

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *K*-théorie multiplicative. Note de **Max Karoubi**, présentée par Alain Connes.

Soit  $X$  une variété différentiable munie d'une filtration de son complexe de De Rham. Nous lui associons ici une « *K*-théorie multiplicative »  $\mathcal{K}(X)$ , réceptacle de classes caractéristiques primaires et secondaires de fibrés vectoriels munis de structures géométriques attachées à la filtration. Plus généralement, nous définissons un espace  $\mathcal{K}_X$  dont les groupes d'homotopie  $\mathcal{K}_n(X)$  [avec  $\mathcal{K}_0(X) \approx \mathcal{K}(X)$ ] sont reliés aux groupes de *K*-théorie algébrique et topologique de Grothendieck, Atiyah-Hirzebruch et Quillen.

DIFFERENTIAL GEOMETRY. — Multiplicative *K*-theory.

Let  $X$  be a differential manifold with a filtration of its De Rham complex. We associate to it a "multiplicative *K*-theory"  $\mathcal{K}(X)$  which is a target for primary and secondary characteristic classes for vector bundles with geometric structures linked to the filtration. More generally, we define a space  $\mathcal{K}_X$  whose homotopy groups  $\mathcal{K}_n(X)$  [with  $\mathcal{K}_0(X) \approx \mathcal{K}(X)$ ] are related to the algebraic and topological *K*-theory groups of Grothendieck, Atiyah-Hirzebruch and Quillen.

I. DÉFINITION DE LA *K*-THÉORIE MULTIPLICATIVE. — Soit  $X$  une variété différentiable ayant un nombre fini de composantes connexes et soit  $F^r = F^r(\Omega^*(X))$  une filtration décroissante de son complexe de De Rham. On suppose ici que les formes différentielles sont à coefficients réels ou complexes, que  $d(F^r) \subset F^r$  et enfin que  $F^0 = \Omega^*(X)$ . Soit maintenant  $E$  un fibré vectoriel de base  $X$  défini par des fonctions de transition

$$g_{ji} : U_i \cap U_j \rightarrow GL_n(k) \quad (k = \mathbf{R} \text{ ou } \mathbf{C}),$$

$(U_i)$  étant un recouvrement ouvert trivialisant de  $E$ . Rappelons qu'une connexion  $D$  sur  $E$  est définie par des matrices  $\Gamma_i$  de formes différentielles sur  $U_i$  telles que :

$$\Gamma_i = g_{ji}^{-1} \Gamma_j g_{ji} + g_{ji}^{-1} dg_{ji} \quad \text{sur } U_i \cap U_j$$

que sa courbure est définie par les matrices  $R_i = d\Gamma_i + \Gamma_i^2$  et qu'on a :

$$R_i = g_{ji}^{-1} R_j g_{ji}.$$

Le caractère de Chern  $Ch_r(E, D)$  de  $E$  muni de la connexion  $D$  est défini localement par  $(1/r!) \text{Trace}(R_i^r)$  avec les conventions de [5].

En outre, si  $D^0$  et  $D^1$  sont deux connexions sur  $E$ ,  $Ch_r(D^1) - Ch_r(D^0)$  est la différentielle d'une forme canonique  $\theta_r(D^0, D^1)$  définie par :

$$\theta_r(D^0, D^1) = \int_{t=0}^1 Ch_r(D^t),$$

où  $D^t = (1-t)D^0 + tD^1$ .

DÉFINITION. — Un fibré multiplicatif attaché à la filtration  $F^r$  est un triple  $\xi = (E, D, \omega)$  où  $E$  est un fibré vectoriel,  $D$  une connexion sur  $E$  et :

$$\omega = \sum \omega_r \quad \text{où } \omega_r \in \Omega^{2r-1}(X)$$

telle que :

$$Ch_r(D) \equiv d\omega_r \quad \text{mod. } F^r(\Omega^{2r}(X)) + B^{2r}(X)$$

[ $B^*(X)$  désignant l'ensemble des formes différentielles exactes].

Deux fibrés multiplicatifs

$$\xi^0 = (E^0, D^0, \omega^0) \quad \text{et} \quad \xi^1 = (E^1, D^1, \omega^1),$$

sont dits équivalents s'il existe un isomorphisme  $\alpha : E^0 \rightarrow E^1$  tel que :

$$\omega_r^1 - \omega_r^0 \equiv \theta_r(D^0, \alpha^* D^1) \pmod{B^{2r-1}(X)}.$$

L'ensemble des classes d'équivalence de fibrés multiplicatifs forme un monoïde abélien pour la somme de Whitney des fibrés. On notera  $\mathcal{K}(X)$  son groupe symétrisé. Si  $K^{top}(X)$  désigne le groupe de Grothendieck-Atiyah-Hirzebruch construit à l'aide du monoïde des classes d'isomorphie de fibrés différentiables, on a un homomorphisme d'oubli évident  $u$  de  $\mathcal{K}(X)$  vers  $K^{top}(X)$ .

