manuscripta math. 22, 293 - 310 (1977)

REPRESENTATIONS APPROCHEES D'UN GROUPE DANS UNE ALGEBRE DE BANACH

Pierre de la HARPE et Max KAROUBI

Let T be a continuous map from a compact group G to the group of invertible bounded linear operators on a Hilbert space H, the latter being endowed with the norm topology. If the norms $\|T(gh) - T(g)T(h)\|$ are small enough ($g,h \in G$), we show that T is a small perturbation of some norm continuous representation of G on H.

1. Introduction. Soient G un groupe topologique, H un espace de Hilbert complexe et GL(H) le groupe des opérateurs linéaires bornés inversibles sur H muni de la topologie normique. Soit $S : G \to GL(H)$ un homomorphisme continu, c'est-à-dire une représentation normiquement continue de G dans H. Si $T : G \to GL(H)$ est une application continue voisine de S (au sens où la norme de $T(g) - S(g)$ est petite pour tout $g \in G$), alors T est une "représentation approchée" de G dans H (au sens où la norme de $T(gh) - T(g)T(h)$ est petite pour tous $g,h \in G$). Il nous a paru naturel de poser le problème inverse : une repré-

sentation approchée de G dans H est-elle toujours voisine d'une "vraie" représentation ? L'objet de ce travail est de montrer que la réponse est affirmative lorsque G est compact. Notre résultat principal s'énonce plus précisément comme suit.

Théorème : Soient G un groupe compact et K,ε deux nombres réels avec $K \geq 1$, $\varepsilon > 0$. Alors il existe un nombre réel $\delta > 0$ ayant la propriété suivante :

Pour toute application continue $T : G \to GL(H)$ telle que $\|T(g)\| \leq K$ et $\|T(g)^{-1}\| \leq K$ pour tout $g \in G$, et telle que $\|T(gh) - T(g)T(h)\| \leq \delta$ pour tous $g,h \in G$, il existe un homomorphisme continu $S : G \to GL(H)$ tel que $\|S(g) - T(g)\| \leq \varepsilon$ pour tout $g \in G$.

En un sens, le problème de perturbation que nous considérons a le même rapport avec les représentations normiquement continues des groupes que les travaux de Berg [1] avec les opérateurs normaux. Comme le note explicitement Berg, il est intéressant de comparer cette situation (où certaines identités sont vraies modulo des erreurs petites en norme) à celle popularisée par Brown, Douglas, Fillmore [4], et d'autres (où les identités sont vraies modulo des erreurs qui sont des opérateurs compacts). Les deux situations nécessitent en général des approches très différentes. (L'une des raisons en est que d'importantes propriétés du spectre d'un opérateur sont invariantes modulo les perturbations compactes, mais extrêmement sensibles aux perturbations normiques). Il est donc remarquable que, dans l'étude des groupes compacts, certaines méthodes sont utiles dans les deux cas. Il en est ainsi de la réduction au groupe à deux éléments, permise par la projection P_T ; voir ci-dessous ainsi que [6].

La nature de nos méthodes nous conduit à généraliser le problème posé. Ainsi remplaçons-nous GL(H) par le groupe des éléments inversibles d'une algèbre de Banach A. Pour éviter des confusions, nous introduisons aussi un A-module M ; il suffirait de prendre partout pour M l'espace sous-jacent à A muni de sa structure canonique de A-module à droite.

Le deuxième paragraphe est un préliminaire sur les idempotents dans une algèbre de Banach ; il fournit aussi un cas particulier du résultat principal, avec G le groupe à deux éléments. Le troisième paragraphe est la preuve du résultat principal.

Le premier auteur remercie le "Fonds national suisse de la Recherche scientifique" pour son généreux support.

2. Quelques lemmes sur les idempotents d'une algèbre de Banach. Soit A une algèbre de Banach unifère complexe ; nous notons 1 l'unité de A ; nous convenons que $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$ pour tous $x,y \in A$ et que $\|1\| = 1$. Le spectre de x dans A est noté Sp(x).

Soient r un nombre réel avec $0 < r < \frac{1}{2}$ et D le domaine du plan complexe défini par

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < r\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda-1| < r\}$$

La frontière γ de D est la réunion disjointe du cercle γ_1, de rayon r centré à l'origine, et du cercle γ_2, de rayon r centré en 1 ; nous les supposons munis de leurs orientations standards.

