18

ALGÈBRE. — *K-théorie algébrique. Sur l'ordre de* $K_3(\mathbf{Z})$.

Note (*) de M. **Max Karoubi**, transmise par M. Henri Cartan.

On montre que l'ordre de $K_3(\mathbf{Z})$ est divisible par 48. Ceci contredit une conjecture récente de Lichtenbaum qui implique $\# K_3(\mathbf{Z}) = 24$.

1. *La « suite exacte des* 12 ». — Nous conserverons pour l'essentiel les notations de ([6]). Pour des raisons de symétrie, nous écrirons cependant ${}_{\varepsilon}W'^{n}(A)$ le groupe ${}_{\varepsilon}L'^{n}(A)$ de ([6]). L'involution de A induit un « foncteur de dualité » sur la catégorie des A-modules projectifs de type fini, foncteur qui induit une involution $x \mapsto \bar{x}$ sur les groupes $K^n(A)$. Nous noterons

$$k^n(A) = \{x = \bar{x}\}/\{x = y + \bar{y}\} \quad \text{et} \quad k'^n(A) = \{x = -\bar{x}\}/\{x = y - \bar{y}\}.$$

On a donc

$$k^n(A) = \hat{H}^{\text{pair}}(\mathbf{Z}/2;\, K^n(A)) \quad \text{et} \quad k'^n(A) = \hat{H}^{\text{impair}}(\mathbf{Z}/2;\, K^n(A)).$$

Théorème 1. — *Soit* A *un anneau hermitien* K-*régulier tel que* 2 *soit inversible dans* A. *On a alors une suite exacte à* 12 *termes* :

$$\begin{tikzcd}
k^n(A) \arrow[r] & {}_{\varepsilon}W^{n-1}(A) \arrow[r] & {}_{-\varepsilon}W'^{n+1}(A) \arrow[r] & k'^n(A) \arrow[r] & {}_{\varepsilon}W'^{n}(A) \arrow[r] & {}_{\varepsilon}W^{n}(A) \arrow[d] \\
{}_{-\varepsilon}W^{n}(A) \arrow[u] & {}_{-\varepsilon}W'^{n}(A) \arrow[l] & k'^n(A) \arrow[l] & {}_{\varepsilon}W'^{n+1}(A) \arrow[l] & {}_{-\varepsilon}W^{n-1}(A) \arrow[l] & k^n(A) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

En fait, ce théorème est une conséquence formelle de l'isomorphisme ${}_{\varepsilon}V^n(A) \approx {}_{-\varepsilon}U^{n-1}(A)$ démontré dans ([6]) et des suites exactes

$$\begin{tikzcd}
{}_{\varepsilon}L^{n-1}(A) \arrow[r] & K^{n-1}(A) \arrow[r] & {}_{\varepsilon}V^{n}(A) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & {}_{\varepsilon}L^{n}(A) \arrow[r] & K^{n}(A) \\
K^{n-2}(A) \arrow[r] & {}_{-\varepsilon}L^{n-2}(A) \arrow[r] & {}_{-\varepsilon}U^{n-1}(A) \arrow[r] & K^{n-1}(A) \arrow[r] & {}_{-\varepsilon}L^{n-1}(A)
\end{tikzcd}$$

où l'homomorphisme zigzag $K^{n-1}(A) \to {}_{\varepsilon}V^n(A) \approx {}_{-\varepsilon}U^{n-1}(A) \to K^{n-1}(A)$ est $x \mapsto x - \bar{x}$, noter que

$${}_{\varepsilon}W'^{n}(A) = \operatorname{Ker}[{}_{\varepsilon}L^n(A) \to K^n(A)] \quad \text{et} \quad {}_{-\varepsilon}W^{n-2}(A) = \operatorname{Coker}[K^{n-2}(A) \to {}_{-\varepsilon}L^{n-2}(A)];$$

2. Calcul de $K^{-3}(\mathbf{Z}')$ et de ${}_{1}W^{-3}(\mathbf{Z}')$.

Théorème 2. — *Désignons par* $\mathbf{Z}'$ *l'anneau* $A = \mathbf{Z}[1/2]$. *Si* $\varepsilon = 1$ *on a alors* ${}_{\varepsilon}W^{-3}(A) = 0$.

