38

ALGÈBRE HOMOLOGIQUE. — *Formule de Künneth en homologie cyclique, II.* Note de **Max Karoubi**, présentée par Alain Connes.

Soient A et B deux k-algèbres telles que B et $HC_*(B)$ soient des k-modules plats. Le théorème essentiel de cette Note exprime $HC_*(A\otimes B)$ en fonction de $HC_*(A)$ et $HC_*(B)$. Nous étudions aussi le cas de la cohomologie cyclique et celui de l'homologie cyclique topologique. Des résultats analogues ont été obtenus indépendamment par D. Burghéléa et C. Kassel en utilisant des méthodes différentes ([3], [8]).

HOMOLOGICAL ALGEBRA. — Künneth formula in cyclic homology, II.

Let A *and* B *be two k-algebras such that* B *and* $HC_*(B)$ *are k-flats modules. The main theorem of this Note computes* $HC_*(A\otimes B)$ *in terms of* $HC_*(A)$ *and* $HC_*(B)$. *We study also the cohomological and topological cases. Analogous results have been obtained independently by D. Burghéléa and C. Kassel with different methods* ([3], [8]).

I. L'homologie cyclique du produit tensoriel de deux algèbres. — Soient E et F deux $k[\Lambda^0]$-modules dans le sens précisé dans la Note précédente [6]. Nous avons vu que $HC_*(E\otimes F)$ est l'homologie du complexe $C_\wedge(E)\square C_\wedge(F)$ qui s'insère dans la suite exacte :

$$0\to C_\wedge(E)\square C_\wedge(F)\to C_\wedge(E)\otimes C_\wedge(F)\xrightarrow{S_E\otimes 1-1\otimes S_F} C_\wedge(E)\otimes C_\wedge(F)\to 0 \qquad (S).$$

Si F et $HC_*(F)$ sont k-plats, on a

$$H_n(C_\wedge(E)\otimes C_\wedge(F))\approx \bigoplus_{p+q=n} HC_p(E)\otimes HC_q(F),$$

d'après la formule de Künneth classique [car $C_\wedge(F)$ est k-plat]. La suite exacte d'homologie associée à la suite exacte (S) s'écrit donc

$$\bigoplus_{p+q=n+1} HC_p(E)\otimes HC_q(F)\xrightarrow{S_E\otimes 1-1\otimes S_F}\bigoplus_{p+q=n-1} HC_p(E)\otimes HC_q(F)\to HC_n(E\otimes F)$$

$$\to \bigoplus_{p+q=n} HC_p(E)\otimes HC_q(F)\xrightarrow{S_E\otimes 1-1\otimes S_F}\bigoplus_{p+q=n-2} HC_p(E)\otimes HC_p(F)$$

soit

$$0\to \mathrm{Cotor}(HC_{*-1}(E),\,HC_*(F))\to HC_*(E\otimes F)\to HC_*(E)\square HC_*(F)\to 0.$$

Supposons en particulier que E et F soient les $k[\Lambda^0]$-modules associés à des algèbres A et B [2]. En notant comme il est d'usage $HC_*(A)$ et $HC_*(B)$ les homologies cycliques obtenues, on obtient le théorème de Künneth suivant :

Théorème. — *Supposons que* B *et* $HC_*(B)$ *soient plats en tant que k-modules. On a alors la suite exacte suivante (où les structures de* $k[u]$*-comodules sont induites par* S) :

$$0\to \mathrm{Cotor}(HC_{*-1}(A),\,HC_*(B))\xrightarrow{\theta} HC_*(A\otimes B)\to HC_*(A)\square HC_*(B)\to 0.$$

Des applications nombreuses de ce théorème sont décrites dans [3] et [8]. Nous ne les répèterons pas ici.

Remarque. — Il semble raisonnable de conjecturer que l'homomorphisme θ est induit par le cup-produit de Loday et Quillen [9].

0249-6291/86/03030595 $ 2.00 © Académie des Sciences

II. Le cas de la cohomologie cyclique. — Si E est un $k[\Lambda^0]$-module, rappelons qu'on peut définir sa cohomologie cyclique $HC^n(E)$ comme la cohomologie du complexe dual $C_\wedge(E)^* = \mathrm{Hom}(C_\wedge(E), k)$, soit encore $\mathrm{Ext}^n_\wedge(k^\natural, E^*)$ où E^* désigne le dual de E qui est un Λ-module à gauche [2]. En utilisant le cup-produit sur les foncteurs Ext, on en déduit un « produit »

$$HC^n(E) \times HC^p(F) \to HC^{n+p}(E \otimes F)$$

(*cf.* [7], p. 514) qui est dual du coproduit en homologie cyclique et dont il est raisonnable de conjecturer qu'il redonne le produit d'A. Connes [1] à un facteur de normalisation près. En outre, $HC^*(E) = \Pi\, HC^n(E)$ est naturellement un $k[u]$-module, l'action de $u : HC^*(E) \to HC^{*+2}(E)$ étant induite par le transposé de l'homomorphisme $S : C_\wedge(E) \to C_\wedge(E)(-2)$ et étant le cup-produit par le générateur de $HC^2(k)$.

