14c

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 273, p. 840-843 (8 novembre 1971) Série A

ALGÈBRE HOMOLOGIQUE. — *Périodicité de la* K-*théorie hermitienne. Les théorèmes fondamentaux.* Note (*) de M. **Max Karoubi**, transmise par M. Henri Cartan.

De l'isomorphisme ${}_{-\varepsilon}U^n(A) \approx {}_{\varepsilon}V^{n+1}(A)$, vrai pour tout anneau hermitien K-régulier A, on déduit un certain nombre de théorèmes de périodicité du type ${}_{\varepsilon}L^n(A) \approx {}_{\varepsilon}L^{n+4}(A)$, notamment si A est noethérien régulier discret.

1. L'isomorphisme ${}_{\varepsilon}V^n(A) \approx {}_{-\varepsilon}U^{n-1}(A)$. — Soit A un anneau hermitien K-régulier [1] et soit $\psi : A\langle x \rangle \to A \times A$ l'homomorphisme défini par $\psi(P) = (P(0), P(1))$. On va s'inspirer de la construction de l'opérateur topologique $t_U : {}_{-\varepsilon}U^{0,1}(A) \approx {}_{\varepsilon}V(A) \to {}_{\varepsilon}U^{0,0}(\Omega A)$, défini seulement si A est une algèbre de Banach involutive, pour définir un homomorphisme analogue

$$\tau_V : \ {}_{\varepsilon}V(A) \to {}_{-\varepsilon}U(\psi).$$

A un triple (E, g_1, g_2) définissant un élément de ${}_{\varepsilon}V(A)$, on associe le triple (F, η_1, η_2), où $F = E \oplus {}^tE$ est muni de la forme $(-\varepsilon)$-hyperbolique canonique et où η_j, $j = 1, 2$, est la graduation gauche définie par la matrice

$$\eta_j(x) = \begin{pmatrix} 2x^4 - 4x^2 + 1 & g_j^{-1}\, x(2x^4 - 6x^2 + 4) \\ 2g_j\, x(1 - x^2) & -2x^4 + 4x^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Puisque ${}_{-\varepsilon}U(\psi) \approx {}_{-\varepsilon}U(\Omega A)$ d'après le théorème d'excision, on voit que τ_V définit en fait un homomorphisme de ${}_{\varepsilon}V(A)$ dans ${}_{-\varepsilon}U^{-1}(A)$ pour tout anneau hermitien K-régulier A. En appliquant les foncteurs S et Ω, on en déduit un homomorphisme de ${}_{\varepsilon}V^n(A)$ dans ${}_{-\varepsilon}U^{n-1}(A)$ que nous noterons encore τ_V. Si A est une algèbre de Banach involutive, il est facile de voir que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} {}_{\varepsilon}V(A) & \xrightarrow{\tau_V} & {}_{-\varepsilon}U(\Omega A) \\ \wr\wr & & \| \\ {}_{-\varepsilon}U^{0,1}(A) & \xrightarrow{t_U} & {}_{-\varepsilon}U(\Omega A) \end{array}$$

(noter que la définition de t_U utilise les fonctions trigonométriques).

On peut de même définir un homomorphisme en sens inverse de la manière suivante. Considérons l'anneau hermitien $A_{0,1} = A\langle z, z^{-1}\rangle$ des séries laurentiennes $S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ à coefficients dans A avec $\sum \| a_n \| < +\infty$, l'antiinvolution transformant S en $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{a}_n z^{-n}$. Cet anneau est naturellement contenu dans la suspension SA de A grâce à l'homomorphisme explicité dans [3]. On définit alors un homomorphisme

$$\tau'_U : \ {}_{-\varepsilon}U(A) \to {}_{\varepsilon}V(A\langle z, z^{-1}\rangle)$$

de la manière suivante. Considérons un triple (F, η_1, η_2), où $F = E \oplus {}^tE$ est muni de la forme $(-\varepsilon)$-hyperbolique canonique et où η_j est la graduation gauche définie par $\eta_j = 2\,p_j - 1$ avec

$$p_j = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix}.$$

A ce triple on associe alors le triple $(E \oplus {}^tE, g_1, g_2)$ où $E \oplus {}^tE \approx {}^t(E \oplus {}^tE)$ est muni de la forme ε-hyperbolique canonique et où g_j est défini par la matrice

$$g_j = g_j(z) = \begin{pmatrix} a_j + (1 - a_j)\,z & -b_j\,(z + z^{-1} - 2) \\ -\varepsilon\, c_j & \varepsilon\,(d_j\, z^{-1} + (1 - d_j)) \end{pmatrix}.$$

