Topology Vol. 12, pp. 275–281. Pergamon Press, 1973. Printed in Great Britain

K-THEORIE EQUIVARIANTE DES FIBRES EN SPHERES

MAX KAROUBI

(*Received* 11 *October* 1971)

CET ARTICLE complète sur certains points les théorèmes de [5] et [7] et permet d'étendre à la K-théorie équivariante les résultats essentiels d'Atiyah, Bott et Shapiro [2]. De manière précise, soit G un groupe de Lie compact opérant sur un fibré vectoriel réel V de base compacte X et soit W un sous-fibré de V qui est invariant par l'action de G. Soient $S(V)$ et $S(W)$ les fibrés en sphères de V et W respectivement par rapport à une métrique de V qui est invariante par l'action de G. On se propose alors de calculer les groupes $K_G^n(S(V), S(W))$† dans le cas particulier important suivant: il existe un élément central η de G qui opère trivialement sur X tel que $\eta^2 = 1$ et $\eta.v = -v$ pour tout élément v de V.

§1. ENONCE DES RESULTATS ESSENTIELS

Avec les notations précédentes, désignons par $\varepsilon_G{}^V(X)$ la catégorie de Banach dont les objets sont les G-fibrés vectoriels (réels ou complexes suivant la théorie envisagée) où opère le fibré en algèbres de Clifford $C(V)$ dans le sens de [5, §1.2].

THEOREME 1. *La K-théorie équivariante à support compact du fibré V, soit $K_G(V)$, est naturellement isomorphe au groupe de Grothendieck de la catégorie $\varepsilon_G{}^V(X)$. Plus généralement, le groupe $K_G{}^n(V)$ est isomorphe au groupe K^n de $\varepsilon_G{}^V(X)$ considérée comme catégorie de Banach. Enfin, $K_G{}^n(S(V), S(W))$ est naturellement isomorphe au groupe $K^{n+1}(\varphi)$ où φ: $\varepsilon_G{}^V(X) \to \varepsilon_G{}^W(X)$ est le foncteur "restriction des scalaires".*

De manière générale désignons par $M_G{}^V(X)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie $\varepsilon_G{}^V(X)$. Alors $M_G{}^V(X)$ peut être muni d'une structure d'anneau grâce aux formules suivantes. Si E et E' sont deux objets de $\varepsilon_G{}^V(X)$, le produit tensoriel $E \otimes E'$ des fibrés E et E' est naturellement un G-fibré. C'est aussi un $C(V)$-fibré si on pose $v.(e \otimes e') = 1/\sqrt{2}(v.e \otimes e' + \eta.e \otimes v.e')$ pour $v \in V_x \subset C(V)_x$, $e \in E_x$ et $e' \in E_x$, $x \in X$. Dans cette formule on voit donc que η a servi à "graduer" les fibrés en question; ce point de vue sera amplement exploité par la suite. Il est clair qu'on obtient ainsi une structure d'anneau commutatif sur $M_G{}^V(X)$. Enfin, l'image de $M_G{}^V(X)$ dans $M_G{}^W(X)$ par l'application naturelle $M_G{}^V(X) \to M_G{}^W(X)$ est un idéal dans $M_G{}^W(X)$. On notera $A_G^{V,W}(X)$ l'anneau quotient.

† On désigne par K_G indifféremment la K-théorie équivariante réelle ou complexe, nos méthodes s'appliquant simultanément aux deux cas. Lorsqu'on voudra distinguer les deux théories, on écrira KO ou KU comme il est d'usage. La notation Ksp sera utilisée pour la K-théorie symplectique à la fin du §4.

THEOREME 2. *On a une suite exacte*

$$0 \to A_G^{V,W}(X) \xrightarrow{\chi^{V,W}} K_G(S(V), S(W)) \to K^1(\varepsilon_G{}^V(X)) \to K^1(\varepsilon_G{}^W(X))$$

où $\chi^{V,W}$ est un homomorphisme d'anneaux. En particulier, $\chi^{V,W}$ est un isomorphisme lorsque X est réduit à un point.