THÉORÈME. — On a une suite exacte :

$$K_1^{top}(X) \xrightarrow{\sigma_1} \bigoplus_r H^{2r-1}(\Omega^*(X)/F^r) \xrightarrow{\hat{\sigma}} \mathcal{K}(X) \xrightarrow{u} K^{top}(X) \xrightarrow{\sigma} \bigoplus_r H^{2r}(\Omega^*(X)/F^r).$$

Dans cette suite exacte,  $\sigma$  est induit par le caractère de Chern usuel,  $K_1^{top}(X)$  est le groupe formé des classes d'homotopie d'applications différentiables de  $X$  dans  $GL(k)$ . Si  $\alpha : X \rightarrow GL(k)$ ,  $\sigma_1(\alpha)$  est la classe de la forme différentielle  $c_r \text{Trace}(\alpha^{-1} d\alpha)^{2r-1}$  où  $c_r$  est la constante rationnelle  $(r-1)/(2r-1)!$

II. DÉFINITION DES CLASSES CARACTÉRISTIQUES. — Dans ce paragraphe on suppose que la filtration satisfait à la condition supplémentaire  $F^r F^s \subset F^{r+s}$ . Un fibré vectoriel est alors dit attaché à la filtration s'il est défini par des fonctions de transition  $g_{ji}$  dont les différentielles  $dg_{ji}$  ont leurs coefficients dans  $F^1$ . Si  $E$  et  $E'$  sont deux tels fibrés, un morphisme  $\alpha : E \rightarrow E'$  est défini par des matrices  $(\alpha_i)$  telles que  $g'_{ji} \alpha_i = \alpha_j g_{ji}$  avec des notations évidentes et  $d\alpha_i \in F^1$ . On vérifie aisément qu'on a bien défini ainsi une sous-catégorie  $\mathcal{C}$  de la catégorie des fibrés vectoriels.

Exemples. — Si  $F^r = 0$  pour  $r > 0$ , la catégorie  $\mathcal{C}$  est équivalente à celle des fibrés plats. Plus généralement, si  $F^r$  est la filtration associée à un feuilletage,  $\mathcal{C}$  est équivalente à la catégorie des fibrés feuilletés.

Si  $X$  est une variété analytique et si  $F^r$  est la filtration de Hodge,  $\mathcal{C}$  est équivalente à la catégorie des fibrés analytiques.

Si  $E$  est un objet de  $\mathcal{C}$ , une connexion  $D$  sur  $E$  sera dite compatible avec la filtration si la matrice  $\Gamma_i$  de la connexion appartient à  $F^1$ . Tout fibré attaché à la filtration peut être muni d'une telle connexion : il suffit de poser

$$\Gamma_i = \sum \lambda_j(x) g_{ji}^{-1} dg_{ji}$$

où  $(\lambda_j)$  est une partition de l'unité associée au recouvrement  $(U_j)$ . On remarquera que le triple  $\xi = (E, D, 0)$  définit un fibré multiplicatif en général.

THÉORÈME. — La classe  $[E]$  de  $\xi$  dans le groupe  $\mathcal{K}(X)$  est indépendante du choix de la connexion  $D$  attachée à la filtration. Si

$$0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow E'' \rightarrow 0$$

est une suite exacte dans  $\mathcal{C}$ , on a la relation  $[E] = [E'] + [E'']$ .

III. STRUCTURE MULTIPLICATIVE DE LA  $K$ -THÉORIE MULTIPLICATIVE. — Supposons toujours que  $F^r F^s \subset F^{r+s}$  et considérons deux fibrés multiplicatifs :

$$\xi = (E, D, \omega) \quad \text{et} \quad \xi' = (E', D', \omega').$$

Posons :

$$\text{Ch } D = d\omega + \alpha \quad \text{et} \quad \text{Ch } D' = d\omega' + \alpha'$$

où  $\alpha$  et  $\alpha'$  appartiennent à la filtration. On définit leur produit tensoriel  $\xi'' = \xi \otimes \xi'$

comme le fibré multiplicatif  $(E'', D'', \omega'')$  avec :

$$E'' = E \otimes E', \quad D'' = D \otimes 1 + 1 \otimes D', \quad \omega'' = \omega \wedge d\omega' + \alpha \wedge \omega' + \omega \wedge \alpha'.$$

