C. R. Acad. Sc. Paris, t. 273, p. 802-805 (3 novembre 1971) Série A

ALGÈBRE HOMOLOGIQUE. — *Périodicité de la* K*-théorie hermitienne. Les théories* ${}_{\varepsilon}V^n$ *et* ${}_{\varepsilon}U^n$. Note (*) de M. **Max Karoubi**, transmise par M. Henri Cartan.

En explicitant certaines idées de Novikov ([5]), nous construisons ici des théories ${}_{\varepsilon}U^n$ et ${}_{\varepsilon}V^n$ intermédiaires entre la K-théorie classique et la K-théorie hermitienne.

1. Invariance homotopique de la K-théorie hermitienne. — Soit A un anneau de Banach et soit $A_{n,p}$ l'anneau de Banach

$$A\langle x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_p, t_1^{-1}, \ldots, t_p^{-1}\rangle$$

des séries convergentes en les variables $x_1, \ldots, t_p^{-1}$ (si A est muni de la norme discrète, ces séries sont simplement des polynômes). En suivant ([2]), on dit que A est *n-régulier* (resp. K*-régulier*) si l'inclusion de A dans $A_{n,0}$ [resp. de A dans $A_{n,p}$ pour tout couple (n, p)] induit un isomorphisme $K(A) \approx K(A_{n,0})$ [resp. $K(A) \approx K(A_{n,p})$]. Si A est un *anneau hermitien* [c'est-à-dire un anneau de Banach muni d'une anti-involution bornée, *cf.* ([4])], A est dit *n*-régulier (resp. K-régulier) si l'anneau de Banach sous-jacent est *n*-régulier (resp. K-régulier). Enfin, notons que, pour toute suite exacte

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

d'anneaux de Banach *p*-réguliers ($p \in \mathbf{N}$), on a la suite exacte

$$K^n(A) \to K^n(A'') \to K^{n+1}(A') \to K^{n+1}(A) \to K^{n+1}(A''), \qquad n \in \mathbf{Z}$$

Exemples d'anneaux de Banach K*-réguliers* (donc *n*-réguliers). — Les algèbres de Banach sur **R** ou **C**, les anneaux noethériens réguliers discrets, les corps complets à valuation discrète, etc. [*cf.* ([2])].

Convention importante pour la suite. — *Les anneaux considérés ont tous leurs éléments divisibles par* 2 (i. e. l'équation $2x = a$ admet une solution et une seule).

Lemme 1. — *Soit* A *un anneau hermitien et soit* ${}_{\varepsilon}L'(A)$ *le noyau de l'homomorphisme* ${}_{\varepsilon}L(A) \to K(A)$. *L'inclusion de* A *dans* $A_{n,0}$ *induit alors un isomorphisme* ${}_{\varepsilon}L'(A_{n,0}) \approx {}_{\varepsilon}L'(A)$. *En particulier,* ${}_{\varepsilon}L(A_{n,0}) \approx {}_{\varepsilon}L(A)$ *si* A *est n-régulier.*

Corollaire 2. — *Soit* A″ *un anneau hermitien n-régulier pour tout n et soit* A → A″ *un homomorphisme surjectif d'anneaux hermitiens* (A″ étant muni de la norme quotient). *Alors l'homomorphisme* SA → SA″ *est une* ${}_{\varepsilon}0$*-fibration dans le sens de* ([4]).

Corollaire 3. — *Soit*

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

une suite exacte d'anneaux hermitiens p-réguliers pour tout p. On a alors la suite exacte

$$ {}_\varepsilon L^n(A) \to {}_\varepsilon L^n(A'') \to {}_\varepsilon L^{n+1}(A') \to {}_\varepsilon L^{n+1}(A) \to {}_\varepsilon L^{n+1}(A''), \qquad n \in \mathbf{Z}. $$

PROPOSITION 4. — *Soit* A *un anneau hermitien* K-*régulier et soit* ${}_\varepsilon L^{p,q}(A)$ *le groupe* ${}_\varepsilon L(S^p \Omega^q A)$. *Alors* ${}_\varepsilon L^{p,q}(A)$ *est naturellement isomorphe au groupe* ${}_\varepsilon L^n(A)$, $n = p - q$.

