TOPOLOGIE. — *Homologie cyclique et régulateurs en K-théorie algébrique.* Note (*) de **Max Karoubi,** présentée par Alain Connes.

Cette Note est la suite des Notes précédentes sur le sujet ([11], [12], [13]). On y généralise aux algèbres de Banach quelconques ainsi qu'aux algèbres de Banach ultramétriques la notion de régulateur en K-théorie algébrique définie dans [2] et [10].

TOPOLOGY. — Cyclic Homology and Regulators in Algebraic K-Theory.

This Note follows previous Notes on the same subject ([11], [12], [13]). *We generalize to arbitrary Banach algebras and to ultrametric Banach algebras the notion of regulator in algebraic K-theory defined in* [2] *and* [10].

1. FIBRÉS SIMPLICIAUX REPÉRÉS. — Soit G un groupe simplicial et soit X un ensemble simplicial. Par définition, un G-*fibré repéré* sur X est la donnée pour chaque cellule $\sigma\in X_n$ et pour $\{i, j\}\subset\Delta_n=\{0, \ldots, n\}$ d'éléments $g_{ji}=g_{ji}(\sigma)\in G_n$ vérifiant les deux conditions suivantes :

(i) $g_{ki}=g_{kj}.g_{ji}$.

(ii) Soit $\varphi:\Delta_p\to\Delta_n$ une application croissante et soit $\varphi^*:X_n\to X_p$ et $\varphi^*:G_n\to G_p$ une notation indifférente pour les applications induites sur X et G. On a alors la formule :

$$\varphi^*(g_{\varphi(j)\varphi(i)}(\sigma))=g_{ji}(\sigma).$$

Si $E=(g_{ji})$ et $F=(h_{ji})$ sont deux tels G-fibrés repérés, un morphisme $\lambda:E\to F$ est donné pour chaque cellule $\sigma\in X_n$ et pour $i\in\Delta_n$ par des éléments $\lambda_i=\lambda_i(\sigma)\in G_n$ vérifiant les deux conditions suivantes :

(i) $h_{ji}.\lambda_i=\lambda_j.g_{ji}$.

(ii) Avec φ comme ci-dessus, on a la formule :

$$\varphi^*(\lambda_{\varphi(i)}(\sigma))=\lambda_i(\varphi^*\sigma).$$

Les morphismes se composent de manière évidente (et sont tous des isomorphismes). Notons $\Phi_G(X)$ l'ensemble des classes d'isomorphie de tels fibrés repérés.

THÉORÈME. — *L'ensemble* $\Phi_G(X)$ *est naturellement isomorphe à l'ensemble* [X, BG] *des classes d'homotopie d'applications de* X *dans le complexe de Kan* BG [14].

2. K-THÉORIE TOPOLOGIQUE ET K-THÉORIE RELATIVE. — Soit $A=(A_n)$ un anneau simplicial *connexe* et soit G le groupe simplicial GL(A). Alors nous définirons la *K-théorie topologique* de A comme l'ensemble des groupes d'homotopie ($i>0$) :

$$K_i^{top}(A)=\pi_i(BGL(A)),$$

Dans cette Note nous nous intéressons aux deux types d'exemples suivants :

(1) Soit R une algèbre de Banach réelle ou complexe et soit A_n l'ensemble des applications de classe C^m (m fixé tel que $0\leqq m\leqq\infty$) du simplexe type Δ_n dans R. Il est bien connu que les groupes $K_i^{top}(A)$ [qu'on notera simplement $K_i^{top}(R)$] sont indépendants de m et sont les groupes usuels de la K-théorie topologique [7]. Si R est complexe par exemple, on a $K_i^{top}(R)\approx K_0(R)$ pour i pair et $K_i^{top}(R)\approx\pi_0(GL(R))$ pour i impair (périodicité de Bott).