L'homomorphisme τ'_U ainsi défini induit un homomorphisme τ_U de ${}_{-\varepsilon}U(A)$ dans ${}_\varepsilon V(SA) = {}_\varepsilon V^1(A)$, d'où un homomorphisme de ${}_{-\varepsilon}U^{n-1}(A)$ dans ${}_\varepsilon V^n(A)$ que nous noterons encore τ_U. Si A est une algèbre de Banach involutive, on vérifie la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} {}_{-\varepsilon}U(A) & \xrightarrow{\tau'_U} & {}_\varepsilon V(A\langle z, z^{-1}\rangle) \\ \wr\wr & & \wr\wr \\ {}_{-\varepsilon}U^{1,1}(A) & \xrightarrow{t_U} & {}_{-\varepsilon}U^{0,1}(A\langle z, z^{-1}\rangle) \end{array}$$

où t_U est défini grâce à la théorie KR (convenablement généralisée).

Remarque. — L'homomorphisme τ'_U est à rapprocher d'un homomorphisme analogue introduit par Novikov [*cf.* ([7]), p. 286, l. 13 à 32.]

Théorème 1. — *Soit* A *un anneau hermitien* K*-régulier. Les homomorphismes* τ_U *et* τ_V *définissent alors des isomorphismes naturels entre les groupes* ${}_\varepsilon V^n(A)$ *et* ${}_{-\varepsilon}U^{n-1}(A)$. *De manière plus précise,* $\tau_V\,\tau_U$ et $\tau_U\,\tau_V$ *sont définis par le cup-produit par un élément inversible de l'anneau* ${}_1L(\mathbf{Z}')$.

Remarque. — Ce théorème s'applique notamment lorsque A est un anneau noethérien régulier discret, un corps valué complet non discret, une algèbre de Banach sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, etc.

2. Les théorèmes de périodicité. — Pour tout anneau hermitien K-régulier posons

$${}_\varepsilon W^n(A) = \mathrm{Coker}\,(K^n(A) \to {}_\varepsilon L^n(A))$$

[noter que ${}_\varepsilon W^0(A)$ est le « groupe de Witt » de A]. Puisque $K^n(A) = 0$ si $n > 0$ et si A est noethérien régulier, le théorème 1 implique le théorème suivant :

Théorème 2. — *Soit* A *un anneau noethérien régulier discret. On a alors des isomorphismes naturels* ${}_\varepsilon W^n(A) \approx {}_{-\varepsilon}W^{n+2}(A)$ *pour* $n \geq 0$. *En particulier,* ${}_\varepsilon L^n(A) \approx {}_{-\varepsilon}L^{n+2}(A)$ *pour* $n > 0$ *et* ${}_\varepsilon L^2(A) \approx {}_{-\varepsilon}W^0(A)$.

Considérons le cas particulier $A = \mathbf{Z}'$. Par l'isomorphisme

$${}_1W^0(\mathbf{Z}') \approx {}_{-1}W^2(\mathbf{Z}') \approx {}_{-1}L^2(\mathbf{Z}'),$$

l'élément unité de ${}_{1}\mathrm{W}^{0}(\mathbf{Z}')$ se transforme en un élément u_2 de ${}_{-1}\mathrm{L}^{2}(\mathbf{Z}')$ dont l'image dans ${}_{-1}\mathrm{L}^{2}(\mathbf{R}) \approx \mathrm{KU}^{2}$ (Point) est le générateur topologique usuel. En appliquant le théorème 1, on démontre de même qu'il existe un élément u_{-2} de ${}_{-1}\mathrm{L}^{-2}(\mathbf{Z}')$ dont l'image dans ${}_{-1}\mathrm{L}^{-2}(\mathbf{R}) \approx \mathrm{KU}^{-2}$ (Point) est le générateur topologique. Par des arguments topologiques, on en déduit que le cup-produit $u_2 u \cup u_{-2}$ est un élément de ${}_{1}\mathrm{L}^{0}(\mathbf{Z}')$ dont l'image dans ${}_{1}\mathrm{L}^{0}(\mathbf{R})$ s'écrit $\mathrm{E}^{+} - \mathrm{E}^{-}$, où E^{+} (resp. E^{-}) représente $\mathbf{R}^2$ muni de la forme quadratique $x^2 + y^2$ (resp. $-x^2 - y^2$). En particulier, sa classe dans ${}_{1}W^{0}(\mathbf{Z}')$ est quatre fois un élément inversible de ${}_{1}\mathrm{W}^{0}(\mathbf{Z}')$. On en déduit aussitôt le théorème suivant :

