40a

ALGÈBRE. — *Homologie cyclique des groupes et des algèbres.* Note (*) de **Max Karoubi**, présentée par Alain Connes.

Dans cette Note nous présentons les définitions de base qui nous serviront à introduire certaines classes caractéristiques en K-théorie algébrique et topologique. Ces définitions (à l'exception de celles des paragraphes 2 et 4) figurent pour l'essentiel dans [2], [3] et [4]. Nous les adaptons simplement à l'usage qui en sera fait.

ALGEBRA. — Cyclic Homology of Groups and Algebras.

In this Note we introduce the basic definitions which we will need to introduce certain characteristic classes in algebraic and topological K-theory. These definitions (with the exception of those in sections 2 and 4) are essentially contained in [2], [3] and [4]. We simply adapt them to our purposes.

I. HOMOLOGIE CYCLIQUE DES ALGÈBRES. — La définition de l'homologie cyclique des $\mathbb{C}$-algèbres (et de son analogue en cohomologie) est due à Alain Connes [2]. Soit maintenant k un anneau commutatif avec élément unité et soit A une k-algèbre quelconque (non nécessairement commutative). En suivant [3] et [4] nous allons définir l'homologie cyclique de A, définition qui coïncidera avec celle de [2] si $k=\mathbb{C}$. Pour cela désignons par A^p le produit tensoriel de p copies de A et faisons opérer le groupe cyclique $\mathbb{Z}/p$ sur A^p par la transformation :

$$a_1 \otimes a_2 \ldots \otimes a_p \to (-1)^{p-1} a_p \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_{p-1},$$

qu'on désignera par t_p ou simplement t. Soit $N=N_p$ la transformation définie par $N_p=1+t+\ldots+t^{p-1}$ (si $p=1$, on convient que $t=N=\mathrm{Id}$). Définissons b et b' : $A^{p+1} \to A^p$ par les formules :

$$b'(a_0 \otimes \ldots \otimes a_p)=\sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i a_0 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_p,$$

$$b(a_0 \otimes \ldots \otimes a_p)=b'(a_0 \otimes \ldots \otimes a_p)+(-1)^p a_p a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_{p-1}.$$

Par définition, l'homologie cyclique de A, notée $HC_*(A)$, est l'homologie du complexe simple associé au double complexe $C_{**}(A)$:

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & \\
A^3 \arrow[d, "b"'] & A^3 \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"'] & A^3 \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "b"'] & {} \arrow[l, "1-t"'] \\
A^2 \arrow[d, "b"'] & A^2 \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"'] & A^2 \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "b"'] & {} \arrow[l, "1-t"'] \\
A & A \arrow[l, "1-t"'] & A \arrow[l, "N"'] & {} \arrow[l, "1-t"']
\end{tikzcd}$$

Par exemple $HC_0(A)=A/[A, A]$. Si k contient $\mathbb{Q}$, les lignes sont des résolutions de $A^p/(1-t_p)$ et $HC_*(A)$ est alors l'homologie du complexe $(A^p/(1-t_p), b)$: c'est essentiellement la définition de A. Connes [2] qu'on notera $H^\lambda_*(A)$. Plus généralement, si k contient $1/n!$, il est facile de voir que $HC_p(A)\approx H^\lambda_p(A)$ pour $p<n$. Un des résultats fondamentaux de la théorie est l'existence d'une suite exacte naturelle ([2], [3], [4]) :

$$\to H_p(A, A) \xrightarrow{I} HC_p(A) \xrightarrow{S} HC_{p-2}(A) \xrightarrow{B} H_{p-1}(A, A) \to \ldots,$$

où $H_*(A, A)$ désigne l'homologie de Hochschild de A à coefficients dans le bimodule A ([1], p. 169).