Lemme 1. Soit α un nombre réel avec $0 \leq \alpha \leq 1$. Soit P un idempotent non nul de A et soit $Q \in A$ avec

$$\|Q - P\| \leq \alpha \frac{r^4}{3^2 2^6} \|P\|^{-3} .$$

Alors : (j) $\mathrm{Sp}(P) \subset \{0,1\}$ et $\|(P-\lambda)^{-1}\| \leq 4r^{-2}\|P\|$ si $\lambda \in \mathbb{C} - D$

(jj) $\mathrm{Sp}(Q) \subset D$ et $\begin{cases} \|(Q-\lambda)^{-1}\| \leq 8r^{-2}\|P\| \\ \|(Q-\lambda)^{-1} - (P-\lambda)^{-1}\| \leq \frac{\alpha}{18}\|P\|^{-1} \end{cases}$

si $\lambda \in \mathbb{C} - D$.

Preuve. (j) Si $\lambda \notin \{0,1\}$, l'inverse de $P-\lambda$ est $\frac{1-\lambda-P}{\lambda(\lambda-1)}$. Si $\lambda \in \mathbb{C} - D$ avec $|\lambda| \leq \|P\| + 1$, on a donc

$$\|(P-\lambda)^{-1}\| \leq \frac{1+|\lambda|+\|P\|}{|\lambda|\ |\lambda-1|} \leq 2r^{-2}(\|P\|+1) \leq 4r^{-2}\|P\| ;$$

si $|\lambda| \geq \|P\| + 1$, on a

$$\|(P-\lambda)^{-1}\| \leq \frac{2|\lambda|}{|\lambda|\,|\lambda-1|} \leq \frac{2}{|\lambda|-1} \leq \frac{2}{\|P\|}$$

qui est aussi inférieur à $4r^{-2}\|P\|$.

(jj) Soit $\lambda \in \mathbb{C} - D$. On a $Q-\lambda = (P-\lambda)\{1+(P-\lambda)^{-1}(Q-P)\}$ avec

$\|(P-\lambda)^{-1}(Q-P)\| \leq 4r^{-2}\|P\| \alpha \dfrac{r^4}{3^2 2^6} \|P\|^{-3} < \frac{1}{2}$. Il en résulte que $1 + (P-\lambda)^{-1}(Q-P)$ est inversible, que la norme de son inverse ne dépasse pas 2, donc que $Q-\lambda$ est inversible et que $\|(Q-\lambda)^{-1}\| \leq 2\|(P-\lambda)^{-1}\| \leq 8r^{-2}\|P\|$. Enfin

$$\|(Q-\lambda)^{-1}-(P-\lambda)^{-1}\| \leq \|(P-\lambda)^{-1}\| \, \|(P-\lambda)-(Q-\lambda)\| \, \|(Q-\lambda)^{-1}\| \leq$$
$$4r^{-2}\|P\|\alpha\frac{r^4}{3^2 2^6} \|P\|^{-3} 8r^{-2}\|P\| = \frac{\alpha}{18}\|P\|^{-1}.$$

<u>Lemme 2</u>. Soient $U = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(\lambda) \neq \frac{1}{2}\}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ la fonction holomorphe définie par $f(\lambda) = \begin{cases} 0 \text{ si } \mathrm{Re}(\lambda) < \frac{1}{2} \\ 1 \text{ si } \mathrm{Re}(\lambda) > \frac{1}{2} \end{cases}$.

Soient α, P et Q comme dans le lemme 1, et

$$R = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\lambda)d\lambda}{\lambda-Q}.$$

Alors : (j) R est un idempotent et $\|R\| \leq 8r^{-1}\|P\|$

(jj) $P = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_\gamma \frac{f(\lambda)d\lambda}{\lambda-P}$

(jjj) $\|R-P\| \leq \dfrac{\alpha r}{18} \|P\|^{-1}$

(jv) tout élément de A qui commute à Q commute aussi à R.

<u>Preuve</u>. (j) R est un idempotent car $(f(\lambda))^2 = f(\lambda)$ pour tout $\lambda \in U$; la norme de $2\pi R$ est bornée par le produit de la longueur de γ_2 et de la borne supérieure de $(\lambda-Q)^{-1}$ sur γ_2, c'est-à-dire par $(2\pi r)(8r^{-2}\|P\|)$ vu le lemme 1(jj). De même (jjj) résulte de la seconde inégalité du lemme 1(jj). Les assertions (jj) et (jv) sont des propriétés élémentaires du calcul fonctionnel holomorphe.