L'homomorphisme $\chi^{V,W}$ s'explicite ainsi: soit E un objet de $\varepsilon_G{}^W(X)$ et soient $E^0 = \mathrm{Ker}(1-\eta)$ et $E^1 = \mathrm{Ker}(1+\eta)$. Alors E^0 et E^1 sont aussi deux G-fibrés car η est central. Soit $\pi\colon S(V) \to X$ la projection canonique et soit $\alpha\colon \pi^*E^0|_{S(W)} \to \pi^*E^1|_{S(W)}$ l'isomorphisme défini au-dessus du point w de $S(W)$ par la multiplication par le nombre de Clifford w. La classe du triplet $(\pi^*E^0, \pi^*E^1, \alpha)$ définit alors l'élément cherché de $K_G(S(V), S(W))$ grâce â la construction "différence" [3].

Considérons le cas particulier où $V = W \oplus 1$ et $G = H \times \mathbb{Z}_2$ (1 désignant le H-fibré trivial réel de rang un où $\mathbb{Z}_2$ opère par l'involution $e \mapsto -e$). Alors $K_G(S(V), S(W)) \approx K_H(P(V), P(W)) \approx K_H(S^+(W \oplus 1), S(W)) \approx K_H(W)$. De même, le groupe $A_G^{V,W}(X)$ est isomorphe naturellement au groupe $A_H^{W\oplus 2, W\oplus 1}(X)$ avec des notations évidentes. Posons $A_H{}^W(X) = A_H^{W\oplus 2, W\oplus 1}(X)$. On obtient ainsi le corollaire suivant:

COROLLAIRE 3. *On a une suite exacte*

$$0 \to A_H{}^W(X) \xrightarrow{\chi^W} K_H(W) \to K^1(\varepsilon_H^{W\oplus 2}(X)) \to K^1(\varepsilon_H^{W\oplus 1}(X)).$$

En particulier, χ^W est un isomorphisme lorsque X est réduit à un point.

L'homomorphisme χ^W s'explicite de la même manière que $\chi^{V,W}$. Si W' est un H'-fibré sur X', on définit de manière évidente un "cup-produit"

$$A_H{}^W(X) \times A_{H'}{}^{W'}(X') \to A_{H\times H'}^{W\times W'}(X \times X')$$

en utilisant le fait que $C(W \times W') \approx C(W) \hat{\otimes} C(W')$.

PROPOSITION 4. *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} A_H{}^W(X) \times A_{H'}{}^{W'}(X') & \longrightarrow & A_{H\times H'}^{W\times W'}(X \times X') \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \chi^W \times \chi^{W'}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \chi^{W\times W'}} \\ K_H(W) \times K_{H'}(W') & \longrightarrow & K_{H\times H'}(W \times W') \end{array}$$

où la deuxième flèche horizontale représente le cup-produit usuel, est commutatif.

Il est possible de calculer effectivement les groupes $A_H{}^W(X)$, $A_G^{V,W}(X)$, $K^1(\varepsilon_G{}^V(X))$, etc... avec des hypothèses spinorielles appropriées par exemple (cf. [2], [7]). Nous en laissons le soin au lecteur.

§2. L'ISOMORPHISME DE THOM

Soit $K_G{}^V(X)$ le groupe de Grothendieck du foncteur $\varepsilon_G^{V\oplus 1}(X) \to \varepsilon_G{}^V(X)$ (G opérant trivialement sur le fibré trivial de rang un). Le théorème fondamental de [7](voir aussi [1] avec des hypothèses spinorielles et des restrictions sur le rang de V) exprime que les groupes $K_G{}^V(X)$ et $K_G(V)$ sont isomorphes. Cet isomorphisme s'explicite ainsi:

identifions la paire $(B(V), S(V))$ à la paire $(S^+(V \oplus 1), S(V))$ et le groupe $K_G{}^V(X)$ au groupe construit à partir de triples $(E, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ où E est un objet de $\varepsilon_V{}^G(X)$ et où ε_1 et ε_2 sont deux "graduations" de E (cf. [5] [7]). Alors t: $K_G{}^V(X) \to K_G(S^+(V \oplus 1), S(V))$ est défini par la formule

$$t(d(E, \varepsilon_1, \varepsilon_2)) = d(\pi^*E, v \cos\theta + \varepsilon_1 \sin\theta, v\cos\theta + \varepsilon_2 \sin\theta)$$

avec les notations de [7]. On va voir que l'expression de cet isomorphisme se simplifie considérablement lorsqu'il existe un élément η de G satisfaisant aux hypothèses du §1. Dans ce cas, on peut définir deux homomorphismes réciproques l'un de l'autre g: $K_G{}^V(X) \to K^0(\varepsilon_G{}^V(X)) \approx M_G{}^V(X)$ et g': $M_G{}^V(X) \approx K^0(\varepsilon_G{}^V(X)) \to K_G{}^V(X)$ par les formules

$$g(d(E, \varepsilon_1, \varepsilon_2)) = d(E, \eta\varepsilon_1, \eta\varepsilon_2) \text{ et } g'(d(F, \eta_1, \eta_2)) = d(F, \eta\eta_1, \eta\eta_2)$$

(voir [5, §2.1] pour la définition du groupe K^0). En explicitant les isomorphismes successifs

$$M_G{}^V(X) \approx K^0(\varepsilon_G{}^V(X)) \approx K_G{}^V(X) \approx K_G{}^0(B(V), S(V)) \approx K_G(B(V), S(V))$$

comme dans [5, §2.3], on démontre ainsi le théorème suivant:

THEOREME 5. *Associons à un objet E de $\varepsilon_G{}^V(X)$ le triplet $(\pi^*E^0, \pi^*E^1, \alpha)$ où $E^0 =$ Ker$(1 - \eta)$, $E^1 =$ Ker$(1 + \eta)$, π: $B(V) \to X$, et où α: $\pi^*E^0|_{S(V)} \to \pi^*E^1|_{S(V)}$ est l'isomorphisme défini au-dessus du point v de $S(V)$ par la multiplication par le nombre de Clifford v. Alors cette correspondance induit un homomorphisme*

$$\beta\colon M_G{}^V(X) \to K_G(B(V), S(V))$$

qui est un isomorphisme.

Remarque. La même méthode permet de montrer plus généralement que $K^n(\varepsilon_G{}^V(X)) \approx K_G{}^n(B(V), S(V))$.

Il est parfois utile (notamment en ce qui concerne les structures multiplicatives) d'interpréter de manière légèrement différente l'homomorphisme β. Introduisons comme dans [6], [7] le groupe $\overline{K}_G^{p,q}(V)$ défini à l'aide de familles d'opérateurs de Fredholm "acycliques à l'infini". Alors $K_G(B(V), S(V)) \approx \overline{K}_G^{0,0}(V)$ (cf. [6], [7]) et l'isomorphisme composé $M_G{}^V(X) \to K_G(B(V), S(V)) \to \overline{K}_G^{0,0}(V)$ associe à la classe de l'objet E la classe du couple (π'^*E, D) où π': $V \to X$, E est $\mathbb{Z}_2$-gradué par η et où D: $\pi'^*E \to \pi'^*E$ est la famille d'opérateurs de Fredholm de degré un et auto-adjointe définie au-dessus du point v de V par la multiplication par v (on notera qu'en fait E est de rang fini et que tout opérateur est de Fredholm: la condition essentielle ici est donc l'acyclicité à l'infini). Ceci suppose bien entendu que les objets de $\varepsilon_G{}^V(X)$ ont été préalablement munis d'une métrique compatible avec l'action de G et de celle du fibré en algèbres de Clifford, ce qui ne restreint par la généralité (cf. [5, §1.2]). On explicite de même un isomorphisme du type $\overline{K}^{p,q}(\varepsilon_G{}^V(X)) \to \overline{K}_G^{p,q}(V)$; les détails sont laissés au lecteur.

