C. R. Acad. Sc. Paris, t. 272, p. 1237-1240 (10 mai 1971). Série A

ALGÈBRE HOMOLOGIQUE. — *K-théorie hermitienne*. Note (*) de

MM. **Max Karoubi** et **Orlando Villamayor**, transmise par M. Henri Cartan.

On adapte les techniques de la K-théorie classique [(3), (5), (6)] à la K-théorie hermitienne considérée par Bass (3), Novikov (7), etc.

1. Catégories hermitiennes. — Soit $\mathcal{C}$ une « catégorie en groupes de Banach » dans le sens de [(5), p. 113]. Un « foncteur de transposition » sur $\mathcal{C}$ est la donnée d'un foncteur banachique contravariant (noté t comme il est d'usage) de $\mathcal{C}$ dans elle-même et d'un isomorphisme fonctoriel $\theta : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to t^2$. Une *catégorie hermitienne* est une catégorie en groupes de Banach munie d'un tel foncteur de transposition. Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux catégories hermitiennes, un *foncteur hermitien* de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$ est un foncteur banachique (covariant) de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$ qui commute (à isomorphisme canonique près) aux foncteurs de transposition et aux isomorphismes fonctoriels de Id sur t^2. Une « *forme sesquilinéaire* » sur un objet M d'une catégorie hermitienne est la donnée d'un morphisme $u : \mathrm{M} \to {}^t\mathrm{M}$. La forme est dite *non dégénérée* si u est un isomorphisme. On note Sesq (M) le **Z**-module des formes sesquilinéaires sur M. En identifiant M à ${}^t({}^t\mathrm{M})$ grâce à l'isomorphisme fonctoriel θ, on peut définir une involution T sur Sesq (M) en posant $\mathrm{T}(u) : \mathrm{M} \approx {}^t({}^t\mathrm{M}) \xrightarrow{{}^tu} {}^t\mathrm{M}$. Si $\varepsilon = \pm 1$, on a donc le complexe

$$\mathrm{Sesq}(\mathrm{M}) \xrightarrow{1+\mathrm{T}\varepsilon} \mathrm{Sesq}(\mathrm{M}) \xrightarrow{1-\mathrm{T}\varepsilon} \mathrm{Sesq}(\mathrm{M}).$$

Une *forme ε-hermitienne* sur M est un élément de $\mathrm{Ker}(1 - \mathrm{T}\varepsilon)$; une *forme ε-quadratique* q sur M est un élément de $\mathrm{Coker}(1 - \mathrm{T}\varepsilon)$ [(8), (9)]. Si q est représentée par une forme sesquilinéaire u_0, la forme ε-hermitienne qui lui est associée est $u = (1 + \mathrm{T}\varepsilon)(u_0)$; q est dite non dégénérée si u est non dégénérée.

Exemple. — Soit A un « *anneau hermitien* », c'est-à-dire un anneau de Banach (6) muni d'une antiinvolution bornée σ. Si A est unitaire et si M est un A-module à droite, définissons « *l'antidual* » de M, soit ${}^t\mathrm{M}$, comme le A-module à droite formé des applications **Z**-linéaires $f : \mathrm{M} \to \mathrm{A}$ telles que $f(x\alpha) = \sigma(\alpha) f(x)$ pour $\alpha \in \mathrm{A}$ et $x \in \mathrm{M}$. Si M est projectif de type fini, on voit aisément que l'application canonique de M sur ${}^t({}^t\mathrm{M})$ est un isomorphisme. La catégorie $\mathcal{P}(\mathrm{A})$ des A-modules projectifs de type fini est donc ainsi munie d'une structure hermitienne.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie hermitienne et soient M et N deux objets de $\mathcal{C}$ munis de formes ε-quadratiques représentées par les formes sesquilinéaires u_0 et v_0 respectivement. Un morphisme $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ est dit *ε-orthogonal* si $u_0 - {}^tf . v_0 . f \in \mathrm{Im}(1 - \mathrm{T}\varepsilon)$. Il est clair que les objets de $\mathcal{C}$ munis de formes ε-quadratiques non dégénérées forment ainsi les objets d'une nouvelle catégorie ${}_{\varepsilon}Q(\mathcal{C})$, les morphismes étant les morphismes ε-orthogonaux. La somme directe des objets de $\mathcal{C}$ permet de définir une structure de monoïde abélien sur l'ensemble des classes d'isomorphie d'objets de ${}_{\varepsilon}Q(\mathcal{C})$. Le groupe symétrisé de ce monoïde, soit ${}_{\varepsilon}L(\mathcal{C})$, est le *$\varepsilon$-groupe de Grothendieck de la catégorie hermitienne $\mathcal{C}$.*