Lemme 3. Les notations étant comme ci-dessus, soit $V = 1-P-R+2RP$. Alors $\|V-1\| \leq \alpha$, V est inversible, $\|V^{-1}-1\| \leq \alpha$ et $R = VPV^{-1}$.

Preuve. Comme P et R sont des idempotents, $RV = VP = RP$. On a

$$\|V-1\| = \|R(P-R) + (R-P)P\| \leq \|R-P\|(\|R\| + \|P\|) \leq$$
$$\frac{\alpha r}{18}\|P\|^{-1}(8r^{-1}+1)\|P\| \leq \frac{\alpha r}{18}(8r^{-1}+r^{-1}) = \frac{\alpha}{2} ;$$

par suite, V est inversible et $\|V^{-1}-1\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|V-1\|^j \leq \alpha$.

Nous résumons les informations obtenues comme suit.

Proposition 1. Soit α un nombre réel avec $0 \leq \alpha \leq 1$. Soient P un idempotent de A et $Q \in A$ avec $\|Q-P\| \leq \alpha 2^{-14}\|P\|^{-3}$. Alors il existe un idempotent R de A ayant les propriétés suivantes :

(j) Tout élément de A qui commute à Q commute aussi à R.

(jj) Si $V = 1-P-R+2PR$, alors V est inversible, $R = VPV^{-1}$ et $\|V-1\| \leq \alpha$, $\|V^{-1}-1\| \leq \alpha$.

Preuve. Soit $r < \frac{1}{2}$ (d'où aussi $\frac{r^4}{9} < \frac{1}{9}2^{-4} = \frac{16}{9}2^{-8}$) tel que $\frac{r^4}{9} \geq 2^{-8}$. Alors les lemmes 1 à 3 s'appliquent.

Nous n'avons pas cherché à optimiser les bornes ci-dessus, qui sont certainement très grossières.

Corollaire. Soient $I \in A$ une racine carrée de l'unité et $J \in A$ un élément voisin de I. Alors il existe un conjugué K de I voisin de J (et donc aussi de I) qui commute à tous les éléments qui commutent à J.

Preuve. Si $P = \frac{1}{2}(I+1)$ et $Q = \frac{1}{2}(J+1)$, il suffit de poser $K = 2R - 1$, où R est comme dans la proposition 1.

3. Représentations approchées d'un groupe compact dans un module de Banach.

Dans tout ce paragraphe, A est une algèbre de Banach unifère complexe comme plus haut. Nous désignons par M un A-module de Banach unifère à droite ("unit linked Banach right A-module" dans Bonsall et Duncan [2] - et on convient de plus que $\|vx\| \leq \|v\|\|x\|$ pour tous $v \in M$ et $x \in A$). Nous écrivons $L_A(M)$ l'**algèbre** de Banach des opérateurs linéaires bornés sur M qui sont aussi des endomorphismes de A-module, et $L_A(M)^{inv}$ le groupe des éléments inversibles de $L_A(M)$ muni de la topologie normique. Si Ω est un espace topologique, $T : \Omega \to L_A(M)^{inv}$ une application continue et K un nombre réel positif, nous dirons que T est de borne K si $\|T(\omega)\| \leq K$ et $\|T(\omega)^{-1}\| \leq K$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Définition 1. Soient G un groupe topologique, K et δ deux nombres réels (avec $K \geq 1$ et $\delta \geq 0$) et $T : G \to L_A(M)^{inv}$ une application continue de borne K. Nous dirons que T est une représentation approchée de G dans M de défaut δ si $\|T(gh) - T(g)T(h)\| \leq \delta$ pour tous $g,h \in G$. Nous noterons $\mathrm{Rep}_{(\delta,K)}(G,M)$ l'ensemble de toutes les applications de ce type.

Désormais, G sera un groupe compact et dg sa mesure de Haar normalisée. L'espace de Banach $L^2_M(G)$ des classes d'équivalence de fonctions de carré sommable de G dans M (voir Bourbaki [3], chapitre IV) est muni de sa structure naturelle de (G,A)-bimodule : si $g \in G$, nous notons L_g l'opérateur défini sur $L^2_M(G)$ par $(L_g\varphi)(h) = \varphi(g^{-1}h)$ pour tout $h \in G$; si $x \in A$, nous notons $\varphi \longmapsto \varphi x$ l'opérateur défini sur $L^2_M(G)$ par $(\varphi x)(h) = (\varphi(h))x$ pour tout $h \in G$. On prendra garde que l'homomorphisme $g \longmapsto L_g$ de G dans $GL(L^2_M(G))$ n'est en général <u>pas</u> normiquement continu, mais seulement fortement continu.

