C. R. Acad. Sc. Paris, t. 273, p. 599-602 (4 octobre 1971) Série A

14 a

ALGÈBRE HOMOLOGIQUE. — *Périodicité de la K-théorie hermitienne : le cas topologique.* Note (*) de M. MAX KAROUBI, transmise par M. Henri Cartan.

Le but de notre étude est de montrer que le cadre naturel de la périodicité de Bott algébrique est la théorie des modules quadratiques. Nous commençons par présenter ici le cas topologique qui, en dehors de son intérêt propre, fournit des motivations pour l'étude du cas général.

1. LES THÉORIES ${}_{\varepsilon}L^{p,q}$ ET ${}_{\varepsilon}U^{p,q}$. — Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de Banach hermitienne [i. e. une catégorie de Banach dans le sens de (2) munie d'un foncteur de « dualité » $' : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^0$, *cf.* (4)]. Comme exemple important citons la catégorie $\mathfrak{L}(A)$ des modules projectifs de type fini sur une algèbre de Banach unitaire involutive A. Soit $V = V^- \oplus V^+$ un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'une forme quadratique $Q = Q^- \oplus Q^+$ non dégénérée, où $Q^- < 0$ et $Q^+ > 0$ et soit C (V) l'algèbre de Clifford associée au couple (V, Q). Soit M un objet de $\mathcal{C}$ muni d'une « forme ε-quadratique » (c'est-à-dire d'un isomorphisme φ de M sur son « dual » ${}^t M$ tel que ${}^t\varphi = \varepsilon\varphi$, $\varepsilon = \pm 1$). Une structure de C (V)-*module ε-quadratique* [resp. C (V)-module *ε-quadratique gauche*] sur M est la donnée d'un homomorphisme de $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\rho : V \to \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(M)$ tel que $(\rho(v))^2 = Q(v)$ si $v \in V$ et tel que

$$\rho(v)(\rho(v))^* = |Q(v)| \quad [\text{resp. } \rho(v)(\rho(v))^* = -|Q(v)|]$$

si v appartient à V^+ ou V^-. Si M et N sont deux C (V)-modules ε-quadratiques (resp. ε-quadratiques gauches), un morphisme de M dans N est une isométrie qui est un homomorphisme entre les C (V)-modules sous-jacents. En particulier, si $C^{p,q}$ est l'algèbre de Clifford de V où $V^- = \mathbf{R}^p$ et $V^+ = \mathbf{R}^q$ sont munis des formes quadratiques $-\sum_{i=1}^{p} x_i^2$ et $\sum_{j=1}^{q} x_j^2$ respectivement, on désigne par ${}_{\varepsilon}\mathcal{C}_L^{p,q}$ (resp. ${}_{\varepsilon}\mathcal{C}_U^{p,q}$) la catégorie des $C^{p,q}$-modules ε-quadratiques (resp. ε-quadratiques gauches). Les catégories ${}_{\varepsilon}\mathcal{C}_L^{p,q}$ et ${}_{\varepsilon}\mathcal{C}_U^{p,q}$ ne sont pas des catégories additives, mais on peut définir de manière évidente une notion de somme directe. Si M et N sont deux $C^{p,q}$-modules ε-quadratiques (resp. ε-quadratiques gauches), l'ensemble des morphismes de M dans N a aussi une topologie naturelle héritée de la structure de catégorie de Banach de $\mathcal{C}$.

DÉFINITION 1. — *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de Banach hermitienne. Le groupe ${}_{\varepsilon}L^{p,q}(\mathcal{C})$ [resp. ${}_{\varepsilon}U^{p,q}(\mathcal{C})$] est le groupe de Grothendieck du foncteur restriction des scalaires*

$${}_{\varepsilon}\mathcal{C}_L^{p,q+1} \to {}_{\varepsilon}\mathcal{C}_L^{p,q} \quad (\textit{resp. } {}_{\varepsilon}\mathcal{C}_U^{p,q+1} \to {}_{\varepsilon}\mathcal{C}_U^{p,q}).$$