Supposons maintenant que k soit un corps et que M et N soient des k-espaces vectoriels. On définit leur *produit tensoriel profini* $M \bar{\otimes} N$ comme $\varprojlim M/M' \otimes N \approx \varprojlim M/M' \otimes N/N' \approx \varprojlim M \otimes N/N'$ où M′ et N′ parcourent l'ensemble des sous-espaces vectoriels de codimension finie de M et N respectivement. Si M_1 et N_1 sont deux k-espaces vectoriels quelconques, il est facile de voir que $(M_1 \otimes N_1)^* \approx M_1^* \bar{\otimes} N_1^*$. Si en outre M et N sont des $k[u]$-modules, on définit $M \underset{k[u]}{\bar{\otimes}} N$ et $\overline{\mathrm{Tor}}^{k[u]}(M, N)$ comme étant respectivement le conoyau et le noyau de l'homomorphisme

$$u_M \otimes 1 - 1 \otimes u_N : \quad M \bar{\otimes} N \to M \bar{\otimes} N,$$

avec des notations évidentes.

Théorème. — *Avec les hypothèses et les définitions précédentes, on a la suite exacte*

$$0 \to HC^*(E) \underset{k[u]}{\bar{\otimes}} HC^*(F) \to HC^*(E \otimes F) \to \overline{\mathrm{Tor}}^{k[u]}(HC^{*-1}(E), HC^*(F)) \to 0.$$

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate du paragraphe 1 en considérant la suite duale de la suite exacte

$$HC_*(E) \otimes HC_*(F) \xrightarrow{S_E \otimes 1 - 1 \otimes S_F} HC_*(E) \otimes HC_*(F) \to HC_*(E \otimes F)$$
$$\to HC_*(E) \otimes HC_*(F) \xrightarrow{S_E \otimes 1 - 1 \otimes S_F} HC_*(E) \otimes HC_*(F).$$

Remarque 1. — Comme dans le paragraphe précédent, on en déduit un théorème analogue pour la cohomologie cyclique du produit tensoriel de deux algèbres.

Remarque 2. — On peut décomposer la suite exacte précédente degré par degré : on trouve alors la suite exacte

$$0 \to U \to HC^n(E \otimes F) \to V \to 0$$

où

$$U = \mathrm{Coker} \bigoplus_{i+j=n-2} HC^i(E) \bar{\otimes} HC^j(F) \to \bigoplus_{i+j=n} HC^i(E) \bar{\otimes} HC^j(F)$$

$$V = \mathrm{Ker} \bigoplus_{i+j=n-1} HC^i(E) \bar{\otimes} HC^j(F) \to \bigoplus_{i+j=n+1} HC^i(E) \bar{\otimes} HC^j(F).$$

III. Le cas topologique. — Soient

$$\to \mathscr{C}_n \to \ldots \to \mathscr{C}_1 \to \mathscr{C}_0 \to 0 \qquad \text{et} \qquad \to \mathscr{D}_n \to \ldots \to \mathscr{D}_1 \to \mathscr{D}_0 \to 0,$$

deux complexes d'espaces de Fréchet, le second étant constitué d'espaces nucléaires ([4], [5]). Si on suppose que les homologies de $\mathscr{C}_*$ et $\mathscr{D}_*$ sont des espaces séparés, on a la formule de Künneth topologique :

$$\bigoplus_{i+j=n} \mathrm{H}_i(\mathscr{C}_*)\hat{\otimes}\mathrm{H}_j(\mathscr{D}_*) \xrightarrow{\approx} \mathrm{H}_n(\mathscr{C}_*\hat{\otimes}\mathscr{D}_*).$$

Celle-ci se démontre en remarquant que $\mathrm{H}_n(\mathscr{C}_*\hat{\otimes}\mathscr{D}_*)$ ne dépend que du complexe $\mathscr{C}_*$ et du complexe borné $0 \to \mathscr{D}_{n+1} \to \mathscr{D}_n \to \ldots \to \mathscr{D}_0 \to 0$. En nous ramenant ainsi au cas où $\mathscr{D}_*$ est un complexe borné, on raisonne par récurrence sur la longueur de celui-ci en utilisant le fait que le produit tensoriel topologique par un espace de Fréchet nucléaire est un foncteur exact ([4], [5]).