Si $T : G \longrightarrow L_A(M)^{inv}$ est dans $\mathrm{Rep}_{(\delta,K)}(G,M)$, on définit comme dans [6] les applications

$$i_T : \begin{cases} M \longrightarrow L^2_M(G) \\ v \longmapsto (g \longmapsto T(g^{-1})v) \end{cases}$$

$$m_T : \begin{cases} L^2_M(G) \longrightarrow M \\ \varphi \longmapsto \int_G T(g^{-1})^{-1}\varphi(g)\,dg \end{cases}$$

$$P_T = i_T m_T : L^2_M(G) \longrightarrow L^2_M(G).$$

<u>Lemme 4</u>. Soit T comme ci-dessus.

(j) Les applications i_T, m_T et P_T sont des opérateurs linéaires bornés : $\|i_T\| \le K$, $\|m_T\| \le K$, $\|P_T\| \le K^2$; ce sont aussi des homomorphismes de A-module, et P_T est un projecteur sur le sous A-module $\mathrm{Im}(i_T)$ de $L^2_M(G)$.

(jj) Soient de plus $T' \in \mathrm{Rep}_{(\delta,K)}(G,M)$ et $d = \sup_{g\in G}\|T'(g) - T(g)\|$; alors $\|P_T - P_{T'}\| \le 2K^3 d$.

Preuve. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier (j); il faut noter que $m_T i_T = id_M$. Pour (jj) :

$$\sup_{g\in G}\|T'(g)^{-1}-T(g)^{-1}\| \leq \sup_{g\in G}\|T'(g)^{-1}\| \, \|T(g)-T'(g)\| \, \|T(g)^{-1}\| \leq K^2 d$$

de sorte que

$$\|P_T-P_{T'}\| \leq \|i_T\| \, \|m_T-m_{T'}\| + \|i_T-i_{T'}\| \, \|m_{T'}\| \leq K \; K^2 d+dK \leq 2K^3 d.$$

Lemme 5. Soit T comme ci-dessus. Pour tout $g \in G$, on a $\|L_g P_T-P_T L_g\| \leq 2K^3\delta$; en particulier, si T est un homomorphisme, alors P_T est G-équivariant. Dans tous les cas, les applications

$$\begin{cases} G \longrightarrow L_A(L^2_M(G)) \\ g \longmapsto L_g P_T-P_T L_g \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} G \longrightarrow L_A(L^2_M(G)) \\ g \longmapsto L_g{}^{-1} P_T L_g \end{cases} \quad \text{sont continues.}$$

Preuve. Soient $g \in G$ et $v \in M$; alors

$$L_g i_T(v) - i_T T(g)(v) : \begin{cases} G \longrightarrow M \\ k \longmapsto \{T(k^{-1}g)-T(k^{-1})T(g)\}v \end{cases}$$

est de $L^2_M(G)$-norme inférieure à $\delta\|v\|$. Par suite, en tant qu'opérateur de M dans $L^2_M(G)$, $L_g i_T - i_T T(g)$ est de norme inférieure à δ. D'autre part, pour g et h voisins dans G:

$$\|L_g i_T-i_T T(g)-L_h i_T+i_T T(h)\| \leq$$

$$\sup_{g\in G}\|\{T(k^{-1}g)-T(k^{-1}h)\}-\{T(k^{-1})T(g)-T(h^{-1})T(g)\}\|$$

qui est petit puisque T est uniformément continue ; donc $L_g i_T - i_T T(g)$ dépend continûment de g.

