ALGÈBRE HOMOLOGIQUE. — *Formule de Künneth en homologie cyclique, I.* Note de **Max Karoubi**, présentée par Alain Connes.

Soient E et F deux objets cycliques dans la catégorie des k-modules. En nous appuyant sur [1], nous calculons alors l'homologie cyclique de $E \otimes F$ comme celle d'un certain complexe. Des résultats analogues ont été obtenus indépendamment par D. Burghéléa et C. Kassel en utilisant des méthodes différentes.

HOMOLOGICAL ALGEBRA. — Künneth formula in cyclic homology, I.

Let E *and* F *be two cyclic objects in the category of k-modules. Using the results of* [1], *we compute the cyclic homology of* $E \otimes F$ *as the homology of a certain complex. Analogous results have been obtained independently by D. Burghéléa and C. Kassel with different methods.*

I. PRÉLIMINAIRES ALGÉBRIQUES. — Soit k un anneau commutatif quelconque et soit $k[u]$ l'algèbre des polynômes sur k. Alors $k[u]$ peut être muni d'une structure de coalgèbre, le coproduit

$$m: \quad k[u] \to k[u] \otimes k[u],$$

étant défini par $m(u^n) = u^n \otimes 1 + u^{n-1} \otimes u + \ldots + 1 \otimes u^n$. Si M est un k-module et si $S : M \to M$ est localement nilpotent [i. e. pour tout x de M, il existe n tel que $S^n(x) = 0$], S définit une structure de $k[u]$-comodule sur M, la comultiplication

$$\Delta: \quad M \to M \otimes k[u],$$

étant définie par $\Delta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} S^n(x) \otimes u^n$. En fait, il est facile de voir que la catégorie des modules munis d'endomorphismes localement nilpotents est équivalente à la catégorie des $k[u]$-comodules. Si M et N sont deux tels comodules avec S_M et S_N comme endomorphismes associés, on définit $M \square N = \mathrm{Cotor}_0(M, N)$ (coproduit tensoriel) et $\mathrm{Cotor}(M, N) = \mathrm{Cotor}_1(M, N)$ (foncteur Cotor) respectivement comme le noyau et le conoyau de l'endomorphisme

$$S_M \otimes 1 - 1 \otimes S_N : M \otimes N \to M \otimes N.$$

Si

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

est une suite exacte de $k[u]$-comodules, on a la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Cotor}_0(M', N) \to \mathrm{Cotor}_0(M, N) \to \mathrm{Cotor}_0(M'', N)$$
$$\to \mathrm{Cotor}_1(M', N) \to \mathrm{Cotor}_1(M, N) \to \mathrm{Cotor}_1(M'', N) \to 0,$$

à condition que $\mathrm{Tor}_1^k(M'', N) = 0$. Enfin, si $S_M : M \to M$ est surjectif, on a $\mathrm{Cotor}_1(M, N) = 0$: en effet, un antécédent de $x \otimes y$ par l'endomorphisme $S_M \otimes 1 - 1 \otimes S_N$ est $S_M^{-1} x \otimes y + S_M^{-2} x \otimes S_N y + \ldots + S_M^{-n-1} x \otimes S_N^n y + \ldots$ où les $S_M^{-i} x$ désignent des antécédents successifs de x par S_M.

II. STRUCTURE DE COPRODUIT SUR L'HOMOLOGIE CYCLIQUE. — Soit Λ la catégorie d'A. Connes et soit C_Λ la résolution projective de $\mathbb{Z}$ comme Λ-module à gauche (*cf.* [1], § IV). Puisque tout $(\Lambda \times \Lambda)$-module peut être vu comme un Λ-module (par la diagonale), il existe un homomorphisme de Λ-complexes $\varphi_\Lambda : C_\Lambda \to C_\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} C_\Lambda$ unique à homotopie près et commutant à l'augmentation sur $\mathbb{Z}$. Si E est un k-module qui est un Λ^0-module à gauche (on dira simplement un $k[\Lambda^0]$-module), rappelons qu'on définit son homologie

