

CONNEXIONS, COURBURES ET CLASSES  
CARACTERISTIQUES EN K-THEORIE ALGEBRIQUE

par

Max KAROUBI

Le but de cet article est de construire des homomorphismes  $K_*(A) \rightarrow H_*(A)$  pour toute  $\mathbb{Q}$ -algèbre commutative  $A$ ,  $H_*(A)$  désignant une théorie de l'homologie (type De Rham) de l'algèbre  $A$ ; cf. § 2. Il ne contient pas de démonstrations. Celles-ci paraîtront dans un autre article qui généralisera en même temps les concepts introduits ici, en particulier dans le cas des anneaux  $A$  quelconques. Cette rédaction n'est donc qu'un point de départ.

1.- DESCRIPTION DES CLASSES DE CHERN CLASSIQUES (théorie de Chern-Weil)

Soit  $E$  un fibré vectoriel complexe sur une variété différentiable  $X$  associé à des fonctions de transition différentiables

$$g_{ji} : U_i \cap U_j \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$$

$(U_k)$  étant un recouvrement ouvert trivialisant de  $E$ . On désigne par  $dg_{ji}$  la matrice de 1-formes dont les coefficients s'obtiennent en différentiant les coefficients  $g_{ji}$ . Si  $(\alpha_k)$  désigne une partition de l'unité subordonnée au recouvrement ouvert  $(U_k)$ , on désigne par  $\Gamma_i$  la matrice de 1-formes sur  $U_i$  définie par la somme

$$\Gamma_i = \sum \alpha_k \cdot g_{ki}^{-1} \cdot dg_{ki}$$

Cette matrice représente l'expression locale d'une connexion compte tenu de l'identité

$$\Gamma_i = g_{ji}^{-1} \cdot dg_{ji} + g_{ji}^{-1} \cdot \Gamma_j \cdot g_{ji}$$

sur  $U_i \cap U_j$ . L'expression locale de la courbure est donnée de même par la matrice de 2-formes

$$R_i = d\Gamma_i + (\Gamma_i)^2$$

L'identité précédente permet de montrer que  $R_i = g_{ji}^{-1} \cdot R_j \cdot g_{ji}$  sur  $U_i \cap U_j$ .

---

1980 Mathematics Subject Classification. 57R20, 55N15

© 1982 American Mathematical Society  
0731-1036/82/0000-0483/\$03.25

Désignons en général par  $\Omega^{\text{pair}}(X)$  l'algèbre commutative formée des formes différentielles de degré pair sur  $X$ . Alors  $\text{Dét}(1+R_i) = \text{Dét}(1+R_j)$  dans  $\Omega^{\text{pair}}(U_i \cap U_j)$ . Donc le développement de  $\text{Dét}(1+R_i) = 1 + c_1 + \dots + c_n$  pour tout  $i$  définit des formes différentielles  $c_\alpha$  de degré  $2\alpha$  qui sont fermées et dont les classes de cohomologie sont les classes de Chern (complexes) de  $E$  [6].

## 2.- HOMOLOGIE DE DE RHAM D'UN ANNEAU COMMUTATIF A

Pour tout anneau commutatif  $A$  on peut introduire le module  $\Omega_*^{\mathbb{Z}} A$  formé des formes différentielles formelles. Ainsi  $\Omega_1^{\mathbb{Z}} A$  est le quotient du  $A$ -module libre engendré par les symboles  $df$ ,  $f \in A$ , par le sous-module engendré par les relations  $d(fg) = fdg + gdf$ . Le module  $\Omega_n^{\mathbb{Z}} A$  est la  $n^{\text{ième}}$  puissance extérieure de  $\Omega_1^{\mathbb{Z}} A$  en tant que  $A$ -module. La différentielle extérieure  $d : \Omega_n^{\mathbb{Z}} A \rightarrow \Omega_{n+1}^{\mathbb{Z}} A$  définit un complexe (avec  $\Omega_0^{\mathbb{Z}} A = A$ )

$$0 \rightarrow \Omega_0^{\mathbb{Z}} A \rightarrow \Omega_1^{\mathbb{Z}} A \rightarrow \dots \rightarrow \Omega_n^{\mathbb{Z}} A \rightarrow \dots$$

dont l'homologie est désignée par  $H_*(A)$ .

Plus généralement, si  $\Omega_* A$  désigne une algèbre différentielle graduée strictement commutative avec  $\Omega_0 A = A$ , on désigne par  $H_*^{\Omega}(A)$  l'homologie du complexe associé. L'homomorphisme évident  $\Omega_*^{\mathbb{Z}} A \rightarrow \Omega_* A$  induit un homomorphisme  $H_*(A) \rightarrow H_*^{\Omega}(A)$ .

