C. R. Acad. Sc. Paris, t. 297 (17 octobre 1983) Série I — 349

(33)

TOPOLOGIE. — *K-théorie réelle de fibrés projectifs complexes.* Note (*) de **Max Karoubi** et **Vojislav Mudrinski,** présentée par Henri Cartan

Dans cette Note nous achevons le calcul des groupes $K^i_{\mathbb{R}}(X \times P_r, X \times P_s)$, où P_n désigne l'espace projectif complexe de $\mathbb{C}^{n+1}$, calcul commencé par le second auteur dans une Note précédente [3]. Nous calculons aussi la K-théorie réelle de certains fibrés projectifs complexes.

TOPOLOGY. — Real K-Theory of Complex Projective Bundles.

In this Note we finish the computation of the groups $K^i_{\mathbb{R}}(X \times P_r, X \times P_s)$ *where* P_n *denotes the complex projective space of* $\mathbb{C}^{n+1}$, *which has been started by the second author in a previous Note* [3]. *We compute also the real K-theory of some complex projective bundles.*

1. Calcul de $K_{\mathbb{C}}(P_{2m}, P_{2k})$ considéré comme un $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2]$-module. — Le calcul de $K_{\mathbb{C}}(P_r, P_s)$, $r>s$, comme groupe abélien est classique (*cf.* [2], p. 191 par exemple). Si H désigne le fibré de Hopf sur P_r et si t désigne l'élément $1-H$ de $K_{\mathbb{C}}(P_r)$, alors $K_{\mathbb{C}}(P_r, P_s)$ s'identifie au sous-groupe de $K_{\mathbb{C}}(P_r) \approx \mathbb{Z}[t]/t^{r+1}$ engendré par $t^{s+1}, t^{s+2}, \ldots, t^r$. D'autre part, pour toute paire d'espaces (X, Y), le groupe $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ opère sur $K_{\mathbb{C}}(X, Y)$ *via* la conjugaison complexe. Dans ce cas ci, la conjugaison complexe transforme H en $\bar{H} = H^{-1}$, soit t en $1-1/(1-t) = -(t+t^2+\ldots+t^r)$, donc t^m en $(-1)^m(t+\ldots+t^r)^m$.

Lemme. — *Le groupe* $K_{\mathbb{C}}(P_{2m}, P_{2k})$ *est un* $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2]$*-module libre de base :*

$$t^{2k+1}+(k+1)\,t^{2k+2}, \qquad t^{2k+3}+(k+2)\,t^{2k+4}, \;\ldots,\; t^{2m-1}+mt^{2m}.$$

Démonstration. — Nous allons démontrer ce lemme par récurrence sur $m-k$. Pour $m=k+1$, $K_{\mathbb{C}}(P_{2m}, P_{2k})$ est engendré par t^{2k+1} et t^{2k+2} et la conjugaison complexe transforme t^{2k+1} en $-t^{2k+1}-(2k+1)\,t^{2k+2}$ et laisse t^{2k+2} invariant. Si on pose $e_1 = t^{2k+1}+(k+1)\,t^{2k+2}$, on voit ainsi que $\bar{e}_1 = -t^{2k+1}-kt^{2k+2}$ et que e_1 et $\bar{e}_1$ forment une base du $\mathbb{Z}$-module $K_{\mathbb{C}}(P_{2m}, P_{2k}) \approx \mathbb{Z}^2$.

Pour m et k quelconques, nous pouvons écrire la suite exacte de $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2]$-modules :

$$0 \to K_{\mathbb{C}}(P_{2m}, P_{2m-2}) \to K_{\mathbb{C}}(P_{2m}, P_{2k}) \to K_{\mathbb{C}}(P_{2m-2}, P_{2k}) \to 0.$$

La liberté des termes extrêmes implique celle du terme du milieu avec la base explicitée ci-dessus.

Corollaire. — *Le groupe* $\tilde{K}_{\mathbb{C}}(P_{2m})$ *est un* $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2]$*-module libre de base* $t+t^2$, $t^3+2t^4, \ldots, t^{2m-1}+mt^{2m}$.

2. Calcul de $K^i_{\mathbb{R}}(X \times P_{2m}, X \times P_{2k})$. — Rappelons (*cf.* [2] de nouveau) que $K^*_{\mathbb{C}}(X \times P_r, X \times P_s)$ est un $K^*_{\mathbb{C}}(X)$-module libre de base $t^{s+1}, \ldots, t^r$ en tant que sous-module de $K^*_{\mathbb{C}}(X \times P_r) \approx K^*_{\mathbb{C}}(X)[t]/t^{r+1}$. Pour alléger les notations, désignons par $K^i_{\mathbb{C}}(X)(\eta_{k+1}, \ldots, \eta_m)$ le sous-groupe de $K^i_{\mathbb{C}}(X \times P_{2m}, X \times P_{2k})$ engendré par les :

$$\eta_j = t^{2j-1}+jt^{2j} \qquad \text{avec} \quad j=k+1, \ldots, m.$$

Le calcul du paragraphe 1 montre que $K^i_{\mathbb{C}}(X)(\eta_{k+1}, \ldots, \eta_m)$ s'identifie aussi au quotient de $K^i_{\mathbb{C}}(X \times P_{2m}, X \times P_{2k})$ par l'action de $\mathbb{Z}_2$.