Soient $g \in G$ et $\varphi \in L^2_M(G)$; alors

$$\{T(g)m_T - m_T L_g\}(\varphi) = \int_G T(g)T(k^{-1})^{-1}\varphi(k)dk - \int_G T(k^{-1})^{-1}\varphi(g^{-1}k)dk =$$
$$\int_G \{T(g)T(k^{-1})^{-1} - T(k^{-1}g^{-1})^{-1}\}\varphi(k)dk$$

est de M-norme inférieure à $\delta K^2\|\varphi\|$; ceci résulte de l'inégalité de Hölder (voir Bourbaki [3], chapitre IV) et de

$$\|T(g)T(k^{-1})^{-1} - T(k^{-1}g^{-1})^{-1}\| \le$$

$$\|T(k^{-1}g^{-1})^{-1}\| \, \|T(k^{-1}g^{-1})T(g) - T(k^{-1})\| \, \|T(k^{-1})^{-1}\| \le K\delta K \ .$$

Par suite, en tant qu'opérateur de $L^2_M(G)$ dans M, $T(g)m_T - m_T L_g$ est de norme inférieure à δK^2. D'autre part, pour g et h voisins dans G :

$$\|T(g)m_T - m_T L_g - T(h)m_T + m_T L_h\| \le$$
$$\sup_{g\in G}\|\{T(g)T(k^{-1})^{-1} - T(h)T(k^{-1})^{-1}\} - \{T(k^{-1}g^{-1})^{-1} - T(k^{-1}h^{-1})^{-1}\}\|$$

qui est petit ; donc $T(g)m_T - m_T L_g$ dépend continûment de g.

Il en résulte que, pour tout $g \in G$, l'opérateur $L_g P_T - P_T L_g = \{L_g i_T - i_T T(g)\}m_T + i_T\{T(g)m_T - m_T L_g\}$ dépend continûment de g, et que $\|L_g P_T - P_T L_g\| \le \delta K + K\delta K^2 \le 2\delta K^3$.

Soient alors $g,h \in G$ et soit e l'élément neutre de G ; alors

$$L_g^{-1}P_TL_g - L_h^{-1}P_TL_h = \{(L_g^{-1}-L_h^{-1})P_T - P_T(L_g^{-1}-L_h^{-1})\}L_g +$$

$$L_h^{-1}\{P_T(L_g-L_h)-(L_g-L_h)P_T\}+\{(L_h^{-1}L_g-L_e)P_T-P_T(L_h^{-1}L_g-L_e)\}.$$

Il en résulte que l'application $\begin{cases} G \longrightarrow L_A(L^2_M(G)) \\ g \longmapsto L_g^{-1}P_TL_g \end{cases}$

est continue, ce qui achève la preuve du lemme 5.

Définissons $Q_T = \int_G L_g^{-1}P_TL_g dg$ dans $L_A(L^2_M(G))$; c'est la dernière affirmation du lemme 5 qui rend cette définition possible.

<u>Lemme 6</u>. (j) L'opérateur Q_T sur $L^2_M(G)$ est un endomorphisme de (G,A)-bimodule, $\|Q_T\| \leq K^2$ et $\|Q_T - P_T\| \leq 2K^3\delta$; en particulier, si T est un homomorphisme, alors $Q_T = P_T$.

(jj) Soit de plus T' comme dans le lemme 4 ; alors $\|Q_T - Q_{T'}\| \leq 2K^3 d$.

<u>Preuve</u>. Cela résulte des lemmes précédents et de l'invariance de la mesure de Haar sur G.

<u>Proposition 2</u>. <u>Soit</u> ε <u>un nombre réel avec</u> $0 \leq \varepsilon \leq 2^{-6}$. <u>Soit</u> $T \in \mathrm{Rep}_{(\delta,K)}(G,M)$ <u>avec</u> $\delta \leq \varepsilon(2K)^{-9}$. <u>Alors il existe un homomorphisme continu</u> $S : G \longrightarrow L_A(M)^{inv}$ <u>avec</u>

$$\sup_{g \in G} \|S(g) - T(g)\| \leq \varepsilon.$$

<u>Preuve</u>. Les opérateur P_T et Q_T étant définis comme plus

haut, les lemmes 6 et 4(j) impliquent
$\|Q_T-P_T\|\leq\varepsilon 2^{-8}K^{-6}\leq\varepsilon 2^{-8}\|P_T\|^{-3}$. On peut donc définir
$R_T = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\gamma}\dfrac{f(\lambda)d\lambda}{\lambda-Q_T}$ et $V_T = 1-P_T-R_T+2R_TP_T$ comme dans le paragraphe 2 ; la proposition 1 implique que R_T est un projecteur sur $L^2_M(G)$ et un endomorphisme de (G,A)-bimodule, que V_T est inversible, et que les normes de V_T-1 et de $V_T^{-1}-1$ sont bornées par 1.