La proposition précédente peut être formulée de manière plus précise grâce à des « cup-produits » appropriés comme dans ([2]). En effet, si on pose $\mathbf{Z}' = \mathbf{Z}[1/2]$, on a ${}_1L(S\,\Omega\,\mathbf{Z}') \approx {}_1L(\mathbf{Z}')$ d'après la proposition précédente. Le cup-produit par l'élément de ${}_1L(S\,\Omega\,\mathbf{Z}')$ correspondant à l'élément unité de ${}_1L(\mathbf{Z}')$ induit un isomorphisme de ${}_\varepsilon L^{p,q}(A)$ sur ${}_\varepsilon L^{p+1,q+1}(A)$ si A est K-régulier.

2. LA THÉORIE ${}_\varepsilon V^n$. — Si $\mathcal{C}$ est une catégorie hermitienne (tout morphisme étant divisible par 2) désignons par ${}_\varepsilon Q(\mathcal{C})$ la catégorie des objets ε-quadratiques de $\mathcal{C}$. Par définition, le groupe ${}_\varepsilon V(\mathcal{C})$ est le groupe de Grothendieck du foncteur « oubli » ${}_\varepsilon Q(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$. De manière plus précise, considérons l'ensemble des triples (E, g_1, g_2), où E est un objet de $\mathcal{C}$ et où $g_j : E \to {}'E$, $j = 1, 2$, est un isomorphisme tel que ${}^tg_j = \varepsilon\, g_j$. Le groupe ${}_\varepsilon V(\mathcal{C})$ est alors le quotient du groupe libre engendré par les classes d'isomorphie de tels triples par le sous-groupe engendré par les relations suivantes :

$$ (1) \qquad (E \oplus E', g_1 \oplus g'_1, g_2 \oplus g'_2) = (E, g_1, g_2) + (E', g'_1, g'_2); $$

$$ (2) \qquad (E, g_1, g_2) = 0 $$

si g_2 est « homotope » à g_1, c'est-à-dire s'il existe un isomorphisme $g = g(x) : E \to {}'E$ dans la catégorie $\mathcal{C}\langle x \rangle$ tel que ${}'g = \varepsilon\, g$ et tel que

$$ g(0) = g_1, \qquad g(1) = g_2. $$

Si A est un anneau hermitien unitaire, on pose ${}_\varepsilon V(A) = {}_\varepsilon V(\mathcal{P}(A))$. Si A n'est pas unitaire, on pose

$$ {}_\varepsilon V(A) = \operatorname{Ker}({}_\varepsilon V(A^+) \to {}_\varepsilon V(\mathbf{Z}')), $$

A^+ étant l'algèbre A augmentée sur $\mathbf{Z}' = \mathbf{Z}[1/2]$.

DÉFINITION ET THÉORÈME 5. — *Pour tout anneau hermitien* K-*régulier* A *posons* ${}_\varepsilon V^{p,q}(A) = {}_\varepsilon V(S^p \Omega^q A)$. *On a alors des isomorphismes naturels*

$$ {}_\varepsilon V^{p,q}(A) \approx {}_\varepsilon V^{p+1,q+1}(A). $$

Posons

$$ {}_\varepsilon V^n(A) = {}_\varepsilon V^{n,0}(A) \quad si\ n \geq 0 \qquad et \qquad {}_\varepsilon V^n(A) = {}_\varepsilon V^{0,-n}(A) \quad si\ n \leq 0. $$

On a alors la suite exacte

$$ {}_\varepsilon L^{n-1}(A) \to K^{n-1}(A) \to {}_\varepsilon V^n(A) \to {}_\varepsilon L^n(A) \to K^n(A). $$

Enfin, pour toute suite exacte d'anneaux hermitiens K-*réguliers*

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0,$$

on a la suite exacte

$${}_{\varepsilon}V^{n-1}(A) \to {}_{\varepsilon}V^{n-1}(A'') \to {}_{\varepsilon}V^{n}(A') \to {}_{\varepsilon}V^{n}(A) \to {}_{\varepsilon}V^{n}(A'').$$

Remarque. — Si A est une algèbre de Banach involutive, on vérifie aisément que ${}_{\varepsilon}V(A) \approx {}_{-\varepsilon}U^{0,1}(A)$ avec les notations de la Note précédente [3]. Donc ${}_{\varepsilon}V^{n}(A) \approx {}_{-\varepsilon}U^{n-1}(A)$ dans ce cas. En fait, nous verrons dans la Note suivante que ${}_{\varepsilon}V^{n}(A) \approx {}_{-\varepsilon}U^{n-1}(A)$ si A est un anneau hermitien K-régulier.