(2) Soit R une algèbre de Banach ultramétrique et soit B_n l'anneau des séries formelles à $n+1$ variables :

$$P=\sum_{i_0, i_1, \ldots, i_n} a_{i_0\ldots i_n}x_0^{i_0}\ldots x_n^{i_n},$$

à coefficients dans R telles que $(i_0 i_1 \ldots i_n)^m . \| a_{i_0 \ldots i_n} \| \to 0$ (m fixé tel que $0 \leqq m < \infty$). Soit I_n l'idéal formé des séries P telles que :

$$P(x_0, \ldots, x_n) = 0 \quad \text{si} \quad x_0 + \ldots + x_n = 1.$$

Alors $A_n = B_n / I_n$ définit un anneau simplicial et les groupes $K_i^{top}(A)$ [qu'on notera aussi $K_i^{top}(R)$] sont indépendants de m et coïncident avec les groupes notés $K^{-i}(R)$ dans [7]. On trouvera des exemples de calcul de tels groupes dans [3].

Revenons maintenant à la situation générale des anneaux simpliciaux connexes. Pour tout ensemble simplicial X on pose :

$$\tilde{K}_A^{top}(X) = [X, BGL(A)],$$

les groupes $K_i^{top}(A)$ étant simplement $\tilde{K}_A^{top}(S^i)$ pour $i > 0$. Si X est fini [1], cet ensemble (en fait un groupe car BGL(A) est un H-espace) peut être défini de manière plus géométrique comme le groupe de Grothendieck réduit de la catégorie des fibrés simpliciaux repérés de groupe $GL_r(A)$, $r = 0, 1, \ldots$: (*cf* [8], p. 58).

Comme dans [10], notons $\mathscr{F}_A$ la fibre homotopique de l'application évidente :

$$BGL(A_0)^+ \to BGL(A)^+ \sim BGL(A).$$

La *K-théorie relative*, notée $K_A^{rel}(X)$, est par définition $[X, \mathscr{F}_A]$.

En particulier, on pose $K_i^{rel}(A) = K_A^{rel}(S^i)$ et on a la suite exacte :

$$K_{i+1}(A_0) \to K_{i+1}^{top}(A) \to K_i^{rel}(A) \to K_i(A_0) \to K_i^{top}(A).$$

Si X est fini, le groupe $K_A^{rel}(X)$ peut être défini géométriquement de la manière suivante (comparer avec [10]). Considérons l'ensemble des triples $\tau = (E, F, \beta)$ où E et F sont deux $GL_r(A_0)$-fibrés repérés sur Y, $r = 0, 1, 2, \ldots$, avec $\pi : Y \to X$ fibration acyclique et où $\beta : E \to F$ est un isomorphisme des $GL_r(A)$ fibrés associés (par extension du groupe structural). Deux triples :

$$\tau \to Y \xrightarrow{\pi} X \quad \text{et} \quad \tau' \to Y' \xrightarrow{\pi'} X,$$

sont équivalents s'il existe un triple $\tau'' \to Y'' \xrightarrow{\pi''} X$ et des applications $Y \xrightarrow{\sigma} Y''$ et $Y' \xrightarrow{\sigma'} Y''$ tels que le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\sigma"'] & X \\
Y'' \arrow[ur, "\pi''"] & Y' \arrow[l, "\sigma'"] \arrow[u, "\pi'"']
\end{tikzcd}$$

commute et tels que τ et τ' soient isomorphes à $\sigma^*(\tau'')$ et $\sigma'^*(\tau'')$ en un sens évident. Le groupe $K_A^{rel}(X)$ est alors le quotient du groupe de Grothendieck formé par les classes d'équivalence de tels triples par le sous-groupe engendré par les triples du type (E, E, Id_E).

3. Construction des classes caractéristiques relatives. — Dans ce dernier paragraphe nous ne considérerons que les deux types d'exemples décrits dans le paragraphe 2. Nous supposerons en outre dans le cas ultramétrique que les algèbres sont des $\mathbb{Q}$-algèbres et qu'il existe un entier s et une constante C_s tels que $\| 1/k \| \leqq C_s k^s$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Nous écrirons $K_i(A)$ [resp. $\tilde{K}_A(X)$] pour $K_i(A_0)$ [resp. $\tilde{K}_{A_0}(X)] \approx [X, BGL(A_0)^+]$.

Comme l'a déjà remarqué A. Connes [5], la définition de l'homologie cyclique des algèbres a un analogue topologique que nous désignerons par $HC_n^{top}(A)$ ou $H_n^{\lambda\, top}(A)$.