

ALGÈBRE. — Homologie cyclique et K-théorie algébrique I. Note (\*) de Max Karoubi, présentée par Alain Connes.

Nous étendons aux anneaux quelconques les classes caractéristiques « absolues » définies dans [5] pour les Q-algèbres commutatives. Pour cela nous utilisons l'homologie cyclique ([2], [3], [7]) et les résultats de la Note précédente [6].

ALGEBRA. — Cyclic Homology and Algebraic K-theory I.

We extend to arbitrary rings the "absolute" characteristic classes defined in [5] for commutative Q-algebras. For this we use cyclic homology ([2], [3], [7]) and results of the previous Note [6].

I. DÉFINITION DES CLASSES CARACTÉRISTIQUES. — Pour toute Q-algèbre A, A. Connes a défini des homomorphismes  $K_0(A) \rightarrow HC_{2l}(A)$  [2]. Plus généralement, si A est une k-algèbre, tout module projectif de type fini E est l'image d'un projecteur p dans  $M_r(A)$  pour un certain r.

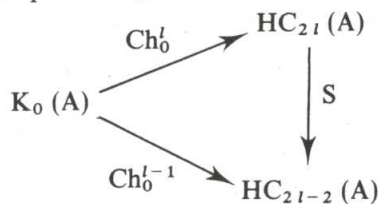
Ce projecteur définit un homomorphisme d'anneaux :

$$\theta : R = k[x]/(x^2 - x) \rightarrow M_r(A),$$

par  $\theta(x) = p$ . Puisque  $\overline{HC}_{2l}(R) \approx HC_{2l}(k) \approx k$  canoniquement [7], il existe un élément privilégié  $u_l$  de  $\overline{HC}_{2l}(R) \subset HC_{2l}(R)$ . L'image de  $u_l$  par l'homomorphisme composé :

$$HC_{2l}(R) \rightarrow HC_{2l}(M_r(A)) \xrightarrow{Tr} HC_{2l}(A),$$

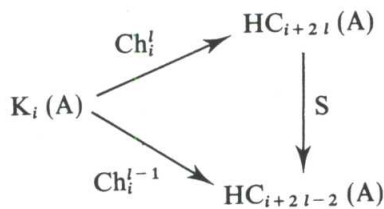
où Tr est la « trace », définit l'invariant cherché : on démontre qu'il ne dépend que de E et que c'est une fonction additive de E, donc induit bien un homomorphisme  $Ch_0^l : K_0(A) \rightarrow HC_{2l}(A)$ . Notons que le diagramme suivant commute :



Nous allons maintenant construire des invariants de la K-théorie algébrique « supérieure » :

$$D_i : K_i(A) \rightarrow H_i(A, A) \quad \text{et} \quad Ch_i^l : K_i(A) \rightarrow HC_{i+2l}(A).$$

Ici  $D_i$  est l'homomorphisme introduit par K. Dennis [4],  $Ch_i^0$  est l'homomorphisme composé  $K_i(A) \rightarrow H_i(A, A) \rightarrow HC_i(A)$  et les  $Ch_i^l$  rendent le diagramme suivant commutatif :



Pour cela, désignons par MA l'anneau des matrices infinies dont tous les coefficients sont nuls sauf un nombre fini et par  $G = GL(A)$  le groupe linéaire infini.

On a alors des isomorphismes de Morita induits par la trace :

$$HC_i(MA) \approx HC_i(A) \quad \text{et} \quad H_i(MA, MA) \approx H_i(A, A)$$

ainsi qu'un homomorphisme d'anneaux  $k[G] \xrightarrow{\varphi} \widetilde{MA}$ . L'homomorphisme de Dennis  $D_i$  est la composition des flèches suivantes :

$$K_i(A) = \pi_i(BG^+) \xrightarrow{h_i} H_i(G) \xrightarrow{\theta} H_i(k[G]) \xrightarrow{\varphi_*} H_i(\widetilde{MA}, \widetilde{MA}) \rightarrow H_i(A, A)$$

parmi lesquelles  $h_i$  est l'homomorphisme de Hurewicz,  $\varphi_*$  est induit par  $\varphi$  et  $\theta$  est induit par l'homomorphisme de complexes :

$$g_1 \otimes g_2 \otimes \dots \otimes g_n \mapsto (g_1 g_2 \dots g_n)^{-1} \otimes g_1 \otimes g_2 \otimes \dots \otimes g_n$$

considéré dans la Note précédente [6]. Pour définir  $Ch_i^l$  on remarque simplement que  $H_i(G)$  est un facteur direct *canonique* dans  $HC_{i+2l}(G)$  [6].

Au-delà de  $H_i(G)$  on peut donc aussi considérer la composition des homomorphismes :

$$K_i(A) \rightarrow H_i(G) \rightarrow HC_{i+2l}(G) \xrightarrow{\theta} HC_{i+2l}(k[G]) \xrightarrow{\varphi_*} HC_{i+2l}(\widetilde{MA}) \rightarrow HC_{i+2l}(A)$$

où  $\theta$  est aussi défini dans [6], paragraphe 2. Il est clair que les homomorphismes  $D_i$  et  $Ch_i^l$  satisfont aux propriétés requises.