Pour tout $g \in G$, posons $S(g) = m_TV_T^{-1}L_gV_Ti_T$; montrons d'abord que $S : \begin{cases} G \longrightarrow L_A(M) \\ g \longmapsto S(g) \end{cases}$ est une application continue. Les restrictions de V_T et de R_T à l'image de i_T (qui est aussi celle de P_T) coïncident. Comme R_T et L_g commutent pour tout $g \in G$, l'opérateur $S(g)$ est le composé de $m_TV_T^{-1}R_T$ avec $\phi(g) : \begin{cases} M \longrightarrow L^2_M(G) \\ v \longmapsto L_gi_T(v) \end{cases}$. Pour tous $g,h \in G$, on a

$$\|\{\phi(g)-\phi(h)\}v\| = \{\int_G \|\{T(k^{-1}g)-T(k^{-1}h)\}v\|^2dk\}^{\frac{1}{2}} \leq$$
$$(\sup_{g\in G}\|T(k^{-1}g)-T(k^{-1}h)\|)\|v\| ;$$

par suite, $\phi(g)$ dépend continûment de g et $S(g)$ aussi.

Montrons que S est un homomorphisme de G dans $L_A(M)^{inv}$. Soient $g,h \in G$ et e l'élément neutre de G ; alors $S(e) = m_TV_T^{-1}V_Ti_T = id_M$ et
$S(g)S(h) = m_TV_T^{-1}L_gV_Ti_Tm_TV_T^{-1}L_hV_Ti_T$. Par la proposition 1, $V_Ti_Tm_TV_T^{-1} = V_TP_TV_T^{-1} = R_T$, qui commute à L_h ; donc $S(g)S(h) = m_TV_T^{-1}L_gL_hR_TV_Ti_T$; mais

$(R_T V_T) i_T = (V_T P_T) i_T = V_T i_T$ et $S(g)S(h) = S(gh)$.

Montrons enfin que T est une perturbation ad hoc de S. Soit $g \in G$. Alors

$$\| S(g)-T(g) \| = \| m_T V_T^{-1} L_g V_T i_T - m_T V_T^{-1} V_T i_T T(g) \| \leq$$

$$\| m_T \| \| V_T^{-1} \| \{ \| L_g V_T - V_T L_g \| \, \| i_T \| + \| V_T \| \, \| L_g i_T - i_T T(g) \| \}.$$

Mais $\| L_g V_T - V_T L_g \| \leq \| L_g P_T - P_T L_g \| + 2 \| R_T \| \, \| L_g P_T - P_T L_g \|$ par définition de V_T et compte tenu de ce que R_T commute à L_g ; donc $\| L_g V_T - V_T L_g \| \leq \varepsilon 2^{-8} K^{-6} (1+2\| R_T \|)$ par le lemme 5. Comme $\| R_T \| \leq 8r^{-1} \| P_T \|$ par le lemme 2 (on choisi r strictement inférieur à, mais voisin de $\frac{1}{2}$), on a $1+2 \| R_T \| \leq 1+16r^{-1} K^2 \leq 64K^2$ par le lemme 4(j). On a donc $\| L_g V_T - V_T L_g \| \leq \varepsilon 2^{-2} K^{-4}$. Par suite

$$\| S(g)-T(g) \| \leq 2K\{\varepsilon 2^{-2} K^{-4} K + 2\delta\} = (\tfrac{1}{2} K^{-2} + 4\delta K)\varepsilon \leq \varepsilon$$

(voir le début de la preuve du lemme 5).

Notons que $\| S(g) \| \leq \| T(g) \| + \varepsilon \leq K + \varepsilon$ pour tout $g \in G$, c'est à dire que S est de borne $K + \varepsilon$.

<u>Définition 2</u>. L'ensemble des applications de G dans $L_A(M)^{inv}$ est muni de la <u>distance</u> définie par $d(T,T') = \sup_{g \in G} \| T(g) - T'(g) \|$. Pour tous K et δ comme dans la définition 1, l'ensemble $\mathrm{Rep}_{(\delta,K)}(G,M)$ est muni de la distance induite.

<u>Proposition 3. Soient</u> K <u>et</u> δ <u>deux nombres réels avec</u>

$K \geq 1$ et $\delta \leq 2^{-15}K^{-9}$. Pour tout $T \in Rep_{(\delta,K)}(G,M)$, notons S_T l'homomorphisme défini dans la preuve de la proposition 2. Alors, pour $\varepsilon = 2^{-6}$, l'application

$$\begin{cases} Rep_{(\delta,K)}(G,M) \longrightarrow Rep_{(0,K+\varepsilon)}(G,M) \\ \quad T \longmapsto S_T \end{cases}$$

est uniformément continue

Remarque. L'espace but est formé de "vraies" représentations ; si T est une "vraie" représentation, alors $S_T = T$.