Ainsi, si  $A$  est l'algèbre des fonctions  $C^\infty$  sur une variété  $X$ , il est en général préférable de considérer l'algèbre des formes différentielles classiques plutôt que l'algèbre "abstraite"  $\Omega_*^{\mathbb{Z}} A$ . Dans ce cas, on a bien sûr  $H_n^{\Omega}(A) \approx H^n(X; \mathbb{C})$ .

## 3.- A-FIBRES PLATS ET K-THEORIE ALGEBRIQUE

Un "A-fibré plat" sur un CW-complexe  $Y$  est un revêtement  $\pi : E \rightarrow Y$ , les fibres étant munies d'une structure de  $A$ -module projectif de type fini et tel que pour tout  $y \in Y$ , il existe un voisinage  $U$  de  $y$ , un module projectif de type fini  $P$  et un isomorphisme de revêtements  $\pi^{-1}(U) \rightarrow U \times P$ ,  $A$ -linéaire sur chaque fibre. Si  $P = A^n$ , un A-fibré plat de fibre  $A^n$ , est canoniquement associé à un fibré principal de groupe (discret)  $GL_n(A)$ .

Si  $X$  est un CW-complexe fini, on définit un "A-fibré plat virtuel" comme la donnée

- 1) d'une fibration de Serre  $f : Y \rightarrow X$  qui soit une application acyclique.
- 2) d'un A-fibré plat  $E$  sur  $Y$ .

On notera un tel fibré virtuel  $E \xrightarrow{\pi} Y \xrightarrow{f} X$ .

Deux fibrés virtuels  $E \rightarrow Y \rightarrow X$  et  $E' \rightarrow Y' \rightarrow X$  sont dits équivalents s'il existe un fibré virtuel  $F \rightarrow Z \rightarrow X$  et des applications  $Y \xrightarrow{\sigma} Z$  et  $Y' \xrightarrow{\sigma'} Z$  tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\quad} & X \\ \sigma \downarrow & \nearrow & \uparrow \\ Z & \xleftarrow{\sigma'} & Y' \end{array}$$

commute et tels que E et E' soient isomorphes à  $\sigma^*F$  et  $\sigma'^*F$  respectivement.

Les classes d'équivalence de A-fibrés virtuels forment un monoïde abélien de manière évidente (par produit fibré au-dessus de X). On note  $K_A(X)$  son groupe de Grothendieck.

**THEOREME** : Pour tout anneau A et pour tout CW-complexe fini X, on a un isomorphisme naturel de groupes

$$K_A(X) \approx [X, K_0(A) \times BGL(A)^+]$$

En particulier  $K_A(S^n) \approx K_0(A) \oplus K_n(A)$ .

4.- CONNEXIONS ET COURBURES SIMPLICIALES

Soit X un ensemble simplicial quelconque et soit E un "A-fibré plat simplicial" de fibre  $A^r$  sur X : un tel fibré est déterminé par un cocycle  $g_{ji}(\sigma)$ ,  $i$  et  $j \in \{0, \dots, n\}$  pour chaque cellule  $\sigma$  de dimension n de X où les  $g_{ji}(\sigma)$  sont des éléments de  $GL_r(A)$  vérifiant les relations usuelles. Si A est une  $\mathbb{Q}$ -algèbre commutative et si  $\Omega_*A$  est une  $\mathbb{Q}$ -algèbre différentielle graduée avec  $\Omega_0A = A$  (cf. § 2), une "connexion" sur E est donnée pour chaque cellule  $\sigma$  de dimension n et pour chaque entier  $i \in \{0, \dots, n\}$  par une matrice d'ordre r  $\Gamma_i(\sigma)$  à coefficients dans  $\Omega^0(\sigma) \otimes \Omega_1(A)$  où  $\Omega^*(\sigma)$  désigne en général  $\Omega_*^{\mathbb{Z}}(\Delta_n) \otimes \mathbb{Q}$ ,  $\Delta_n$  étant l'algèbre  $\mathbb{Q}[x_0, \dots, x_n]/\Sigma x_i - 1$ . En outre si  $\tau$  est une face de  $\sigma$  associée à une application croissante  $\alpha : \Delta_m \rightarrow \Delta_n$ , on a  $\Gamma_{\alpha(j)}(\sigma)|_{\tau} = \Gamma_j(\sigma)$ . Enfin, si (ji) est une "arête" de  $\sigma$ , on a la formule

$$\Gamma_i = g_{ji}^{-1} \cdot dg_{ji} + g_{ji}^{-1} \cdot \Gamma_j \cdot g_{ji}$$