0249-6291/86/03030527 $ 2.00

cyclique $HC_*(E)$ [resp. sa cohomologie cyclique $HC^*(E)$] comme l'homologie du complexe

$$C_\Lambda(E)=C_\Lambda \underset{\Lambda^0}{\otimes} E \qquad [\text{resp. } C_\Lambda(E)^*=\mathrm{Hom}(C_\Lambda(E), k)=\mathrm{Hom}_\Lambda(C_\Lambda, E^*)]$$

où C_Λ est vu comme un Λ^0-module à droite. Si maintenant F est un deuxième Λ^0-module à gauche, l'homomorphisme φ_Λ ci-dessus induit un homomorphisme

$$C_\Lambda(E\otimes F)=C_\Lambda \underset{\Lambda^0}{\otimes} (E\otimes F) \to (C_\Lambda\otimes C_\Lambda) \underset{\Lambda^0}{\otimes} (E\otimes F)$$

$$\to (C_\Lambda\otimes C_\Lambda) \underset{\Lambda^0\times\Lambda^0}{\otimes} (E\otimes F) \to C_\Lambda(E) \underset{k}{\otimes} C_\Lambda(F).$$

Si F et $HC_*(F)$ sont k-plats (par exemple si k est un corps), la formule de Künneth appliquée aux complexes $C_\Lambda(E)$ et $C_\Lambda(F)$ (car $C_\Lambda(F)$ est k-plat) montre que l'homologie de $C_\Lambda(E) \underset{k}{\otimes} C_\Lambda(F)$ est $HC_*(E)\otimes HC_*(F)$. On en déduit le coproduit annoncé

$$HC_*(E\otimes F) \to HC_*(E) \underset{k}{\otimes} HC_*(F).$$

En utilisant la diagonale $\Lambda\to\Lambda\times\Lambda\times\Lambda$, on démontre aisément que ce coproduit est « associatif ». Il est aussi commutatif et admet un élément neutre en un sens évident.

III. Structure de comodule de $HC_*(E)$ sur $HC_*(k)=k[u]$. — Supposons d'abord que $E=F$ soit réduit au $k[\Lambda^0]$-module constant $k^\natural$ (i. e. égal à k en chaque degré). Alors $HC_*(E)=HC_*(F)=k[u]$ et il importe de déterminer la comultiplication

$$m:\quad k[u]\to k[u]\otimes k[u].$$

Pour cela, désignons par S l'endomorphisme de C_Λ de degré -2 obtenu en quotientant par les deux premières colonnes de C_Λ (rappelons que C_Λ est associé à un certain complexe double construit explicitement dans [1], § IV qui est verticalement périodique de période 2). En considérant les homomorphismes composés

$$C_\Lambda \xrightarrow{\varphi_\Lambda} C_\Lambda\otimes C_\Lambda \to C_\Lambda\otimes\mathbb{Z} \qquad \text{et} \qquad C_\Lambda \xrightarrow{\varphi_\Lambda} C_\Lambda\otimes C_\Lambda \to \mathbb{Z}\otimes C_\Lambda$$

en degré 2, on démontre que les diagrammes suivants

$$\begin{tikzcd} C_\Lambda \arrow[r, "\varphi_\Lambda"] \arrow[dd, "S"'] & C_\Lambda\otimes C_\Lambda \arrow[d, "S\otimes 1"] \\ & C_\Lambda(-2)\otimes C_\Lambda \arrow[d, phantom, "\wr\wr"] \\ C_\Lambda(-2) \arrow[r, "\varphi_\Lambda(-2)"] & (C_\Lambda\otimes C_\Lambda)(-2) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C_\Lambda \arrow[r, "\varphi_\Lambda"] \arrow[dd, "S"'] & C_\Lambda\otimes C_\Lambda \arrow[d, "1\otimes S"] \\ & C_\Lambda\otimes C_\Lambda(-2) \arrow[d, phantom, "\wr\wr"] \\ C_\Lambda(-2) \arrow[r, "\varphi_\Lambda(-2)"] & (C_\Lambda\otimes C_\Lambda)(-2) \end{tikzcd}$$

sont commutatifs à homotopie près. Cet endomorphisme S induit l'endomorphisme bien connu de l'homologie cyclique (pour tout $k[\Lambda^0]$-module E) que nous noterons encore S. Ici $E=k^\natural$, $HC_*(E)=k[u]$ et $S(u^n)=u^{n-1}$. La commutation de S avec la comultiplication de $HC_*(k)$ qui résulte des diagrammes précédents implique par récurrence sur n que $m(u^n)=u^n\otimes 1+u^{n-1}\otimes u+\ldots+1\otimes u^n$.