Preuve. Nous conservons les notations précédement introduites. Soient $T,T' \in Rep_{(\delta,K)}(G,M)$ et $d = d(T,T')$. Par le lemme 6(jj), on a $\|Q_T - Q_{T'}\| \leq 2K^3 d$. Par le lemme 6(j), on a $\|Q_T - P_T\| \leq 2K^3\delta$ et $\|Q_{T'} - P_{T'}\| \leq 2K^3\delta$. De plus $2K^3\delta \leq 2^{-14}K^{-6} \leq 2^{-14}\|P_T\|^{-3}$ par le lemme 4(j). Il résulte donc du lemme 1(jj) que (avec r comme au paragraphe 1) :

$$\begin{aligned} \|(\lambda-Q_T)^{-1} - (\lambda-Q_{T'})^{-1}\| &\leq \|(\lambda-Q_T)^{-1}\| \, \|(\lambda-Q_{T'}) - (\lambda-Q_T)\| \, \|(\lambda-Q_{T'})^{-1}\| \\ &\leq 8r^{-2}K^2 2K^3 d 8r^{-2}K^2 = 2^7 r^{-4}K^7 d. \end{aligned}$$

On lit donc sur la définition de R_T et $R_{T'}$ que $\|R_T - R_{T'}\| \leq 2^7 r^{-3}K^7 d$. Il existe donc une constante C telle que

$$\|V_T - V_{T'}\| = \|-P_T + P_{T'} - R_T + R_{T'} + 2R_T P_T - 2R_{T'} P_{T'}\| \leq$$

$$\|2R_T - 1\| \|P_T - P_{T'}\| + \|R_T - R_{T'}\| \|2P_{T'} - 1\| \leq Cd ,$$

$$\|V_T^{-1} - V_{T'}^{-1}\| \leq \|V_T^{-1}\| \|V_{T'} - V_T\| \|V_{T'}^{-1}\| \leq 4Cd .$$

Il est facile de vérifier qu'on peut même choisir C pour que $\|m_T - m_{T'}\| \leq Cd$ et $\|i_T - i_{T'}\| \leq Cd$. Il en résulte qu'il existe une constante D telle que

$$\|S_T(g) - S_{T'}(g)\| = \|m_T V_T^{-1} L_g V_T i_T - m_{T'} V_{T'}^{-1} L_g V_{T'} i_{T'}\| \leq Dd$$

pour tout $g \in G$.

Choisissons maintenant pour M l'espace de Banach sous-jacent à A, muni de sa structure canonique de A-module à droite. Les applications

$$\begin{cases} A \longrightarrow L_A(M) \\ z \longmapsto (x \mapsto zx) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} L_A(M) \longrightarrow A \\ Z \longmapsto Z(1) \end{cases}$$

sont des isomorphismes unifères et isométriques d'algèbres de Banach, inverses l'un de l'autre ; le groupe A^{inv} des éléments inversibles dans A est donc canoniquement isomorphe à $L_A(M)^{inv}$. Les propositions 2 et 3 s'expriment alors comme suit.

Soient G un groupe compact et A une algèbre de Banach, comme au début du paragraphe II. Soient K et δ

deux nombres réels avec $K \geq 1$ et $\delta \leq 2^{-15}K^{-9}$; soit $\mathrm{Rep}_{(\delta,K)}(G,A)$ l'espace des applications normiquement continues $T : G \longrightarrow A^{\mathrm{inv}}$ telles que

$$\sup_{g\in G}\|T(g)\| \leq K \qquad \sup_{g\in G}\|T(g)^{-1}\| \leq K \qquad \sup_{g,h\in G}\|T(gh)-T(g)T(h)\| \leq \delta$$

qui est un espace métrique pour la distance définie par

$$d(T,T') = \sup_{g\in G}\|T(g)-T'(g)\| .$$

Si $\delta = 0$, on écrit $\mathrm{Rep}_{(K)}(G,A)$ au lieu de $\mathrm{Rep}_{(0,K)}(G,A)$.