Le seul exemple qui nous intéressera dans ce paragraphe est celui de la "connexion canonique" définie par

$$\Gamma_i = \sum_{k=0}^n x_k g_{ki}^{-1} \cdot dg_{ki}$$

En suivant le schéma du § 1, on peut associer à une connexion simpliciale sa "courbure" : elle est définie sur chaque cellule et chaque indice i par la formule  $R_i = d\Gamma_i + (\Gamma_i)^2$  où d représente la différentielle du bicomplexe  $\Omega^*(\sigma) \otimes \Omega_*(A)$ . En raison de la formule  $R_i = g_{ji}^{-1} \cdot R_j \cdot g_{ji}$ , il en résulte que

$$c(E) = \text{Dét}(1 + R_i)$$

définit un élément bien déterminé, de degré total pair dans le bicomplexe  $\Omega^*(X; \Omega_*(A))$  (complexe de De Rham-Sullivan de X à coefficients dans  $\Omega_*(A)$ ).

Soit  $\mathcal{C}_A^*(X)$  le sous-complexe du complexe simple associé à  $\Omega^*(X; \Omega_*(A))$  défini par

$$\mathcal{C}_A^{2n}(X) = \bigoplus_{\substack{p+q=2n \\ p < q}} \Omega^p(X; \Omega_q(A)) \oplus Z^n(X; \Omega_n(A))$$

$$\mathcal{C}_A^{2n+1}(X) = \bigoplus_{\substack{p+q=2n+1 \\ p < q}} \Omega^p(X; \Omega_q(A))$$

Un examen plus attentif montre que  $c(E)$  définit en fait un cycle de degré pair de ce complexe. Son homologie, notée  $\mathcal{H}_A^*(X)$ , se calcule aisément par une variante du théorème de Kunneth :

$$\mathcal{H}_A^{2n}(X) \approx \bigoplus_{\substack{p+q=2n \\ p < q}} H^p(X; H_q(A)) \oplus H^n(X; Z_n(A))$$

$$\mathcal{H}_A^{2n+1}(X) \approx \bigoplus_{\substack{p+q=2n+1 \\ p < q}} H^p(X; H_q(A))$$

Dans ces formules,  $Z_n(A)$  désigne bien entendu l'ensemble des cycles de degré  $n$  du complexe  $\Omega_*(A)$  et  $H_n(A) = Z_n(A)/B_n(A)$  son homologie dans le même degré.

Ainsi, en copiant la méthode du § 1, on peut associer à  $E$  des classes de Chern

$$c_{p,q}(E) \in H^p(X; H_q(A)), \quad p+q = 2n, \quad p < q, \quad n \leq r$$

$$c_{n,n}(E) \in H^n(X; Z_n(A)), \quad n \leq r$$

Ces classes vérifient les mêmes propriétés formelles que les classes de Chern classiques. En particulier, on a une formule du type  $c(E \otimes E') = c(E) \cdot c(E')$  en désignant par  $c = \sum_{p,q} c_{p,q}$  la "classe totale" de Chern.

De même, on peut définir des "caractères de Chern"  $Ch_n(E) \in \mathcal{H}_A^{2n}(X)$  où  $Ch_n(E) = \frac{1}{n!} Q_n(c_1, \dots, c_n)$ ,  $c_i = c_i(E)$  désignant  $\sum_{\substack{p+q=2i \\ p < q}} c_{p,q}(E)$  et  $Q_n$  désignant le polynôme de Newton. Si on pose en général  $Ch(E) = \sum_{p \leq q} Ch_p(E)$ , on a les formules  $Ch(E \otimes E') = Ch(E) + Ch(E')$  et  $Ch(E \otimes E') = Ch(E) \cdot Ch(E')$ .

Si on choisit pour  $X$  l'ensemble simplicial  $BGL_r(A)$  classifiant du groupe discret  $GL_r(A)$  et pour  $E$  le fibré universel, on en déduit un homomorphisme d'anneaux

$$Ch : K_A(Y) \rightarrow \mathcal{H}_A^{\text{pair}}(Y)$$

pour tout CW-complexe fini  $Y$ ,  $\mathcal{H}_A^*(Y)$  étant défini par les mêmes formules que ci-dessus (remplacer  $X$  par  $Y$ ). En particulier, si  $Y$  est une sphère, on en déduit des homomorphismes

$$Ch_{n,n} : K_n(A) \rightarrow Z_n(A)$$

$$Ch_{p,q} : K_p(A) \rightarrow H_q(A)$$

pour  $p < q$ ,  $p+q = 2n$ . Ces homomorphismes vérifient des formules de multiplication du type  $Ch(x \cdot y) = Ch(x) \cdot Ch(y)$ .