Théorème. — *Pour tout CW-complexe fini, l'homomorphisme de « réalification » :*

$$K^i_{\mathbb{C}}(X \times P_{2m}, X \times P_{2k}) \to K^i_{\mathbb{R}}(X \times P_{2m}, X \times P_{2k}),$$

induit des isomorphismes :

$$K_{\mathbb{C}}^{i}(X)^{m-k} \approx K_{\mathbb{C}}^{i}(X)(\eta_{k+1}, \ldots, \eta_m) \approx K_{\mathbb{C}}^{i}(X \times P_{2m}, X \times P_{2k})/\mathbb{Z}_2 \approx K_{\mathbb{R}}^{i}(X \times P_{2m}, X \times P_{2k}).$$

En particulier : $K_{\mathbb{R}}^{i}(X \times P_{2m}) \approx K_{\mathbb{R}}^{i}(X) \oplus K_{\mathbb{C}}^{i}(X)^m$.

Démonstration. — Précisons d'abord que dans cet énoncé, $K_{\mathbb{C}}^{i}(X)^{m-k}$ désigne la somme de $(m-k)$ copies de $K_{\mathbb{C}}^{i}(X)$. Pour $m-k=1$ on retrouve ainsi (sous une forme plus précise) l'isomorphisme démontré dans [3], soit $K_{\mathbb{C}}^{i}(X) \approx K_{\mathbb{R}}^{i}(X \times P_{2k+2}, X \times P_{2k})$. Puisque $K_{\mathbb{C}}^{*}(X)^{m-k}$ et $K_{\mathbb{R}}^{*}(X \times P_{2m}, X \times P_{2k})$ sont des foncteurs cohomologiques en X, un argument standard de récurrence sur le nombre de cellules de X [1] nous permet de réduire le problème au cas où X est une sphère et où $i=0$.

Première étape : $m-k=1$. Nous savons déjà que $K_{\mathbb{C}}^{i}(X) \approx K_{\mathbb{R}}^{i}(X \times P_{2k+2}, X \times P_{2k})$. Il reste simplement à préciser que l'isomorphisme est induit par la réalification. Si X est une sphère de dimension paire, considérons la « K-théorie réduite » :

$$\tilde{F}(X) = \operatorname{Coker}(F(\text{Point}) \to F(X))$$

avec :

$$F(X) = K_{\mathbb{C}}^{*}(X) \quad \text{ou} \quad K_{\mathbb{R}}^{*}(X \times P_{2k+2}, X \times P_{2k}) \quad \text{ou} \quad K_{\mathbb{C}}^{*}(X \times P_{2k+2}, X \times P_{2k}).$$

On a alors une suite exacte (*cf.* [2], p. 154) :

$$\to \tilde{K}_{\mathbb{R}}^{-2}(X \times P_{2k+2}, X \times P_{2k}) \xrightarrow{\theta} \tilde{K}_{\mathbb{C}}(X \times P_{2k+2}, X \times P_{2k}) \to \tilde{K}_{\mathbb{R}}(X \times P_{2k+2}, X \times P_{2k}) \to \ldots$$

où θ est l'homomorphisme de complexification suivi de l'isomorphisme de Bott. Dans ce cas, cette suite se réduit à :

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z} \to 0.$$

L'involution est l'identité sur le deuxième facteur $\mathbb{Z}$ et son opposé sur le premier facteur. Comme suite de $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2]$-modules, elle est donc isomorphe à :

$$0 \to M^- \to M \to M/\mathbb{Z}_2 \to 0,$$

où $M = \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2]$ et où M^- est la partie antisymétrique de M d'après le paragraphe 1. Puisque la K-théorie réduite de S^0 est la K-théorie du point, le théorème est démontré pour les sphères de dimension paire. Le cas des sphères de dimension impaire se ramène à celui des sphères de dimension paire d'après la périodicité de Bott.

Deuxième étape : $m-k$ quelconque. On raisonne par récurrence sur $m-k$ à partir du diagramme :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
(E_1) & 0 \arrow[r] & K_{\mathbb{R}}^{*}(X \times P_{2m}, X \times P_{2m-2}) \arrow[r] & K_{\mathbb{R}}^{*}(X \times P_{2m}, X \times P_{2k}) \arrow[r] & K_{\mathbb{R}}^{*}(X \times P_{2m-2}, X \times P_{2k}) \arrow[r] & 0, \\
(E_2) & 0 \arrow[r] & K_{\mathbb{C}}^{*}(X \times P_{2m}, X \times P_{2m-2})/\mathbb{Z}_2 \arrow[r] \arrow[u, "\sigma_1"] & K_{\mathbb{C}}^{*}(X \times P_{2m}, X \times P_{2k})/\mathbb{Z}_2 \arrow[r] \arrow[u, "\sigma_2"] & K_{\mathbb{C}}^{*}(X \times P_{2m-2}, X \times P_{2k})/\mathbb{Z}_2 \arrow[r] \arrow[u, "\sigma_3"] & 0.
\end{tikzcd}$$

L'exactitude de la suite (E_2) résulte de la suite exacte :

$$0 \to K_{\mathbb{C}}^{*}(X \times P_{2m}, X \times P_{2m-2}) \to K_{\mathbb{C}}^{*}(X \times P_{2m}, X \times P_{2k}) \to K_{\mathbb{C}}^{*}(X \times P_{2m-2}, X \times P_{2k}) \to 0$$