§3. L'ISOMORPHISME $K^n(\varphi) \approx K_G^{n-1}(S(V), S(W))$

Soit φ: $\varepsilon_G{}^V(X) \to \varepsilon_G{}^W(X)$ le foncteur restriction des scalaires. En suivant [5, §2.1], on peut décrire ainsi le groupe de Grothendieck $K(\varphi)$ du foncteur φ. Considérons l'ensemble des triples (E, ρ_1, ρ_2) où E est un G-fibré et où ρ_i : $C(V) \to$ End (E), $i = 1, 2$, sont deux structures de $C(V)$-module sur E telles que $\rho_1|_{C(W)} = \rho_2|_{C(W)}$. Le groupe $K(\varphi)$ est alors le quotient du groupe libre engendré par ces triples par le sous-groupe engendré par les relations

$$(E, \rho_1, \rho_2) + (E', \rho_1', \rho_2') = (E \oplus E', \rho_1 \oplus \rho_1', \rho_2 \oplus \rho_2')$$
$$(E, \rho_1, \rho_2) = 0 \text{ si } \rho_1 \text{ est homotope à } \rho_2.$$

Définissons maintenant un homomorphisme

$$\theta \colon K(\varphi) \to K_G^{-1}(S(V), S(W))$$

de la manière suivante. A un triple (E, ρ_1, ρ_2) on associe la classe du couple (π^*E^0, α) où $E^0 = \operatorname{Ker}(1 - \eta)$ et où $\alpha\colon \pi^*E^0 \to \pi^*E^0$ est l'automorphisme qui vaut l'identité au-dessus de $S(W)$ et, de manière générale, la restriction à π^*E^0 de l'isomorphisme $\rho_2(v) \,.\, \rho_1(v)$ au-dessus d'un point v de $S(V)$. En composant θ avec les isomorphismes $K_G^{-1}(S(V), S(W)) \approx K_G^{-1}(S(V) \cup B(W), B(W)) \approx K_G(B(V), S(V) \cup B(W))$, on trouve un homomorphisme

$$\theta' \colon K(\varphi) \to K_G(B(V), S(V) \cup B(W)) \approx K_G(V - W)$$

qui s'explicite ainsi: à la classe du triple (E, ρ_1, ρ_2) on associe la classe du triple (p^*E^0, p^*E^0, δ) où $p\colon B(V) \to X$ et où $\delta\colon p^*E^0|_{S(V) \cup B(W)} \to p^*E^0|_{S(V) \cup B(W)}$ est l'identité au-dessus de $B(W)$ et coïncide avec la restriction à p^*E^0 de l'isomorphisme $\rho_2(v) \,.\, \rho_1(v)$ au-dessus d'un point v de $S(V)$.

THEOREME 6. *L'homomorphisme $\theta\colon K(\varphi) \to K_G^{-1}(S(V), S(W))$ défini plus haut est un isomorphisme. Par conséquent, les groupes $K^n(\varphi)$ et $K_G^{n-1}(S(V), S(W))$ sont isomorphes pour tout n.*

Demonstration. Considérons le diagramme

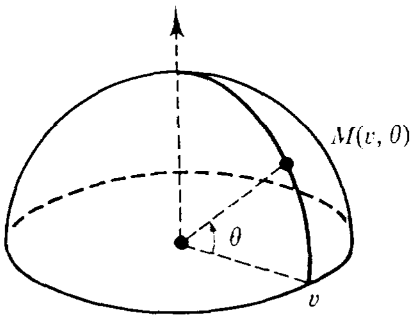
$$\begin{tikzcd}
K^{-1}(\varepsilon_G{}^V(X)) \arrow[r] \arrow[d] & K^{-1}(\varepsilon_G{}^W(X)) \arrow[r] \arrow[d] & K(\varphi) \arrow[r] \arrow[d, "\theta'"] & K(\varepsilon_G{}^V(X)) \arrow[r] \arrow[d] & K(\varepsilon_G{}^W(X)) \arrow[d] \\
K_G{}^{-1}(V) \arrow[r] & K_G{}^{-1}(W) \arrow[r] & K_G(V - W) \arrow[r] & K_G(V) \arrow[r] & K_G(W).
\end{tikzcd}$$