De manière plus précise, considérons l'ensemble des triples (E, η_1, η_2), où E est un $C^{p,q}$-module ε-quadratique (resp. ε-quadratique gauche) et où η_1 et η_2 sont deux « graduations » de E, c'est-à-dire des automorphismes involutifs de E anticommutant à l'action des générateurs de l'algèbre de Clifford tels que $\eta_j^* = \eta_j$ (resp. $\eta_j^* = -\eta_j$). Le groupe ${}_{\varepsilon}L^{p,q}(\mathcal{C})$ [resp. ${}_{\varepsilon}U^{p,q}(\mathcal{C})$] s'identifie alors au quotient de cet ensemble par la relation d'équivalence engendrée par l'homotopie et l'addition de triples de la forme (E, η, η). Si A est une algèbre de Banach unitaire involutive, on note simplement ${}_{\varepsilon}L^{p,q}(A)$ et ${}_{\varepsilon}U^{p,q}(A)$ les groupes ${}_{\varepsilon}L^{p,q}(\mathfrak{L}(A))$ et ${}_{\varepsilon}U^{p,q}(\mathfrak{L}(A))$. Si A n'a pas nécessairement d'élément unité, on pose

$${}_{\varepsilon}L^{p,q}(A) = \mathrm{Ker}\,({}_{\varepsilon}L^{p,q}(A^+) \to {}_{\varepsilon}L^{p,q}(\mathbf{R})) \quad [\text{resp. } {}_{\varepsilon}U^{p,q}(A) = \mathrm{Ker}\,({}_{\varepsilon}U^{p,q}(A^+) \to U^{p,q}(\mathbf{R}))],$$

A^+ désignant l'algèbre A augmentée sur **R**. Comme dans le cas classique [2], on démontre que les groupes ${}_{\varepsilon}L^{p,q}$, ${}_{\varepsilon}U^{p,q}$, ... ne dépendent que de la congruence de $p - q$ modulo 8 (modulo 2 seulement dans le cas *hermitien complexe*, c'est-à-dire lorsqu'il existe un automorphisme J de la catégorie hermitienne tel que $J^2 = -1$ et ${}^tJ = -J$). On notera donc ces groupes ${}_{\varepsilon}L^n$ ou ${}_{\varepsilon}U^n$ pour $n = p - q$. Si $\psi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}''$ est un foncteur hermitien on peut plus généralement définir des groupes ${}_{\varepsilon}L^n(\psi)$ et ${}_{\varepsilon}U^n(\psi)$ [5]. En particulier, si $\psi : \mathfrak{L}(A) \to \mathfrak{L}(A'')$ est le foncteur extension des scalaires associé à un homomorphisme surjectif f de A dans A'', on a ${}_{\varepsilon}L^n(\psi) \approx {}_{\varepsilon}L^n(A')$ et ${}_{\varepsilon}U^n(\psi) \approx {}_{\varepsilon}U^n(A')$, avec $A' = \mathrm{Ker}\, f$ (théorème d'excision). Si $\mathcal{C}$ est une catégorie hermitienne et si (X, Y) est une paire d'espaces compacts, $Y \subset X$, on pose

$${}_{\varepsilon}L^n(X, Y; \mathcal{C}) = {}_{\varepsilon}L^n(\psi) \quad [\text{resp. } {}_{\varepsilon}U^n(X, Y; \mathcal{C}) = {}_{\varepsilon}U^n(\psi)],$$

où $\psi : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$ est le foncteur restriction des $\mathcal{C}$-fibrés.

2. Les théorèmes de périodicité. — La formule définissant un homomorphisme $t = t_K : K^n(\mathcal{C}) \to K^{n+1}(D^1, S^0; \mathcal{C})$ [2] permet de définir de même des homomorphismes

$$t_L : {}_{\varepsilon}L^n(\mathcal{C}) \to {}_{\varepsilon}L^{n+1}(D^1, S_0; \mathcal{C}) \quad \text{et} \quad t_U : {}_{\varepsilon}U^n(\mathcal{C}) \to {}_{\varepsilon}U^{n+1}(D^1, S^0; \mathcal{C}).$$

Théorème 2. — *Les homomorphismes t_L et t_U définis ci-dessus sont des isomorphismes.*

D'après le théorème 2, les groupes ${}_{\varepsilon}L^n(X, Y; \mathcal{C})$ et ${}_{\varepsilon}U^n(X, Y; \mathcal{C})$ constituent les éléments de théories de la cohomologie sur la catégorie des paires d'espaces compacts. Si $\mathcal{C} = \mathfrak{L}(A)$, on notera ${}_{\varepsilon}L^n(X, Y; A)$ et ${}_{\varepsilon}U^n(X, Y; A)$ les théories obtenues.