<u>Proposition 4</u>. <u>Il existe une application uniformément continue</u>

$$\begin{cases} \mathrm{Rep}_{(\delta,K)}(G,A) \longrightarrow \mathrm{Rep}_{(2K)}(G,A) \\ \qquad T \longmapsto S_T \end{cases}$$

<u>qui induit l'identité sur</u> $\mathrm{Rep}_{(K)}(G,A)$.

<u>Corollaire</u>. Si T et T' sont deux éléments suffisament voisins de $\mathrm{Rep}_{(\delta,K)}(G,A)$, alors les deux représentations S_T et $S_{T'}$ sont conjuguées.

<u>Preuve</u>. S_T et $S_{T'}$ satisfont alors les hypothèses du lemme 7 qui suit.

<u>Lemme 7</u>. Soient S et S' deux homomorphismes continus de G dans A^{inv} tels que $\sup_{g\in G}\|S(g)-S'(g)\| < (\sup_{g\in G}\|S'(g)\|)^{-1}$.

Alors S et S' sont conjugués.

Preuve. Soit $Q = \int_G S(g)S'(g^{-1})dg$; alors $S(g)Q = QS'(g)$ pour tout $g \in G$, et il reste à vérifier que Q est inversible. Mais $\|1-Q\| \leq \int_G \|1-S(g)S'(g^{-1})\| dg \leq \int_G \|S'(g^{-1})\| \, \|S'(g)-S(g)\| dg < 1$ par hypothèse, d'où le résultat.

Soient désormais H un espace de Hilbert complexe et L(H) l'algèbre stellaire des opérateurs linéaires bornés sur H ; notons GL(H) le groupe des éléments inversibles de L(H) et U(H) son sous-groupe des éléments unitaires, tous deux munis de leurs topologies normiques. Soit $T \in \mathrm{Rep}_{(\delta,K)}(G,L(H))$ avec δ et K comme dans la proposition 4. On sait que S_T est conjuguée à une représentation unitaire de G dans H, disons S_T^u, par un élément proche de 1 (voir par exemple [6], proposition 2). Soient $(n_\sigma)_{\sigma\in\hat{G}}$ la famille des multiplicités des représentations irréductibles de G dans S_T^u (les notations sont celles de Dixmier [5], n° 15.1). Le corollaire à la proposition 4 dit alors que l'application ainsi définie de $\mathrm{Rep}_{(\delta,K)}(G,L(H))$ dans l'ensemble des fonctions à valeurs entières positives sur $\hat{G}$ est localement constante. On peut même voir qu'elle sépare les composantes connexes de $\mathrm{Rep}_{(\delta,K)}(G,L(H))$. On sait aussi que les familles $(n_\sigma)_{\sigma\in G}$ de son image n'ont qu'un nombre fini de termes non nuls [7].

Il n'y a aucune difficulté à formuler et à montrer l'analogue de la proposition 4 pour les applications normiquement continues de G dans le groupe U(H), ni à considérer un espace de Hilbert réel ; nous en laissons le soin au lecteur.

REFERENCES

[1] BERG I.D : "On approximation of normal operators by weighted shifts". Michigan Math. J. 21 377-383 (1974). Voir aussi "Index theory for perturbations of direct sums of normal operators and weighted shifts", à paraître.

[2] BONSALL F.F. et DUNCAN J. : "Complete normed algebras". Springer 1973.

[3] BOURBAKI N. : "Intégration, chapitres I à IV, 2è édition". Hermann 1965.

[4] BROWN L.G., DOUGLAS R.G. et FILLMORE P.A. : "Unitary equivalence modulo the compact operators and extensions of C^*-algebras". Springer Lecture Notes in Mathematics 345 (1973) 58-128.

[5] DIXMIER J. : "Les C^*-algèbres et leurs représentations (2è édition)". Gauthier-Villars 1969.

[6] DE LA HARPE P. et KAROUBI M. : "Perturbations compactes des représentations d'un groupe dans un espace de Hilbert, I". Bull. Soc. math. France, Mémoire 46, 1976, 41-65

[6] KALLMAN R.R. : A characterization of uniformly continuous representations of connected locally compact groups. Michigan Math. J. 16 (1969) 257-263.

Pierre de la HARPE
Université de Genève
Section de Mathématiques
2-4, rue du Lièvre -
Case postale 124
1211 GENEVE 24

Max KAROUBI
Université de Paris VII
U.E.R. de Mathématiques
2, Place Jussieu
75007 PARIS

(Reçu le 6 Juillet, 1977)