Supposons maintenant que E soit un $k[\Lambda^0]$-module quelconque et que $F=k^\natural$. Le coproduit

$$\psi:\quad HC_*(E)\to HC_*(E)\otimes HC_*(k^\natural)\approx HC_*(E)\otimes k[u]$$

étant compatible avec S d'après ce qui précède, on a la relation suivante (pour x_n de degré n) :

$$\psi(x_n)=x_n\otimes 1+x_{n-1}\otimes u+\ldots+x_0\otimes u^n,$$

avec

$$\begin{aligned}(\mathrm{S}\circ\psi)(x_n)&=\mathrm{S}\,x_n\otimes 1+\mathrm{S}\,x_{n-1}\otimes u+\ldots+\mathrm{S}\,x_1\otimes u^{n-1}\\&=x_{n-1}\otimes 1+x_{n-2}\otimes u+\ldots+x_0\otimes u^{n-1},\end{aligned}$$

soit

$$x_{n-1}=\mathrm{S}\,x_n,\qquad x_{n-2}=\mathrm{S}\,x_{n-1},\ \ldots,\quad \text{donc } x_{n-i}=\mathrm{S}^i(x_n).$$

IV. Le théorème fondamental. — Soit S_0 (resp. S_1) l'endomorphisme surjectif localement nilpotent de degré -2 de $\mathrm{C}_\Lambda\otimes\mathrm{C}_\Lambda$ défini par

$$\mathrm{S}\otimes 1:\mathrm{C}_\Lambda\otimes\mathrm{C}_\Lambda\to\mathrm{C}_\Lambda(-2)\otimes\mathrm{C}_\Lambda\approx(\mathrm{C}_\Lambda\otimes\mathrm{C}_\Lambda)(-2)$$

$$(\text{resp. } 1\otimes\mathrm{S}:\mathrm{C}_\Lambda\otimes\mathrm{C}_\Lambda\to\mathrm{C}_\Lambda\otimes\mathrm{C}_\Lambda(-2)\approx(\mathrm{C}_\Lambda\otimes\mathrm{C}_\Lambda)(-2)).$$

Alors,

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{S}_0-\mathrm{S}_1)=\mathrm{C}_\Lambda\,\square\,\mathrm{C}_\Lambda=\mathrm{Cotor}_0(\mathrm{C}_\Lambda,\mathrm{C}_\Lambda)\quad\text{et}\quad\mathrm{Coker}(\mathrm{S}_0-\mathrm{S}_1)=\mathrm{Cotor}_1(\mathrm{C}_\Lambda,\mathrm{C}_\Lambda)=0$$

(*cf.* § 1). Si on note $\mathrm{C}_\Lambda\,\overline{\square}\,\mathrm{C}_\Lambda$ le complexe cône de $\mathrm{S}_0-\mathrm{S}_1$, il s'en suit que l'homomorphisme canonique $\mathrm{C}_\Lambda\,\square\,\mathrm{C}_\Lambda\to\mathrm{C}_\Lambda\,\overline{\square}\,\mathrm{C}_\Lambda$ est une équivalence d'homotopie. De même, si on pose $\mathrm{C}_\Lambda(\mathrm{E})\,\overline{\square}\,\mathrm{C}_\Lambda(\mathrm{F})$ égal au cône de $\mathrm{S}_0^\mathrm{E}-\mathrm{S}_1^\mathrm{F}:\mathrm{C}_\Lambda(\mathrm{E})\otimes\mathrm{C}_\Lambda(\mathrm{F})\to\mathrm{C}_\Lambda(\mathrm{E})\otimes\mathrm{C}_\Lambda(\mathrm{F})(-2)$, l'application canonique de $\mathrm{C}_\Lambda(\mathrm{E})\,\square\,\mathrm{C}_\Lambda(\mathrm{F})$ dans $\mathrm{C}_\Lambda(\mathrm{E})\,\overline{\square}\,\mathrm{C}_\Lambda(\mathrm{F})$ est une équivalence d'homotopie.