THÉORÈME. — *Le produit tensoriel des fibrés multiplicatifs induit une structure d'anneau commutatif sur le groupe  $\mathcal{H}(X)$ .*

Afin de mieux formaliser le produit ci-dessus, considérons le groupe intermédiaire  $\Gamma(X)$  suivant : il est formé des couples  $(u, \omega)$  où  $u$  est une somme de formes différentielles fermées de degrés pairs sur  $X$  et  $\omega$  une somme de formes de degrés impairs définie mod.  $B^*(X)$  telles que  $u \equiv d\omega$  mod. la filtration. On peut alors définir un « cup-produit » sur  $\Gamma(X)$  par la formule :

$$(u, \omega) \cup (u', \omega') = (u \wedge u', \omega \wedge d\omega' + \omega \wedge \alpha' + \alpha \wedge \omega').$$

On peut aussi y définir des « opérations d'Adams »  $\psi^k$  en posant :

$$\psi^k(u, \omega) = (k^n u, k^n \omega),$$

si  $u$  est de degré  $2n-1$  : ces opérations vérifient les relations usuelles

$$\psi^k(x+y) = \psi^k(x) + \psi^k(y), \quad \psi^k(xy) = \psi^k(x)\psi^k(y)$$

et :

$$\psi^k(\psi^l(x)) = \psi^{kl}(x).$$

Par des considérations purement algébriques, on en déduit une structure de  $\lambda$ -anneau sur le groupe  $\Gamma(X)$ , donc sur  $\mathcal{H}(X)$ , l'homomorphisme canonique  $\mathcal{H}(X) \rightarrow K^{top}(X)$  étant un homomorphisme de  $\lambda$ -anneaux.

IV. ESPACE CLASSIFIANT DE LA  $K$ -THÉORIE MULTIPLICATIVE ET LES GROUPES  $\mathcal{H}_n(X)$ . — Dans ce paragraphe, on suppose que  $F^r \Omega^*(X)$  est un sous-espace fermé de  $\Omega^*(X)$  (donc Fréchet nucléaire), ce qui est le cas des exemples cités dans le paragraphe II.

Si  $\Delta^s$  désigne le  $s$ -simplexe standard, on munit  $\Omega^*(\Delta^s \times X) = \Omega^*(\Delta^s) \hat{\otimes} \Omega^*(X)$  de la filtration (notée encore  $F^r$ ) définie par  $\Omega^*(\Delta^s) \hat{\otimes} F^r \Omega^*(X)$ . On définit  $\Omega^*(\Delta^s \times X; F^r)$  comme le quotient de  $\Omega^*(\Delta^s \times X)$  par cette filtration (ce quotient s'explique aisément sans le recours du produit tensoriel topologique pour les exemples cités plus haut).

Enfin, on définit des groupes abéliens simpliciaux  $\tilde{Z}_X^n$  et  $Z_X^n$  par les formules :

$$s \mapsto Z^n(\Delta^s \times X) \quad \text{et} \quad s \mapsto Z^n(\Delta^s \times X; F^r),$$

où les  $Z^n$  désignent les cocycles de degrés  $n$  des complexes en question.

Si on considère de même les groupes abéliens simpliciaux  $\tilde{\Omega}_X^n$  et  $\Omega_X^n$  définis respectivement par :

$$s \mapsto \Omega^n(\Delta^s \times X) \quad \text{et} \quad s \mapsto \Omega^n(\Delta^s \times X; F^r),$$

on peut définir des fibrations de Kan :

$$\tilde{\Omega}_X^{n-1} \xrightarrow{d} \tilde{Z}_X^n \quad \text{et} \quad \Omega_X^{n-1} \xrightarrow{d} Z_X^n,$$

d'espaces totaux contractiles (cf. [2]). Soit maintenant  $G_X$  le groupe topologique formé des applications différentiables de  $X$  dans  $GL(k)$ . L'espace classifiant  $BG_X$  peut être vu comme la réalisation géométrique du classifiant du groupe simplicial  $s \mapsto C^\infty(\Delta^s \times X, GL(k))$ . En appliquant la technique des fibrés simpliciaux repérés décrite dans [6], on peut réaliser le caractère de Chern comme une application simpliciale  $BG_X \rightarrow \Pi \tilde{Z}_X^{2r}$ . On note  $\gamma$  l'application composée de la précédente avec l'application