Dans les paragraphes suivants, nous nous proposons de définir axiomatiquement des foncteurs ${}_{\varepsilon}L^n(\mathcal{C})$, $\mathcal{C}$ catégorie hermitienne, $n \in \mathbf{Z}$, ${}_{\varepsilon}L^0(\mathcal{C}) = {}_{\varepsilon}L(\mathcal{C})$, en suivant le schéma tracé dans [5] et [6]. Cependant, pour faciliter l'exposition, nous nous limiterons à l'exemple de la catégorie hermitienne $\mathcal{L}(A)$, A anneau hermitien unitaire, cité ci-dessus. Nous noterons simplement ${}_{\varepsilon}L^n(A)$ les groupes ${}_{\varepsilon}L^n(\mathcal{L}(A))$. Si A n'est pas unitaire, nous poserons ${}_{\varepsilon}L^0(A) = {}_{\varepsilon}L(A) = \operatorname{Ker}({}_{\varepsilon}L(A^+) \to {}_{\varepsilon}L(\mathbf{Z}))$ comme dans [6].

2. Définition des foncteurs L^n pour $n \geq 0$. — Soit A un anneau hermitien. Si $M = (a_{ji})$ est une matrice infinie à coefficients dans A $(i, j \in \mathbf{N})$, on pose

$$\| M \| = \operatorname{Sup}(\| M \|_1, \| M \|_2), \qquad \text{où} \quad \| M \|_1 = \operatorname{Sup}_i \sum_j \| a_{ji} \| \quad \text{et} \quad \| M \|_2 = \operatorname{Sup}_j \sum_i \| a_{ji} \|.$$

Les matrices M telles que $\| M \| < +\infty$ forment un anneau de Banach B qui est en outre un anneau hermitien pour l'antiinvolution σ' définie par $\sigma'(M) = (b_{ji})$ et $b_{ji} = \sigma(a_{ij})$. Une matrice diagonale est dite de type fini si elle ne contient qu'un nombre fini d'éléments différents. Le « *cône* » CA de A est le plus petit sous-anneau de Banach de B contenant les matrices diagonales de type fini et les matrices de permutation. L'*anneau stabilisé* $\tilde{A}$ est l'idéal de CA formé des matrices adhérentes à l'ensemble des matrices finies. La *suspension* SA est l'anneau de Banach quotient $CA/\tilde{A}$ [1]. Les anneaux de Banach CA, A et SA sont en fait des anneaux hermitiens pour l'antiinvolution induite par celle de B. On pose alors ${}_{\varepsilon}L^0(A) = {}_{\varepsilon}L(A)$ et, par récurrence sur n, ${}_{\varepsilon}L^{n+1}(A) = {}_{\varepsilon}L^n(SA)$. Avec quelques restrictions anodines sur A, on peut caractériser axiomatiquement ces foncteurs de la manière suivante. Nous dirons d'abord qu'une catégorie hermitienne $\mathcal{C}$ est *flasque* s'il existe un foncteur hermitien $\tau : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ et un isomorphisme fonctoriel $h : \tau + \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to \tau$ tel que ${}^t h . h$ et $h . {}^t h$ soient des identités en un sens évident. Un anneau hermitien unitaire A est flasque si la catégorie hermitienne associée $\mathcal{L}(A)$ est flasque.

Théorème 1. — *Soit $\mathcal{A}'$ la catégorie des anneaux hermitiens discrets ou celle des anneaux hermitiens* A *tels que tout élément de* A *soit divisible par* 2. *Il existe alors une façon et une seule* (à isomorphisme près) *de définir des foncteurs* ${}_{\varepsilon}L^n$ *sur* $\mathcal{A}'$, $n \geq 0$, *et des opérateurs de connexion naturels* ${}_{\varepsilon}L^n(A'') \xrightarrow{\partial^n} {}_{\varepsilon}L^{n+1}(A')$ *pour toute « suite exacte » d'anneaux hermitiens*

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

de sorte que les axiomes suivants soient satisfaits :

(1) *La suite*

$${}_{\varepsilon}L^{n}(A') \to {}_{\varepsilon}L^{n}(A) \to {}_{\varepsilon}L^{n}(A'') \xrightarrow{\partial^{n}} {}_{\varepsilon}L^{n+1}(A') \to {}_{\varepsilon}L^{n+1}(A)$$

est une suite exacte;

(2) ${}_{\varepsilon}L^{n}(A) = 0$ *si* A *est un anneau flasque;*

(3) ${}_{\varepsilon}L^{0}(A) = {}_{\varepsilon}L(A)$ *et l'inclusion naturelle de* A *dans* $\tilde{A}$ *induit un isomorphisme de* ${}_{\varepsilon}L^{n}(A)$ *sur* ${}_{\varepsilon}L^{n}(\tilde{A})$.