Théorème 3. — *Soit* A *un anneau hermitien* K-*régulier. On a alors des isomorphismes naturels*

$$ {}_{-\varepsilon}\mathrm{W}^{n}(\mathrm{A}) \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \mathbf{Z}\left[\frac{1}{2}\right] \approx {}_{\varepsilon}\mathrm{W}^{n+2}(\mathrm{A}) \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \mathbf{Z}\left[\frac{1}{2}\right]. $$

De manière plus précise, il existe des homomorphismes naturels

$$ h : {}_{-\varepsilon}\mathrm{W}^{n}(\mathrm{A}) \rightarrow {}_{\varepsilon}\mathrm{W}^{n+2}(\mathrm{A}) \qquad \text{et} \qquad h' : {}_{\varepsilon}\mathrm{W}^{n+2}(\mathrm{A}) \rightarrow {}_{-\varepsilon}\mathrm{W}^{n}(\mathrm{A}) $$

tels que $h'.h$ *et* $h.h'$ *soient la multiplication par quatre.*

Remarques. — Si A est l'algèbre de Banach des fonctions continues réelles sur un espace compact X, le théorème 3 implique l'isomorphisme bien connu $\mathrm{KO}^{n}(\mathrm{X}) \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \mathbf{Z}[1/2] \approx \mathrm{KO}^{n+4}(\mathrm{X}) \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \mathbf{Z}[1/2]$. Si A est discret, nous montrerons dans une prochaine Note que l'hypothèse de K-régularité est superflue.

3. Calcul de L^{-2}. — Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} {}_{\varepsilon}\mathrm{L}^{n-1}(\mathrm{A}) & \longrightarrow & \mathrm{K}^{n-1}(\mathrm{A}) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}\mathrm{V}^{n}(\mathrm{A}) & \xrightarrow{\alpha_n} & {}_{\varepsilon}\mathrm{L}^{n}(\mathrm{A}) & \longrightarrow & \mathrm{K}^{n}(\mathrm{A}) \\ & & & & \uparrow{\scriptstyle \tau_{n-1}} & & & & \\ \mathrm{K}^{n-2}(\mathrm{A}) & \longrightarrow & {}_{-\varepsilon}\mathrm{L}^{n-2}(\mathrm{A}) & \xrightarrow{\gamma_{n-2}} & {}_{-\varepsilon}\mathrm{U}^{n-1}(\mathrm{A}) & \longrightarrow & \mathrm{K}^{n-1}(\mathrm{A}) & \longrightarrow & {}_{-\varepsilon}\mathrm{L}^{n-1}(\mathrm{A}) \end{array}$$

où $\tau_{n-1} = \tau_{\mathrm{U}}$ est l'isomorphisme explicité dans le théorème 1. Posons $\delta_{n-2} = \alpha_n . \tau_{n-1} . \gamma_{n-2}$. Le diagramme précédent nous permet de définir une *filtration* sur le groupe ${}_{\varepsilon}\mathrm{L}^{n}(\mathrm{A})$, soit

$$ \ldots \subset {}_{\varepsilon}\mathrm{L}^{n}_{(p)}(\mathrm{A}) \subset \ldots \subset {}_{\varepsilon}\mathrm{L}^{n}_{(2)}(\mathrm{A}) \subset {}_{\varepsilon}\mathrm{L}^{n}_{(1)}(\mathrm{A}) \subset {}_{\varepsilon}\mathrm{L}^{n}(\mathrm{A}) $$

par les formules suivantes :

$$ {}_{\varepsilon}\mathrm{L}^{n}_{(1)}(\mathrm{A}) = \mathrm{Im}\,\alpha_n, \qquad {}_{\varepsilon}\mathrm{L}^{n}_{(2)}(\mathrm{A}) = \mathrm{Im}\,\delta_{n-2}, \qquad {}_{\varepsilon}\mathrm{L}^{n}_{(p)}(\mathrm{A}) = \mathrm{Im}\,\delta_{n-p} \ldots \delta_{n-2} $$

si p est pair, et

$$ {}_{\varepsilon}\mathrm{L}^{n}_{(p)}(\mathrm{A}) = \mathrm{Im}\,\alpha_{n-p+1} . \delta_{n-p+1} \ldots \delta_{n-2} $$

si p est impair $\geqq 3$. L'antiinvolution de A induit une involution σ sur $\mathrm{K}^{n}(\mathrm{A})$. Posons

$$ k^{n}(\mathrm{A}) = \mathrm{K}^{n}(\mathrm{A})/(1-\sigma)\,\mathrm{K}^{n}(\mathrm{A}) \qquad \text{et} \qquad k'^{n}(\mathrm{A}) = \mathrm{K}^{n}(\mathrm{A})/(1+\sigma)\,\mathrm{K}^{n}(\mathrm{A}). $$