5.- K-THEORIE RELATIVE ET CLASSES CARACTERISTIQUES RELATIVES

Supposons maintenant que A soit une algèbre de Banach. On peut lui associer une K-théorie topologique  $K_A^{\text{top}}(X) \approx [X, K_O(A) \times BGL(A)^{\text{top}}]$  où  $BGL(A)^{\text{top}}$  désigne l'espace classifiant du groupe topologique (non discret)  $GL(A)^{\text{top}} = \varinjlim GL_r(A)^{\text{top}}$ . En particulier,  $K_A^{\text{top}}(S^n) = K_O(A) \oplus K_n^{\text{top}}(A)$  avec  $K_n^{\text{top}}(A) = \pi_n(BGL(A)^{\text{top}}) \approx \pi_{n-1}(GL(A)^{\text{top}})$  pour  $n \geq 1$ . Les groupes  $K_n^{\text{top}}(A)$  sont périodiques [5][7]. Soit  $\mathcal{F}_A$  la fibre homotopique de l'application

$$BGL(A)^+ \rightarrow BGL(A)^{\text{top}}$$

La "K-théorie relative" de X, notée  $K_A^{\text{rel}}(X)$ , est par définition  $[X, \mathcal{F}_A]$ . En particulier, si X est une sphère, on pose  $K_A^{\text{rel}}(S^n) = K_n^{\text{rel}}(A)$  et on a alors la suite exacte

$$\dots \rightarrow K_{n+1}^{\text{top}}(A) \rightarrow K_{n+1}^{\text{rel}}(A) \rightarrow K_n^{\text{rel}}(A) \rightarrow K_n^{\text{top}}(A) \rightarrow \dots$$

Si X est un CW-complexe fini, cette théorie relative peut se décrire suivant un schéma éprouvé en considérant des triplets  $(E, F, \beta)$  où E et F sont deux fibrés plats virtuels de fibre  $A^n$  sur X, soit  $E \rightarrow Y \rightarrow X$  et  $F \rightarrow Y \rightarrow X$  et où  $\beta : E \rightarrow F$  est un isomorphisme topologique.

Supposons donnée, d'autre part, une algèbre différentielle graduée  $\Omega_*(A)$  avec  $\Omega_0(A) = A$ , telle que le complexe

$$0 \rightarrow \Omega_0(A) \rightarrow \Omega_1(A) \rightarrow \dots$$

soit un complexe d'espaces de Banach et telle que les différents produits  $\Omega_i(A) \times \Omega_j(A) \rightarrow \Omega_{i+j}(A)$  soient bilinéaires continus. Pour toute variété différentiable Y, on peut alors considérer le bicomplexe  $\Omega^*(Y; \Omega_*(A))$  où  $\Omega^p(Y; \Omega_q(A))$  désigne maintenant l'ensemble des formes différentielles de degré p sur Y à valeurs dans l'espace de Banach  $\Omega_q(A)$ . Si  $\Omega_*(A)$  est un complexe direct d'espaces de Banach, on a  $H_n(\Omega^*(Y; \Omega_*(A))) \approx \bigoplus_{p+q=n} H^p(Y; H_q(A))$  où  $H_*(A)$  désigne l'homologie du complexe  $\Omega_*(A)$ . Dans le cas général, par intégration sur les simplexes singuliers, on a des homomorphismes caractéristiques

$$H_n(\Omega^*(Y; \Omega_*(A))) \rightarrow \bigoplus_{p+q=n} \text{Hom}(H_p(Y), H_q(A))$$

La situation simpliciale étudiée au § 4 a un analogue différentiable : si E est un A-fibré plat défini par des fonctions de transition  $g_{ji}$ , les classes de Chern  $c_n(A)$  appartiennent à  $H_{2n}(\mathcal{C}_A^*(Y))$  où  $\mathcal{C}_A^*(Y)$  est un sous-complexe de  $\Omega^*(Y; \Omega_*(A))$  défini par les mêmes formules que dans le § 4. De nouveau, si  $\Omega_*(A)$  est un complexe direct d'espaces de Banach on trouve