Démonstration. — Puisque $\mathbf{Z}'$ est un anneau euclidien, on a

$${}_{-1}W'^{-1}(\mathbf{Z}') = \mathrm{Sp}(\mathbf{Z}')/[\mathrm{Sp}(\mathbf{Z}'), \mathrm{Sp}(\mathbf{Z}')] = 0.$$

D'autre part, l'homomorphisme ${}_{-1}W^{-2}(Z') \to k^{-2}(Z')$ est induit par l'homomorphisme « oubli » ${}_{-1}L^{-2}(Z') \to K^{-2}(Z')$. D'après la suite exacte d'une localisation et l'isomorphisme entre les théories $K^n(A)$ et $K^{-n}(A)$ [résultats démontrés par Quillen [7]], on a la suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} K^{-2}(Z/2) & \to & K^{-2}(Z) & \to & K^{-2}(Z') & \to & K^{-1}(Z/2) \\ \| & & \| & & & & \| \\ 0 & & Z/2 & & & & 0 \end{array}$$

Donc $K^{-2}(Z) \approx K^{-2}(Z') \approx Z/2$, de générateur le lacet $(h(x))^4$, où

$$h(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puisque $Sp_2(Z') = SL_2(Z')$, le générateur est bien dans l'image de l'homomorphisme ${}_{-1}L^{-2}(Z') \to K^{-2}(Z')$. D'après la suite exacte des 12,

$$\ldots \to {}_{-\varepsilon}W^n(A) \to k^n(A) \to {}_{\varepsilon}W^{n-1}(A) \to {}_{-\varepsilon}W'^{n+1}(A) \to \ldots,$$

avec $A = Z'$, $n = 2$ et $\varepsilon = 1$, on a bien ${}_1W^{-3}(Z') = 0$.

Désignons par π_n^s le n-ième groupe d'homotopie stable des sphères. D'après un théorème de Barratt, Priddy, Quillen, Segal [8], on a $\pi_n^s = \pi_n(B^+ \Sigma_\infty)$ où Σ_∞ désigne le groupe symétrique infini [pour la construction « + » *voir* [9] par exemple]. Ceci permet de définir un homomorphisme $\pi_n^s \to K_n(Z)$ en plongeant le groupe symétrique infini dans GL (Z). D'après Quillen, l'homomorphisme $Z/24 \approx \pi_3^s \to K_3(Z) \approx K^{-3}(Z)$ est injectif. Nous montrerons dans le paragraphe suivant que cet homomorphisme n'est pas surjectif au niveau de la composante 2-primaire. En fait, écrivons de nouveau la suite d'une localisation au niveau K^{-3} :

$$\begin{array}{ccccccc} K^{-3}(Z/2) & \to & K^{-3}(Z) & \to & K^{-3}(Z') & \to & K^{-2}(Z/2) \\ \| & & & & & & \| \\ Z/3 & & & & & & 0 \end{array}$$

D'après cette suite, les composantes 2-primaires de $K^{-3}(Z)$ et de $K^{-3}(Z')$ sont isomorphes et, pour démontrer l'assertion ci-dessus, on peut remplacer Z par Z', ce qui va permettre d'appliquer les techniques de K-théorie hermitienne.

3. Calcul de l'ordre de $K_3(Z) \approx K^{-3}(Z)$. — D'après l'interprétation simpliciale des groupes K^{-n} (valable aussi pour les groupes ${}_{\varepsilon}L^{-n}$) donnée par Gersten [4] et Anderson [1], l'homomorphisme $\pi_3^s \xrightarrow{\alpha} K^{-3}(Z')$ se factorise par ${}_1L^{-3}(Z')$. En effet, si Σ_r désigne le groupe symétrique à r variables, l'homomorphisme de groupes simpliciaux (triviaux) $\Sigma_r \to GL_{2r}(Z')$ défini par

$$f(\sigma) = \gamma \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma^{-1} \quad \text{avec} \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(matrices en blocs $r \times r$) se factorise par le groupe ${}_1O_{r,r}(Z')$ [pour la définition précise de ${}_{\varepsilon}O_{n,n}(A)$, *voir* [5], [6]]. L'homomorphisme $\Sigma_\infty \to GL(Z')$ obtenu par passage à la limite inductive induit une application $B^+ \Sigma_\infty \to B_{GL(Z')}$ homotope à la précédente en