3. Définition des foncteurs L^{n} pour $n \leq 0$. — Soit de nouveau A un anneau hermitien. Les anneaux de Banach $A\langle x\rangle$, EA et ΩA introduits dans [6] sont aussi hermitiens [2]. On pose alors

$${}_{\varepsilon}L^{-1}(A) = \mathrm{Ker}({}_{\varepsilon}L(\Omega A) \to {}_{\varepsilon}L(EA)) \qquad \text{et} \qquad {}_{\varepsilon}L^{-n-1}(A) = {}_{\varepsilon}L^{-n}(\Omega A) \qquad \text{pour } n \geq 1.$$

Ces nouveaux foncteurs peuvent être aussi caractérisés axiomatiquement en introduisant une notion de « *fibration* » convenable analogue aux fibrations de Serre dans la théorie de l'homotopie classique. De manière précise, soit ${}_{\varepsilon}O_{n,n}(A)$ le groupe des automorphismes ε-orthogonaux de $A^{n} \oplus {}^{t}(A^{n})$ et soit ${}_{\varepsilon}O(A) = \varinjlim {}_{\varepsilon}O_{n,n}(A)$. Un homomorphisme hermitien $f : A \to A''$ est une « ${}_{\varepsilon}O$-fibration » si, pour tout entier p et pour tout élément $\alpha'' = \alpha''(x_1, \ldots, x_p)$ de ${}_{\varepsilon}O(A''\langle x_1, \ldots, x_p\rangle)$ tel que $\alpha'' = \alpha''(0, \ldots, 0) = 1$, il existe un élément $\alpha = \alpha(x_1, \ldots, x_p)$ de ${}_{\varepsilon}O((A)\langle x_1, \ldots, x_p\rangle)$ tel que $f(\alpha) = \alpha''$ en un sens évident.

Théorème 2. — *Soit* $\mathcal{A}$ *la catégorie des anneaux hermitiens. Il existe alors une façon et une seule* (à isomorphisme près) *de définir des foncteurs* ${}_{\varepsilon}L^{-n}$, $n \geq 0$, *sur* $\mathcal{A}$ *ainsi que des opérateurs de connexion naturels*

$$\partial^{-n-1} : \quad {}_{\varepsilon}L^{-n-1}(A'') \to {}_{\varepsilon}L^{-n}(A')$$

pour toute ${}_{\varepsilon}O$*-fibration* $f : A \to A''$ *de noyau* A' *en sorte que les axiomes suivants soient satisfaits :*

(1) *La suite*

$${}_{\varepsilon}L^{-n-1}(A) \to {}_{\varepsilon}L^{-n-1}(A'') \xrightarrow{\partial^{-n-1}} {}_{\varepsilon}L^{-n}(A') \to {}_{\varepsilon}L^{-n}(A) \to {}_{\varepsilon}L^{-n}(A'')$$

est une suite exacte;

(2) ${}_{\varepsilon}L^{0}(A) = {}_{\varepsilon}L(A)$ *et* ${}_{\varepsilon}L^{-n}(EA) = 0$ *si* $n > 0$.

4. Calcul de certains groupes L^{n}. — Pour tout anneau hermitien unitaire A posons

$${}_{\varepsilon}L_1(A) = {}_{\varepsilon}O(A)/[{}_{\varepsilon}O(A), {}_{\varepsilon}O(A)].$$

Une méthode standard [6] permet de définir un homomorphisme surjectif

$${}_{\varepsilon}h_1 : \quad {}_{\varepsilon}L_1(A) \to {}_{\varepsilon}L^{-1}(A).$$

Proposition 3 [*cf.* [4]]. — *Soit* k *un corps commutatif discret muni de l'anti-involution triviale. Alors* ${}_1h_1$ *est un isomorphisme et* ${}_1L^{-1}(k) \approx \mathbf{Z}_2 \times k^*/(k^*)^2$.