Ce diagramme est commutatif grâce au raisonnement très général suivant. Soient $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$, $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_1'$ respectivement les catégories de Banach $\varepsilon_G{}^V(X)$, $\varepsilon_G{}^W(X)$, $\varepsilon_G(B(V)/S(V))$ et $\varepsilon_G(B(W)/S(W))$. On a alors un diagramme commutatif de catégories (à isomorphisme près)

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \mathscr{C}' \arrow[d] \\
\mathscr{C}_1 \arrow[r, "\varphi_1"] & \mathscr{C}_1'
\end{tikzcd}$$

Le foncteur $\mathscr{C} \to \mathscr{C}_1$ par exemple associe à l'objet E le fibré sur $B(V)/S(V) \approx S^+(V \oplus 1)/S(V)$ obtenu en considérant le noyau du projecteur $(1 - \gamma)/2$ avec $\gamma = -\eta \cos 2\theta + \rho(v) \sin 2\theta$, (v, θ) étant les coordonnées polaires d'un point typique de $S^+(V \oplus 1)$.

Ce foncteur induit un homomorphisme $K^n(\varepsilon_G{}^V(X)) \to K_G{}^n(B(V)/S(V))$ qui, composé avec l'homomorphisme évident $K_G{}^n(B(V)/S(V)) \to K_G{}^n(B(V), S(V))$, coïncide avec l'homo-



morphisme $K^n(\varepsilon_G{}^V(X)) \to K_G{}^n(B(V), S(V))$ du §2 d'après les calculs de [5, §2.3] par exemple. On en déduit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
K^{-1}(\mathscr{C}) & \longrightarrow & K^{-1}(\mathscr{C}') & \longrightarrow & K(\varphi) & \longrightarrow & K(\mathscr{C}) & \longrightarrow & K(\mathscr{C}') \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
K_G{}^{-1}(V) & \longrightarrow & K_G{}^{-1}(W) & \longrightarrow & K(\varphi_1) & \longrightarrow & K_G(V) & \longrightarrow & K_G(W)
\end{array}$$

d'après les arguments généraux sur les catégories de Banach. Pour démontrer la commutativité du premier diagramme, il suffit de vérifier que l'homomorphisme $K(\varphi) \to K(\varphi_1) \approx K_G(B(V), B(W) \cup S(V))$ coïncide bien avec θ'. Soit donc (E, ρ_1, ρ_2) un triple dont la classe u définit un élément de $K(\varphi)$. Soit

$$f_i(\theta): (p^*E, \eta) \to (p^*E, -\eta \cos 2\theta + \rho_i(v) \sin 2\theta),$$

$p: B(V) \to X$, $i = 1, 2$, l'isomorphisme défini par $f_i(\theta) = \sin\theta + \rho_i(v)\eta \cos\theta$ au-dessus du point de coordonnées polaires (v, θ). Alors l'élément de $K_G(B(V), S(V) \cup B(W))$ associé à u est représenté par le triple (p^*E^0, p^*E^0, α) où α est égal à la restriction de $f_2(\theta)^{-1}f_1(\theta)$ à p^*E^0 au-dessus de $S(V) \cup B(W)$. Or on a $f_2(\theta)^{-1}\, f_1(\theta) = 1$ au-dessus de $B(W)$ et $f_2(\theta)^{-1}$ $f_1(\theta) = \rho_2(v)\rho_1(v)$. La première partie du théorème 6 résulte alors du lemme des cinq. La deuxième partie s'en déduit en remplaçant X par $X \times S^n$.

