

ALGÈBRE HOMOLOGIQUE. — Périodicité de la K-théorie hermitienne. Théorie de Quillen et homologie du groupe orthogonal. Note (*) de M. MAX KAROUBI, transmise par M. Henri Cartan.

Nous nous proposons de transposer dans la théorie de Quillen certains des résultats énoncés dans les Notes précédentes [(3), (6), (7)]. Comme application nous étudions l'homologie du groupe orthogonal infini $\varepsilon O(A)$ associé à un anneau discret A muni d'une antiinvolution. Si A est un corps, les théorèmes énoncés ici recourent partiellement certains résultats récents de Borel et Matsumoto.

1. LA THÉORIE DE QUILLEN POUR LES MODULES QUADRATIQUES. — Soit A un anneau unitaire discret muni d'une antiinvolution et tel que 2 soit inversible dans A . Soit $X = B_{\varepsilon O(A)}$ l'espace classifiant du groupe discret $\varepsilon O(A) = \varinjlim \varepsilon O_{n,n}(A)$. Soit (X^+, f) un couple formé d'un CW-complexe X^+ et d'une application continue $f: X \rightarrow X^+$ satisfaisant aux deux propriétés suivantes :

(a) $\pi_1(X^+) = \varepsilon O(A) / \varepsilon O'(A)$, avec $\varepsilon O'(A) = [\varepsilon O(A), \varepsilon O(A)]$, l'application f induisant l'homomorphisme quotient sur les π_1 ;

(b) L'application f induit un isomorphisme $H_*(X; G) \approx H_*(X^+; G)$ pour tout $\pi_1(X^+)$ -module G .

Un tel couple existe d'après le travail de Quillen (8) et est unique à homotopie près. On pose

$$X^+ = B_{\varepsilon O(A)}^+ \quad \text{et} \quad B_{\varepsilon O(A \times A^0)}^+ = B_{GL(A)}^+ \quad [cf. (8)].$$

Les espaces $B_{\varepsilon O(A)}^+$ et $B_{GL(A)}^+$ sont des espaces de lacets infinis [(3), (10)].

DÉFINITION ET PROPOSITION 1. — Posons $\varepsilon L_n(A) = \pi_n(B_{\varepsilon O(A)}^+)$ pour $n > 0$ et $\varepsilon L_n(A) = \varepsilon L^{-n}(A)$ pour $n \leq 0$. On a alors

$$\varepsilon L_1(A) \approx \varepsilon O(A) / \varepsilon O'(A), \quad \varepsilon L_2(A) \approx H_2(\varepsilon O'(A); \mathbf{Z})$$

ainsi qu'un isomorphisme naturel $\varepsilon L_n(A) \approx \varepsilon L_{n+1}(SA)$ pour $n \in \mathbf{Z}$, SA représentant la suspension de l'anneau hermitien A [(3), (4), (10)].

Soit \mathcal{V}_A (resp. \mathcal{U}_A) la fibre au sens homotopique de l'application $B_{\varepsilon O(A)}^+ \rightarrow B_{GL(A)}^+$ (resp. $B_{GL(A)}^+ \rightarrow B_{\varepsilon O(A)}^+$) induite par l'homomorphisme $\varepsilon O(A) \rightarrow GL(A)$ [resp. $GL(A) \rightarrow \varepsilon O(A)$] associé au foncteur oubli (resp. au foncteur hyperbolique). Pour $n > 0$, $\varepsilon V_n(A)$ [resp. $\varepsilon U_n(A)$] est le groupe d'homotopie $\pi_n(\mathcal{V}_A)$ [resp. $\pi_n(\mathcal{U}_A)$]. On a alors $\varepsilon V_n(A) \approx \varepsilon V_{n+1}(SA)$ et $\varepsilon U_n(A) \approx \varepsilon U_{n+1}(SA)$, ce qui permet de définir $\varepsilon V_n(A)$ [resp. $\varepsilon U_n(A)$] pour $n \leq 0$ grâce à la formule de récurrence $\varepsilon V_n(A) = \varepsilon V_{n+1}(SA)$ [resp. $\varepsilon U_n(A) = \varepsilon U_{n+1}(SA)$]. Avec ces définitions, on a, pour n positif ou négatif, les suites exactes

$$\begin{aligned} K_{n+1}(A) &\rightarrow \varepsilon L_{n+1}(A) \rightarrow \varepsilon U_n(A) \rightarrow K_n(A) \rightarrow \varepsilon L_n(A), \\ \varepsilon L_{n+1}(A) &\rightarrow K_{n+1}(A) \rightarrow \varepsilon V_n(A) \rightarrow \varepsilon L_n(A) \rightarrow K_n(A). \end{aligned}$$