Exemples. — 1. Si A = **C** muni de l'involution triviale, on a

$${}_1L^n(X, Y; A) \approx KO^n(X, Y), \qquad {}_{-1}L^n(X, Y; A) = K\,sp^n(X, Y),$$
$${}_1U^n(X, Y) = KO^{n-2}(X, Y) \quad \text{et} \quad {}_{-1}U^n(X, Y) = KO^{n+2}(X, Y).$$

2. Si $A = \mathbf{C}$ muni de l'involution définie par la conjugaison complexe, on a

$${}_1L^n(X, Y; A) = {}_{-1}L^n(X, Y; A) \approx KU^n(X, Y)$$

et

$${}_1U^n(X, Y; A) \approx {}_{-1}U^n(X, Y; A) \approx KU^{n-1}(X, Y).$$

Remarque. — Dans le cas des algèbres de Banach, le théorème 2 s'écrit de manière peut-être plus conceptuelle sous la forme

$${}_\varepsilon L^n(A) \approx {}_\varepsilon L^{n+1}(\Omega A) \qquad \text{et} \qquad {}_\varepsilon U^n(A) \approx {}_\varepsilon U^{n+1}(\Omega A)$$

compte tenu du théorème d'excision (*loc. cit.*).

Le théorème 2 admet les deux corollaires suivants :

THÉORÈME 3. — *Soit A une algèbre de Banach involutive. Les groupes* ${}_\varepsilon L^n(A)$ *définis plus haut coïncident alors avec les groupes* ${}_\varepsilon L^n(A)$ *introduits en K-théorie hermitienne dans* ([4]). *En particulier, ces derniers groupes satisfont aux relations* ${}_\varepsilon L^n(A) \approx {}_\varepsilon L^{n+8}(A)$ [*resp.* ${}_\varepsilon L^n(A) \approx {}_\varepsilon L^{n+2}(A)$ *si A contient le corps des complexes dans son centre avec l'involution définie par la conjugaison*].

THÉORÈME 4. — *Soit* $\mathcal{C}$ *une catégorie de Banach hermitienne. On a alors les suites exactes :*

$$K^{n-1}(\mathcal{C}) \to {}_\varepsilon L^{n-1}(\mathcal{C}) \to {}_\varepsilon U^n(\mathcal{C}) \longrightarrow K^n(\mathcal{C}) \longrightarrow {}_\varepsilon L^n(\mathcal{C}),$$
$${}_{-\varepsilon}L^{n-1}(\mathcal{C}) \to K^{n-1}(\mathcal{C}) \to {}_\varepsilon U^{n-1}(\mathcal{C}) \to {}_{-\varepsilon}L^n(\mathcal{C}) \to K^n(\mathcal{C}).$$

3. HOMOTOPIE DU GROUPE ORTHOGONAL ASSOCIÉ A UNE FORME HYPERBOLIQUE. — Nous allons tâcher de traduire les résultats précédents en termes plus « concrets » de groupes d'homotopie. Soit A une algèbre de Banach involutive unitaire et soit α une matrice $2n \times 2n$ à coefficients dans A écrite sous forme de blocs $n \times n$

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}.$$

Son adjointe pour la forme ε-hyperbolique est la matrice

$$\alpha^* = \begin{pmatrix} \sigma(\alpha_{22}) & \varepsilon\sigma(\alpha_{12}) \\ \varepsilon\sigma(\alpha_{21}) & \sigma(\alpha_{11}) \end{pmatrix},$$

où σ représente l'antiinvolution sur $M_n(A)$ déduite naturellement de l'anti-involution sur A. La matrice α est dite ε-*orthogonale* si $\alpha . \alpha^* = \alpha^* . \alpha = 1$. On désigne par ${}_\varepsilon O_{n,n}(A)$ le groupe des matrices $2n \times 2n$ qui sont ε-orthogonales et par ${}_\varepsilon O(A)$ le groupe orthogonal « infini » $\varinjlim {}_\varepsilon O_{n,n}(A)$. On a alors $\pi_i({}_\varepsilon O(A)) \approx {}_\varepsilon L^{-i-1}(A)$ d'après un raisonnement éprouvé ([2]).