Puisque les deux homomorphismes

$$\mathrm{C}_\Lambda\xrightarrow{\varphi_\Lambda}\mathrm{C}_\Lambda\otimes\mathrm{C}_\Lambda\xrightarrow{\mathrm{S}\otimes 1}\mathrm{C}_\Lambda(-2)\otimes\mathrm{C}_\Lambda\approx(\mathrm{C}_\Lambda\otimes\mathrm{C}_\Lambda)(-2),$$

$$\mathrm{C}_\Lambda\xrightarrow{\varphi_\Lambda}\mathrm{C}_\Lambda\otimes\mathrm{C}_\Lambda\xrightarrow{1\otimes\mathrm{S}}\mathrm{C}_\Lambda\otimes\mathrm{C}_\Lambda(-2)\approx(\mathrm{C}_\Lambda\otimes\mathrm{C}_\Lambda)(-2),$$

sont homotopes, on a un homomorphisme $\mathrm{C}_\Lambda\to\mathrm{C}_\Lambda\,\overline{\square}\,\mathrm{C}_\Lambda$ donc un homomorphisme de $\mathrm{C}_\Lambda(\mathrm{E}\otimes\mathrm{F})$ dans $\mathrm{C}_\Lambda(\mathrm{E})\,\overline{\square}\,\mathrm{C}_\Lambda(\mathrm{F})$ qui a même homologie que $\mathrm{C}_\Lambda(\mathrm{E})\,\square\,\mathrm{C}_\Lambda(\mathrm{F})$.

Théorème. — *Soient* E *et* F *deux* $k[\Lambda^0]$-*modules quelconques. Alors l'homomorphisme précédent induit un isomorphisme entre* $\mathrm{HC}_*(\mathrm{E}\otimes\mathrm{F})$ *et l'homologie du complexe coproduit tensoriel* $\mathrm{C}_\Lambda(\mathrm{E})\,\square\,\mathrm{C}_\Lambda(\mathrm{F})$.

Pour démontrer le théorème considérons la catégorie classique Δ dont les objets sont les entiers naturels $[n]$ et les morphismes de $[n]$ vers $[p]$ les applications croissantes $\{0,\ldots,n\}\to\{0,\ldots,p\}$. Soit C_Δ la résolution projective standard de $\mathbb{Z}$ en tant que Δ-module à gauche : ainsi C_Δ^k est le groupe abélien libre de base $e_\alpha\in\mathrm{Hom}([k],[n])$, la structure de Δ-module étant définie par $f.e_\alpha=e_{f.\alpha}$ pour $f:[n]\to[m]$. La diagonale $\Delta\to\Delta\times\Delta$ induit un homomorphisme de complexes $\varphi_\Delta:\mathrm{C}_\Delta\to\mathrm{C}_\Delta\otimes\mathrm{C}_\Delta$ bien défini à homotopie près commutant à l'augmentation sur $\mathbb{Z}$. En fait, si e_α est défini par la suite $(\alpha_0,\ldots,\alpha_k)$, on peut choisir $\varphi_\Delta(e_\alpha)=\sum_{p=0}^{k}(\alpha_0,\ldots,\alpha_p)\otimes(\alpha_p,\ldots,\alpha_k)$ où chaque tenseur appartient à $\mathrm{C}_\Delta^p\otimes\mathrm{C}_\Delta^{n-p}$ (*cf.* [2], p. 241). En outre, on a un diagramme commutatif à homotopie près

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{C}_\Delta & \xrightarrow{\varphi_\Delta} & \mathrm{C}_\Delta\otimes\mathrm{C}_\Delta\\ \downarrow & & \downarrow\gamma\\ \mathrm{C}_\Lambda & \xrightarrow{\varphi_\Lambda} & \mathrm{C}_\Lambda\otimes\mathrm{C}_\Lambda.\end{array}$$