II. Homologie cyclique des groupes. — Soit G un groupe discret et soit $A = k[G]$ l'algèbre du groupe. Définissons β et β' : $A^{p+1} \to A^p$ par les formules usuelles ($g_i \in G$) :

$$\beta(g_0 \otimes \ldots \otimes g_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i g_0 \otimes \ldots \otimes \hat{g}_i \otimes \ldots \otimes g_p,$$

$$\beta'(g_0 \otimes \ldots \otimes g_p) = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i g_0 \otimes \ldots \otimes \hat{g}_i \otimes \ldots \otimes g_p.$$

Comme dans le paragraphe 1 on peut introduire un double complexe $\tilde{C}_{**}(G)$ de $k[G]$-modules libres en remplaçant b et b' par β et β' respectivement.

En fait ici les colonnes impaires sont exactes et les colonnes paires sont des résolutions de k en tant que $k[G]$-module. Désignons par $C_{**}(G)$ le quotient du bicomplexe précédent par l'action de G et par $HC_*(G)$ l'homologie du complexe simple associé à $C_{**}(G)$.

Théorème. — *Pour tout groupe discret* G, *on a un isomorphisme naturel :*

$$HC_n(G) \approx H_n(G) \oplus H_{n-2}(G) \oplus \ldots$$

(*somme directe de groupes d'homologie de* G *à coefficients dans* k).

Regardons maintenant le bicomplexe $C_{**}(G)$ en termes d'éléments « non homogènes ». De manière précise, identifions $k \underset{A}{\otimes} A^{p+1}$ à A^p par la formule :

$$1.(g_0 \otimes g_1 \otimes \ldots \otimes g_p) \to g_0^{-1} g_1 \otimes g_1^{-1} g_2 \otimes \ldots \otimes g_{p-1}^{-1} g_p = \alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_p.$$

Cette correspondance permet de définir une transformation du bicomplexe $C_{**}(G)$ vers le bicomplexe $C_{**}(A)$ par la formule :

$$\alpha_1 \otimes \alpha_2 \ldots \otimes \alpha_p \to (\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p)^{-1} \otimes \alpha_1 \otimes \alpha_2 \ldots \otimes \alpha_p.$$

Cette transformation admet une rétraction évidente :

$$r : \quad C_{**}(A) \to C_{**}(G),$$

définie par la formule $r(g_0 \otimes g_1 \otimes \ldots \otimes g_p) = g_1 \otimes \ldots \otimes g_p$ si $g_0 g_1 \ldots g_p = 1$ et 0 sinon.

Corollaire. — *Le groupe* $HC_n(k[G])$ *contient* $H_n(G) \oplus H_{n-2}(G) \oplus \ldots$ *en facteur direct.*

Remarque. — Si k contient $\mathbb{Q}$, A. Connes a aussi défini des homomorphismes $HC_n(k[G]) \to H_{n-2k}(G)$ par une méthode sensiblement différente. J'ignore s'ils coïncident avec ceux définis ici.

III. Homologie cyclique réduite. — Supposons pour simplifier que A soit une algèbre augmentée d'augmentation $\varepsilon : A \to k$ et que $1/n! \in k$. Alors, pour $p < n$, on peut définir l'homologie cyclique réduite $\overline{HC}_p(A)$ de deux manières différentes : soit en considérant l'homologie de $(\overline{A}^{p+1}/1-t,\ b)$ avec $\overline{A} = \operatorname{Ker} \varepsilon$, soit en considérant le quotient $\overline{C}^{\lambda}_{p+1}(A)$ de $A^{p+1}/1-t$ par le sous k-module engendré par les produits tensoriels $a_0 \otimes \ldots \otimes a_p$ avec $a_i = 1$ pour un certain i et en remarquant que b passe au quotient [4]. On a alors une suite exacte scindée :

$$0 \to \overline{HC}_p(A) \to HC_p(A) \to HC_p(k) \to 0$$

avec $HC_p(k) = k$ si p est pair et $HC_p(k) = 0$ si p est impair.