Le théorème 1 de la Note précédente (7) nous conduit naturellement à la conjecture suivante : les théories ${}_{\varepsilon}U_n(A)$ et ${}_{-\varepsilon}V_{n-1}(A)$ coïncident. Il résulte des résultats de la Note précédente que cette conjecture est déjà vraie pour $n < 0$ et A K -régulier.

2. PÉRIODICITÉ DU GROUPE DE WITT. — Considérons le $n^{\text{ième}}$ « groupe de Witt » ${}_{\varepsilon}W_n(A) = \text{Coker}[K_n(A) \rightarrow {}_{\varepsilon}L_n(A)]$. Le théorème suivant est analogue au théorème 3 de (7) :

THÉORÈME 2. — Les groupes ${}_{\varepsilon}W_n(A) \otimes \mathbf{Z}'$ et ${}_{-\varepsilon}W_{n+2}(A) \otimes \mathbf{Z}'$ sont isomorphes pour $n \in \mathbf{Z}$ (avec $\mathbf{Z}' = \mathbf{Z}[1/2]$). De manière plus précise, il existe des homomorphismes naturels

$$\beta : {}_{\varepsilon}W_n(A) \rightarrow {}_{-\varepsilon}W_{n+2}(A) \quad \text{et} \quad \beta' : {}_{-\varepsilon}W_{n+2}(A) \rightarrow {}_{\varepsilon}W_n(A)$$

tels que $\beta\beta'$ et $\beta'\beta$ soient la multiplication par 4 (4).

COROLLAIRE 3. — Les groupes ${}_{\varepsilon}U_n(A) \otimes \mathbf{Z}'$ et ${}_{-\varepsilon}V_{n-1}(A) \otimes \mathbf{Z}'$ sont naturellement isomorphes.

COROLLAIRE 4. — Les groupes ${}_{\varepsilon}W_n(A) \otimes \mathbf{Z}'$ et ${}_{\varepsilon}W^{-n}(A) \otimes \mathbf{Z}'$ sont naturellement isomorphes (sans hypothèse de K -régularité sur A).

Posons ${}_{\varepsilon}\overline{W}_n(A) = {}_{\varepsilon}W_n(A) \otimes \mathbf{Z}'$. Le théorème 2 a aussi la conséquence intéressante suivante. Si

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_1 & \longrightarrow & A' \end{array}$$

est un carré cartésien d'anneaux hermitiens unitaires discrets, on a la suite exacte

$${}_{\varepsilon}\overline{W}_{n+1}(A') \rightarrow {}_{\varepsilon}\overline{W}_n(A) \rightarrow {}_{\varepsilon}\overline{W}_n(A_1) \oplus {}_{\varepsilon}\overline{W}_n(A_2) \rightarrow {}_{\varepsilon}\overline{W}_n(A') \rightarrow {}_{\varepsilon}\overline{W}_{n-1}(A)$$

pour $n \in \mathbf{Z}$. En outre, la projection naturelle $A[x] \rightarrow A$ induit un isomorphisme $\overline{W}_n(A) \approx \overline{W}_n(A[x])$.

THÉORÈME 5. — Soit $\tilde{B}_{\varepsilon,0(A)}^+$ le H -espace obtenu à partir de $B_{\varepsilon,0(A)}^+$ en localisant par rapport au système multiplicatif (2^p). Au type d'homotopie près, on peut alors écrire $\tilde{B}_{\varepsilon,0(A)}^+$ comme le produit de deux H -espaces connexes $B_{\varepsilon,0(A)}^{++}$ et ${}_{\varepsilon}B_A$ tels que

$$\pi_n(B_{\varepsilon,0(A)}^{++}) \approx \pi_{n+4}(B_{\varepsilon,0(A)}^{++}) \quad \text{pour } n > 0.$$