Pour calculer $K_G(S(V), S(W))$ de manière plus explicite, considérons la suite exacte

$$\begin{aligned}K_G(B(V), S(V)) \to K_G(B(V), S(W)) \to K_G(S(V), S(W))\\ \to K_G{}^1(B(V), S(V)) \to K_G{}^1(B(V), S(W))\end{aligned}$$

associée au triple $(B(V), S(V), S(W))$. Puisque $K_G{}^n(B(V), S(W)) \approx K_G{}^n(B(W), S(W)) \approx K^n(\varepsilon_G{}^W(X))$ et que $K_G{}^n(B(V), S(V)) \approx K^n(\varepsilon_G{}^V(X))$, la première partie du théorème 2 en résulte de manière évidente. D'autre part, on voit que l'homomorphisme $\chi^{V,W}: A_G^{V,W}(X) \to K_G(S(V), S(W))$ est un homomorphisme d'anneaux grâce aux formules explicites de multiplication données dans [6] et [7] par exemple à l'aide d'opérateurs de Fredholm. En fait. en utilisant les idées développées dans [4], on démontre aisément que $\chi^{V,W}$ est même un homomorphisme de λ-anneaux, les puissances extérieures étant prises au sens gradué. Enfin, si X est un point dans le théorème 2, la catégorie $\varepsilon_G{}^V(X)$ est de dimension finie, donc son groupe K^1 est nul [5, §2.3].

§4. CALCUL ALGEBRIQUE DE LA K-THEORIE EQUIVARIANTE DE L'ESPACE DE THOM

Considérons maintenant le cas particulier où $G = H \times \mathbb{Z}_2$ et $V = W \oplus 1$ (1 représentant le H-fibré trivial de rang réel 1 où $\mathbb{Z}_2$ opère par $e \mapsto -e$). Alors $K_G(S(W \oplus 1), S(W)) \approx K_H(P(W \oplus 1), P(W)) \approx K_H(S^+(W \oplus 1), S(W))$ grâce à la projection naturelle $(S^+(W \oplus 1), S(W)) \to (P(W \oplus 1), P(W))$. Cet isomorphisme est aussi l'homomorphisme composé $K_G(S(W \oplus 1), S(W)) \to K_H(S(W \oplus 1), S(W)) \to K_H(S^+(W \oplus 1), S(W))$, ce qui permet de décrire concrètement l'homomorphisme $A_H{}^W(X) \xrightarrow{\chi^W} K_H(S^+(W \oplus 1), S(W)) \approx K_H(W)$ de la même manière que dans [2] et [5, §3.1]. On en déduit le corollaire 3 ainsi que la proposition 4 grâce aux formules explicites pour le cup-produit données dans [6], [7] par exemple.

Soit $\omega^W\colon A_H{}^W(X) \to K_H{}^W(X)$ l'homomorphisme qui associe à la classe d'un $C(W \oplus 1)$-module E la classe du triple $(E', \eta, -\eta)$ où E' est le $C(W)$-module sous-jacent à E et où η est la graduation canonique de E. La même démonstration que celle décrite dans [5, §3.1] permet de montrer la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & K_H(W) \\
A_H^W(X) \arrow[ur, "\chi^W"] \arrow[dr, "\omega^W"'] & \\
 & K_H^W(X) \arrow[uu, "t"']
\end{tikzcd}$$

On en déduit la proposition suivante dont le corollaire a déjà été utilisé dans [8].

PROPOSITION 7. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément y de $K_H{}^W(X)$ puisse s'écrire comme la classe d'un triple $(E, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ avec $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$ est que son image dans le groupe $K^1(\varepsilon_H^{W \oplus 2}(X))$ par l'homomorphisme explicité plus haut soit nulle. En particulier, ω^W (donc χ^W) est bijectif si X est réduit à un point.*

De cette proposition, on déduit en particulier une description algébrique des fibrés sur S^n qui engendrent $\widetilde{KO}(S^n)$ et $\widetilde{KU}(S^n)$ (cf. [2]). On a aussi le corollaire suivant.