II. — DÉFINITION SIMPLICIALE DES CLASSES CARACTÉRISTIQUES. — Nous allons reprendre ici le travail commencé dans [5] où  $A$  est maintenant une  $k$ -algèbre unitaire quelconque non nécessairement commutative mais en supposant quelques factorielles inversibles dans  $k$ . De manière plus précise, la méthode développée dans [5] se généralise sans peine à ce cadre à condition de considérer le complexe des formes différentielles *non commutatives*  $\Omega_* A$  défini dans [6]. Les « traces » prendront alors leurs valeurs dans :

$$\overline{\Omega_* A} = \Omega_* A / [\Omega_* A, \Omega_* A].$$

D'autre part, si  $E$  est un  $k$ -module et si  $1/n! \in k$ , les groupes de cohomologie  $H^p(X; E)$  où  $X$  est un ensemble simplicial, peuvent être calculés pour  $p \leq n$  par le complexe de De Rham-Sullivan des formes différentielles « simpliciales » de poids  $\leq n$  (cf. [1]), c'est-à-dire combinaisons linéaires à coefficients dans  $E$  d'éléments de la forme :

$$x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \quad \text{avec} \quad \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_m + p \leq n$$

( $x_0, x_1, \dots, x_m$  représentant les coordonnées barycentriques sur chaque simplexe de dimension  $m$ ). On désigne par  $\Omega^p(X, E)$  le  $k$ -module des formes différentielles de degré  $p$  et de poids  $\leq n$  (donc  $p \leq n$  aussi).

En suivant [5], considérons maintenant le bicomplexe  $\Omega^*(X, \overline{\Omega_* A})$  et le sous-complexe  $\mathcal{C}_A^*(X)$  défini par :

$$\mathcal{C}_A^{2r}(X) = \bigoplus_{\substack{p < q \\ p+q=2r}} \Omega^p(X, \overline{\Omega_q A}) \oplus Z^r(X, \overline{\Omega_r A})$$

$$\mathcal{C}_A^{2r+1}(X) = \bigoplus_{\substack{p < q \\ p+q=2r+1}} \Omega^p(X, \overline{\Omega_q A})$$

On notera  $\mathcal{H}_A^*(X)$  l'homologie de ce sous-complexe; elle se calcule par une variante du théorème de Künneth : pour  $r \leq n$ , on a une suite exacte scindée :

$$0 \rightarrow \bigoplus_{\substack{p+q=2r-1 \\ p < q}} \text{Ext}(H_p(X), \overline{H}_q(A)) \rightarrow \mathcal{H}_A^{2r}(X) \\ \rightarrow \bigoplus_{p+q=2r} \text{Hom}(H_p(X), \overline{H}_q(A)) \oplus \text{Hom}(H_r(X), \overline{Z}_r(A)) \rightarrow 0.$$

A tout A-fibré plat E sur X de fibre  $A^s$ , on a associé dans [5] un caractère de Chern  $\text{Ch}_r(E) \in \mathcal{H}_A^{2r}(X)$ . En particulier, si X est une sphère homologique de dimension p, on en déduit un homomorphisme de  $\mathbb{Z} \approx H_p(X)$  dans  $\overline{H}_q(A)$  pour  $p \leq q$  qui peut être défini par « intégration » sur les simplexes de dimension p de  $1/r! \text{Tr}(Rr)$  où R est la forme de courbure [5]. D'après la description de la K-théorie algébrique en termes de fibrés plats [5], on en déduit un homomorphisme :

$$K_i(A) \rightarrow \overline{H}_{i+2l}(A)$$

(en posant  $p=i$  et  $q=i+2l$ ) qui est bien défini pour  $i+l \leq n$ .

Supposons maintenant que A soit une algèbre augmentée. Dans ce cas :

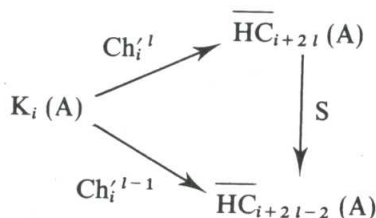
$$\overline{H}_{i+2l}(A) \approx \text{Ker}(\overline{\text{HC}}_{i+2l}(A) \rightarrow H_{i+2l+1}(A, A)) \quad ([2], [6]).$$

On en déduit un homomorphisme :

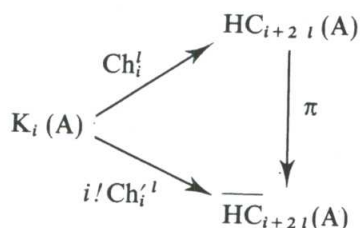
$$\text{Ch}'_i{}^l: K_i(A) \rightarrow \overline{\text{HC}}_{i+2l}(A),$$

avec  $\text{Ch}'_i{}^l = 0$  pour  $l < 0$ .

THÉORÈME. — Supposons  $n!$  inversible dans k. Alors les homomorphismes  $\text{Ch}'_i{}^l$  sont bien définis pour  $i+l \leq n$  et rendent le diagramme suivant commutatif :



En outre, le diagramme suivant est commutatif :



où  $\text{Ch}'_i{}^l$  est défini dans le paragraphe 1 et où  $\pi$  est la projection canonique de l'homologie cyclique sur l'homologie cyclique réduite.

La démonstration de ce théorème est trop technique pour être reproduite intégralement ici. Mentionnons simplement que les formules décrivant  $\text{Ch}_r(E)$  (cf. [5]) ne font intervenir que les « différentielles logarithmiques »  $g_{ki}^{-1} dg_{ki}$  des fonctions de transition  $g_{ki}$  de E. Ceci montre que dans les diverses factorisations permettant de définir  $\text{Ch}'_i{}^l$  et  $\text{Ch}'_i{}^{l-1}$  l'ingrédient