3. La théorie ${}_{\varepsilon}U^{n}$. — Nous allons construire une théorie ${}_{\varepsilon}U^{n}$ sur la catégorie des anneaux hermitiens généralisant la théorie ${}_{\varepsilon}U^{n}$ étudiée dans le cas topologique [3]. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie hermitienne telle que tout morphisme de $\mathcal{C}$ soit divisible par 2. On désigne alors par ${}_{\varepsilon}U(\mathcal{C})$ le groupe de Grothendieck du foncteur hyperbolique $\overline{\mathcal{C}} \to {}_{\varepsilon}Q(\mathcal{C})$, $\overline{\mathcal{C}}$ étant la catégorie des isomorphismes de $\mathcal{C}$. De manière plus précise, le groupe ${}_{\varepsilon}U(\mathcal{C})$ peut être construit ainsi. On considère l'ensemble des triples (F, η_1, η_2), où F est un objet ε-quadratique de $\mathcal{C}$ et où η_1 et η_2 sont deux graduations « gauches » de F, c'est-à-dire des automorphismes involutifs de F tels que $\eta_j^{*} = -\eta_j$, $j = 1, 2$. Le groupe ${}_{\varepsilon}U(\mathcal{C})$ est alors le quotient du groupe libre engendré par les classes d'isomorphie de tels triples par le sous-groupe engendré par les relations suivantes :

$$(1)\qquad (E \oplus E', \eta_1 \oplus \eta'_1, \eta_2 \oplus \eta'_2) = (E, \eta_1, \eta_2) + (E', \eta'_1, \eta'_2);$$

$$(2)\qquad (E, \eta_1, \eta_2) = 0$$

si la graduation η_2 est homotope à la graduation η_1.

Si A est un anneau hermitien unitaire, on pose

$${}_{\varepsilon}U(A) = {}_{\varepsilon}U(\mathcal{P}(A)).$$

Si A n'est pas unitaire, on pose

$${}_{\varepsilon}U(A) = \mathrm{Ker}\,({}_{\varepsilon}U(A^{+}) \to {}_{\varepsilon}U(\mathbf{Z}')).$$

Définition et théorème 6. — *Pour tout anneau hermitien* K-*régulier* A *posons* ${}_{\varepsilon}U^{p,q}(A) = {}_{\varepsilon}U(S^{p}\,\Omega^{q}A)$. *On a alors des isomorphismes naturels* ${}_{\varepsilon}U^{p,q}(A) \approx {}_{\varepsilon}U^{p+1,q+1}(A)$. *Posons*

$${}_{\varepsilon}U^{n}(A) = {}_{\varepsilon}U^{n,0}(A) \quad si\ n \geq 0 \qquad et \qquad {}_{\varepsilon}U^{n}(A) = {}_{\varepsilon}U^{0,-n}(A) \quad si\ n \leq 0.$$

On a alors la suite exacte

$$K^{n-1}(A) \to {}_{\varepsilon}L^{n-1}(A) \to {}_{\varepsilon}U^{n}(A) \to K^{n}(A) \to {}_{\varepsilon}L^{n}(A).$$

Enfin, pour toute suite exacte d'anneaux hermitiens K-*réguliers*

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0,$$

on a la suite exacte

$${}_{\varepsilon}U^{n-1}(A) \to {}_{\varepsilon}U^{n-1}(A'') \to {}_{\varepsilon}U^{n}(A') \to {}_{\varepsilon}U^{n}(A) \to {}_{\varepsilon}U^{n}(A'').$$