D'autre part, si E est un $\mathbb{C}[\Lambda^0]$-module qui est un espace vectoriel topologique localement convexe, on peut définir son homologie cyclique topologique $\mathrm{HC}_*^{\mathrm{top}}(\mathrm{E})$ en suivant [1] grâce à des produits tensoriels topologiques projectifs. Enfin, si M et N sont des $\mathbb{C}[u]$-comodules qui sont en outre des espaces de Fréchet (N étant nucléaire), on définit $\mathrm{M}\,\hat{\square}\,\mathrm{N}$ et $\widehat{\mathrm{Cotor}}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ comme respectivement le noyau et le conoyau de l'homomorphisme

$$\mathrm{S_M}\otimes 1 - 1\otimes\mathrm{S_N}: \quad \mathrm{M}\hat{\otimes}\mathrm{N} \to \mathrm{M}\hat{\otimes}\mathrm{N},$$

où $\mathrm{S_M}$ et $\mathrm{S_N}$ sont les applications linéaires continues associées à la structure de $\mathbb{C}[u]$-comodule (*cf.* [6], § 1).

THÉORÈME. — *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{C}[\Lambda^0]$-*modules qui sont des espaces de Fréchet,* F *étant en outre nucléaire. Si on suppose* $\mathrm{HC}_*^{\mathrm{top}}(\mathrm{E})$ *et* $\mathrm{HC}_*^{\mathrm{top}}(\mathrm{F})$ *séparés, on a une suite exacte*

$$0 \to \widehat{\mathrm{Cotor}}(\mathrm{HC}_{*-1}^{\mathrm{top}}(\mathrm{E}), \mathrm{HC}_*^{\mathrm{top}}(\mathrm{F})) \to \mathrm{HC}_*^{\mathrm{top}}(\mathrm{E}\hat{\otimes}\mathrm{F}) \to \mathrm{HC}_*^{\mathrm{top}}(\mathrm{E})\,\hat{\square}\,\mathrm{HC}_*^{\mathrm{top}}(\mathrm{F}) \to 0.$$

Démonstration. — Elle est la même que celle du théorème énoncé dans le paragraphe 1. En effet, le théorème d'Eilenberg-Zilber [10] qui est de nature combinatoire est valable aussi dans le cas topologique et permet de montrer que $\mathrm{C}_\Delta(\mathrm{E}\hat{\otimes}\mathrm{F})$ a même homologie que $\mathrm{C}_\Delta(\mathrm{E})\hat{\otimes}\mathrm{C}_\Delta(\mathrm{F})$ (avec les notations de [6], § IV). On en déduit comme en [6], § IV que $\mathrm{C}_\wedge(\mathrm{E}\hat{\otimes}\mathrm{F})$ a même homologie que le complexe $\mathrm{C}_\wedge(\mathrm{E})\,\hat{\square}\,\mathrm{C}_\wedge(\mathrm{F})$ qui s'insère dans la suite exacte de complexes

$$0 \to \mathrm{C}_\wedge(\mathrm{E})\,\hat{\square}\,\mathrm{C}_\wedge(\mathrm{F}) \to \mathrm{C}_\wedge(\mathrm{E})\hat{\otimes}\mathrm{C}_\wedge(\mathrm{F}) \to \mathrm{C}_\wedge(\mathrm{E})\hat{\otimes}\mathrm{C}_\wedge(\mathrm{F})(-2) \to 0.$$

En considérant la suite exacte d'homologie associée à cette suite exacte de complexes et en appliquant le théorème de Künneth topologique rappelé plus haut, on en déduit le théorème.

COROLLAIRE. — *Soient* A *et* B *deux algèbres de Fréchet,* B *étant en outre nucléaire. Si on suppose* $\mathrm{HC}_*^{\mathrm{top}}(\mathrm{A})$ *et* $\mathrm{HC}_*^{\mathrm{top}}(\mathrm{B})$ *séparés, on a alors la suite exacte*

$$0 \to \widehat{\mathrm{Cotor}}(\mathrm{HC}_{*-1}^{\mathrm{top}}(\mathrm{A}), \mathrm{HC}_*^{\mathrm{top}}(\mathrm{B})) \to \mathrm{HC}_*^{\mathrm{top}}(\mathrm{A}\hat{\otimes}\mathrm{B}) \to \mathrm{HC}_*^{\mathrm{top}}(\mathrm{A})\,\hat{\square}\,\mathrm{HC}_*^{\mathrm{top}}(\mathrm{B}) \to 0.$$

Remarque 1. — Compte tenu des résultats de [1], cette formule généralise au cas non commutatif la formule de Künneth classique pour le produit de deux variétés compactes.

Remarque 2. — Il est évidemment regrettable de supposer les homologies cycliques séparées dans les résultats précédents. On peut s'en passer au moins pour un des facteurs à condition d'avoir une « bonne » définition de $\mathrm{H}_i(\mathscr{C}_*)\hat{\otimes}\mathrm{H}_j(\mathscr{D}_*)$, avec les notations du