COROLLAIRE 8. *Soit X un espace compact tel que $KO^1(X) = 0$ (resp. $KU^1(X) = 0$; resp. $Ksp^1(X) = 0$) et soit $n = 6, 7$ (resp. $n = 1, 5$; resp. $n = 2, 3$) modulo 8. Alors tout élément de $KO^{-n}(X)$ peut s'écrire comme la classe d'un triple $(E, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ avec $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$. Pour $n = 0$ ou 4 modulo 8 tout élément de $KO^{-n}(X)$ peut s'écrire sous cette forme sans hypothèse sur X.*

Demonstration du corollaire. Dans ce cas, W est le fibré trivial de rang n muni d'une forme quadratique définie *positive*, $H = 0$ et nous raisonnons dans le cadre de la K-théorie réelle. La catégorie $\varepsilon_H^{W \oplus 2}(X)$ s'identifie alors à la catégorie des fibrés vectoriels réels où opère l'algèbre de Clifford $C^{0,n+2}$ avec les notations de [5]. Puisque $C^{0,n+2} \approx C^{n,0}(2)$ d'après [2] ou [5], cette catégorie est équivalente à la catégorie $\varepsilon^{n,0}(X)$ dont les objets sont les fibrés vectoriels réels où opère l'algèbre de Clifford $C^{n,0}$ (qui est associée à $\mathbf{R}^n$ muni de la forme quadratique définie *négative* canonique). D'après le théorème de classification des algèbres de Clifford donné dans [2], cette catégorie est équivalente à celle des fibrés vectoriels réels (resp. complexes, resp. symplectiques) ou à un produit de deux d'entre elles lorsque

$n = 0$, 6 ou 7 (resp. $n = 1$ ou 5, resp. $n = 2$, 3 ou 4) modulo 8. La première partie du corollaire en résulte. Lorsque $n = 0$ ou 4 modulo 8, l'homomorphisme $K^1(\varepsilon^{n,0}(X)) \to K^1(\varepsilon^{n-1,0}(X))$ coïncide avec l'application diagonale $KO^1(X) \to KO^1(X) \times KO^1(X)$ ou $Ksp^1(X) \to Ksp^1(X) \times Ksp^1(X)$. Donc χ^W est bijectif dans ce cas indépendamment de toute hypothèse sur X.

REFERENCES

1. M. F. Atiyah: Bott periodicity and the index of elliptic operators, *Q. J. Math.* **19** (1968), 113–140.
2. M. F. Atiyah, R. Bott et A. Shapiro: Clifford modules, *Topology* 3 (Suppl. 1) (1964), 3–38.
3. H. Cartan: Les foncteurs ($K(X)$ et $K(X, A)$, *Séminaire Cartan-Schwartz*, 1963/64, No. 3.
4. P. Donovan et M. Karoubi: Graded Brauer groups and K-theory with local coefficients, *Publ. Math. I.H.E.S.* **38** (1970), 5–25.
5. M. Karoubi: Algèbres de Clifford et K-théorie, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4e série* **1** (1968), 161–270.
6. M. Karoubi: Algèbres de Clifford et opérateurs de Fredholm, Séminaire Heidelberg–Saarbrücken–Strasbourg 1967/68, Exposé III, *Springer Lecture Note* 136 (1970).
7. M. Karoubi: Sur le théorème de Thom en K-théorie équivariante, Séminaire Heidelberg–Saarbrücken–Strasbourg 1967/68, Exposé V, *Springer Lecture Note* 136 (1970).
8. M. Karoubi: Espaces classifiants en K-théorie, *Trans. Am. math. Soc.* **147** (1970), 75–115.

Institut de Récherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur, Strasbourg