De manière explicite, on a

$$\pi_1(B_{\varepsilon,0(A)}^{++}) \approx {}_{\varepsilon}W_1(A) \otimes \mathbf{Z}' \approx {}_{-\varepsilon}W^1(A) \otimes \mathbf{Z}',$$

$$\pi_2(B_{\varepsilon,0(A)}^{++}) \approx {}_{-\varepsilon}W(A) \otimes \mathbf{Z}',$$

$$\pi_3(B_{\varepsilon,0(A)}^{++}) \approx {}_{-\varepsilon}W_1(A) \otimes \mathbf{Z}' \approx {}_{\varepsilon}W^1(A) \otimes \mathbf{Z}',$$

$$\pi_4(B_{\varepsilon,0(A)}^{++}) \approx {}_{\varepsilon}W(A) \otimes \mathbf{Z}'.$$

Remarque sur les notations. — Si A est commutatif et muni de l'involution triviale, on a

$${}_1O(A) = \varinjlim O_{n,n}(A) \quad \text{et} \quad {}_{-1}O(A) = \varinjlim Sp_{2n}(A)$$

avec les notations classiques.

COROLLAIRE 6. — *L'homologie à coefficients rationnels du groupe orthogonal infini ${}_εO(A)$, $ε = \pm 1$, peut s'écrire comme le produit tensoriel gradué de trois algèbres de Hopf, soit*

$$H_*({}_εO(A); \mathbb{Q}) \approx {}_εS_A \otimes {}_ε\Lambda_A \otimes {}_εM_A,$$

où :

(1) ${}_εS_A$ est l'algèbre symétrique de l'espace vectoriel gradué

$$\left(\bigoplus_{n>0} {}_εW_{4n}(A) \otimes \mathbb{Q} \right) \oplus \left(\bigoplus_{n>0} {}_εW_{4n+2}(A) \otimes \mathbb{Q} \right);$$

(2) ${}_ε\Lambda_A$ est l'algèbre extérieure de l'espace vectoriel gradué

$$\left(\bigoplus_{n>0} {}_εW_{4n+1}(A) \otimes \mathbb{Q} \right) \oplus \left(\bigoplus_{n>0} {}_εW_{4n+3}(A) \otimes \mathbb{Q} \right);$$

(3) ${}_εM_A = H_*(B_A; \mathbb{Q})$ donc est isomorphe à \mathbb{Q} en degré zéro.

Exemple. — Si A est un corps commutatif F , on a

$${}_{-1}W_{4n}(F) \otimes \mathbb{Q} = {}_εW_{4n+1}(F) \otimes \mathbb{Q} = {}_εW_{4n+3}(F) \otimes \mathbb{Q} = 0.$$

Le groupe ${}_1W_{4n}(F) \otimes \mathbb{Q}$ n'est pas nul en général : il est isomorphe au groupe de Witt $W(F)$ tensorisé par \mathbb{Q} . Si F est un corps de nombres, le corollaire 6 est contenu dans un théorème récent de Borel ⁽²⁾ démontré par une toute autre méthode qui permet de déterminer en plus le facteur ${}_εM_A$: c'est une algèbre extérieure qui possède r_2 générateurs en chaque degré de la forme $4n + 3$, $2r_2$ représentant le nombre de places complexes de F .

3. CALCUL PARTIEL DE $H_2({}_εO'(A); \mathbb{Z})$.

THÉORÈME 7. — *Soit A un anneau hermitien unitaire discret tel que $K_1(A) \approx K_1(A[x])$ et que $K(A) \approx K(A[x])$. On peut alors définir des homomorphismes naturels*

$$\tau_V : {}_εV(A) \rightarrow {}_{-ε}U_1(A) \quad \text{et} \quad \tau_U : {}_{-ε}U_1(A) \rightarrow {}_εV(A)$$

tels que $\tau_U \tau_V = \text{Id}$.

COROLLAIRE 8. — *Soit ${}_εL_{(2)}^0(A)$ le deuxième terme de la filtration de ${}_εL^0(A)$ décrite dans ⁽¹⁾ et soit ${}_εk_1''(A)$ le groupe d'homologie du complexe*

$${}_εL_1(A) \rightarrow K_1(A) \xrightarrow{1-\sigma} K_1(A).$$

Si ${}_{-ε}\theta : {}_εk_1''(A) \rightarrow {}_{-ε}W_2(A)$ désigne l'homomorphisme injectif induit par τ_V , $\text{Coker } {}_{-ε}\theta$ contient ${}_εL_0^{(2)}(A)$ comme facteur direct.

