$ induit un isomorphisme $K^0(A_{0,n}) \approx K^0(A_{r,n})$.*

Exemples. — Tout anneau noethérien régulier discret est K-régulier (théorèmes de Hilbert et de Grothendieck), d'où la terminologie. Il en est de même des algèbres de Banach réelles ou complexes. Si A est K-régulier, les anneaux $A\{x\}$, EA, ΩA, $A\{t, t^{-1}\}$, $\tilde{A}$, CA et SA sont K-réguliers.

Soit $A\{t\}$ (resp. $A\{t^{-1}\}$) le sous-anneau de $A\{t, t^{-1}\}$ formé des séries ne comportant que des puissances de t positives (resp. négatives). A un foncteur covariant F quelconque de la catégorie des anneaux de Banach dans celle des groupes abéliens, on associe le foncteur LF défini par la formule

$$\mathrm{LF}(A) = \mathrm{Coker}\,F(A\{t\}) \oplus F(A\{t^{-1}\}) \to F(A\{t, t^{-1}\}) \quad (^1)$$

[noter que $\mathrm{LK}^n(A) = K^n(\Gamma A)$ si $n < 0$ ou si A est K-régulier, le foncteur K^n étant alors un invariant homotopique de A; *cf.* théorème 2].

Théorème 2. — *Soit* A *un anneau de Banach quelconque. L'homomorphisme* $\varphi : A\{t, t^{-1}\} \to SA$ *induit pour tout* n *un isomorphisme* $\mathrm{LK}^n(A) \approx K^n(SA)$. *En outre :*

(*a*) *si* $n \geq 0$, $K^n(SA) = K^{n+1}(A)$. *Donc les foncteurs* K^{n+1} *et* LK^n *sont toujours isomorphes dans ce cas* ([8]);

(*b*) *si* $n < 0$ *et si* A *est* K-*régulier*, $K^n(SA)$ *est isomorphe à* $K^{n+1}(A)$ *et on a encore* $K^{n+1} \approx \mathrm{LK}^n$;

(*c*) *si* A *est* K-*régulier, posons* $K^{p,q}(A) = K(S^p\Omega^q(A))$. *Alors* $K^{p,q}(A)$ *est naturellement isomorphe à* $K^{p-q}(A)$.

Corollaire 3. — *Soit* A *une algèbre de Banach réelle ou complexe. L'homomorphisme* φ *induit un isomorphisme entre les groupes d'homotopie* $\pi_n(\mathrm{GL}(\Gamma A))$ *et* $\pi_n(\mathrm{GL}(SA))$. *En particulier,* $\mathrm{GL}(\Gamma A)$ *et* $\mathrm{GL}(SA)$ *ont le même type d'homotopie.*

En effet, $K^{-n-1}(B) \approx \pi_n(\mathrm{GL}(B))$ pour toute algèbre de Banach réelle ou complexe.

Corollaire 4 (théorème de périodicité de Bott complexe). — *Soit* A *une algèbre de Banach complexe. Alors* $K^{n-1}(A) \approx K^{n+1}(A)$.

Ce dernier corollaire résulte essentiellement du fait que $\mathrm{GL}(\Gamma A)$ et $\mathrm{GL}(\Omega A)$ ont le même type d'homotopie [on utilise ici la transformation $t = \exp(2i\pi\theta)$ pour se ramener aux fonctions continues sur le cercle].

2. L'isomorphisme de « périodicité » $\mathrm{LK}^n \approx K^{n+1}$ peut aussi s'interpréter à l'aide d'un « cup-produit » convenable. De manière précise, considérons trois anneaux de Banach A, B et C ainsi qu'un homomorphisme bilinéaire borné

$$\psi : A \times B \to C$$

qui respecte les structures d'anneaux de chacun des facteurs. On peut alors démontrer le théorème suivant :

Théorème 5. — *Il existe des homomorphismes naturels uniques*

$$\psi^{n,p} : K^{-n}(A) \otimes K^{-p}(B) \to K^{-n-p}(C)$$

qui satisfont aux propriétés suivantes :

(*a*) $\psi^{0,0}$ *coïncide avec le cup-produit usuel en* K-*théorie* [*cf.* ([5]), § 2.4];

(*b*) *les homomorphismes* $\psi^{n,p}$ *sont compatibles* (avec un signe convenable) *avec les opérateurs bord associés à des fibrations entre anneaux de Banach.*