436

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *K-théorie multiplicative et homologie cyclique.* Note de **Max Karoubi**, présentée par Alain Connes.

Nous définissons en géométrie différentielle non commutative [1] l'analogue $\mathscr{K}_r(A)$ (pour une algèbre topologique localement convexe A) de la K-théorie multiplicative introduite dans une Note précédente [8]. L'homomorphisme $K_r(A) \to K_r^{top}(A)$ de la K-théorie algébrique de Quillen vers la K-théorie topologique se factorise à travers $\mathscr{K}_r(A)$.

DIFFERENTIAL GEOMETRY. — Multiplicative K-theory and cyclic homology.

In non commutative differential geometry [1] *we define a group* $\mathscr{K}_r(A)$ (*for any locally convex algebra* A) *which is analogous to the multiplicative* K-*theory introduced in a previous Note* [8]. *The homomorphism* $K_r(A) \to K_r^{top}(A)$ *from the algebraic* K-*theory of Quillen to topological* K-*theory can be factorised through* $\mathscr{K}_r(A)$.

I. UNE DÉFINITION DE L'HOMOLOGIE CYCLIQUE EN TERMES DE FORMES DIFFÉRENTIELLES NON COMMUTATIVES. — Considérons d'abord une k-algèbre A, k étant un anneau commutatif quelconque tel que k soit facteur direct dans A (en tant que k-module) et tel que $k \supset \mathbb{Q}$. Soit $\Omega_*(A)$ l'algèbre graduée universelle des formes différentielles non commutatives sur A ([1], [4], [6]). En particulier, $\Omega_n(A)$ s'identifie à $A \otimes A/k \otimes \ldots \otimes A/k$ (n facteurs A/k), ses éléments s'écrivant formellement comme combinaison linéaire de « formes différentielles non commutatives » $a_0\,da_1 \ldots da_n$ avec la règle de calcul $d(xy) = x\,.\,dy + dx\,.\,y$. Soit $\bar{\Omega}_*(A)$ le quotient de $\Omega_*(A)$ par le k-module $[\Omega_*(A), \Omega_*(A)]$ engendré par les commutateurs gradués. L'homologie de Hochschild $H_*(A, A)$ peut s'identifier à l'homologie du complexe

$$\ldots \to \Omega_{n+1}(A) \to \Omega_n(A) \xrightarrow{b} \Omega_{n-1}(A) \to \ldots$$

où $b(\omega\,.\,dx) = (-1)^n(x\omega - \omega x)$, avec $x \in A = \Omega_0(A)$ et $\omega \in \Omega_{n-1}(A)$. Définissons $\tilde{\Omega}_n(A) = \bar{\Omega}_n(A)$ si $n \geqq 1$ et $\tilde{\Omega}_0(A) = \Omega_0(A)/k$.

THÉORÈME. — *L'homomorphisme canonique* $H_n(A, A) \to \bar{\Omega}_n(A)$ *est injectif. Pour* $n \geqq 1$, *l'homologie en degré* $n-1$ *du complexe*

$$0 \to \tilde{\Omega}_0(A) \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \tilde{\Omega}_{n-1}(A) \xrightarrow{d} \bar{\Omega}_n(A)/H_n(A, A)$$

est isomorphe à l'homologie cyclique réduite ([1], [9]) $\overline{HC}_{n-1}(A)$.

Remarque bibliographique. — Ce théorème est l'analogue en homologie cyclique d'un théorème d'A. Connes en cohomologie cyclique (comparer avec [1], théorème 33). L'intérêt du complexe $(\bar{\Omega}_*(A), d)$ en K-théorie algébrique (notamment pour la définition du caractère de Chern) a été montré indépendamment dans [4].

Supposons maintenant que $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et que A soit une k-algèbre topologique localement convexe. En remplaçant les produits tensoriels précédents par les produits tensoriels projectifs au sens de Grothendieck [3], on peut définir le complexe de De Rham topologique universel $\Omega_*^{top}(A)$ par la formule $\Omega_n^{top}(A) = A \hat{\otimes} A/k \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} A/k$. De même, $\bar{\Omega}_*^{top}(A)$ sera défini comme le quotient de $\Omega_*^{top}(A)$ par *l'adhérence* de $[\Omega_*^{top}(A), \Omega_*^{top}(A)]$. Dans ce cas, l'image de $d : \bar{\Omega}_*^{top}(A) \to \bar{\Omega}_*^{top}(A)$ est fermée. Le théorème précédent s'étend au cadre topologique en un sens évident : l'homologie de Hochschild topologique $H_n^{top}(A, A)$ (quotient de Ker b par l'adhérence de Im b) est un sous-espace vectoriel de

0249-6291/86/03030507 $ 2.00 © Académie des Sciences

$\bar{\Omega}_n^{\text{top}}(A)$; l'homologie en degré $n-1$ du complexe

$$0 \to \breve{\Omega}_0^{\text{top}}(A) \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \breve{\Omega}_{n-1}^{\text{top}}(A) \to \bar{\Omega}_n^{\text{top}}(A)/H_n^{\text{top}}(A, A)$$

est isomorphe à l'homologie cyclique réduite topologique $\overline{HC}_{n-1}^{\text{top}}(A)$ si $n \geqq 1$ (avec $\breve{\Omega}_n^{\text{top}} = \bar{\Omega}_n^{\text{top}}$ si $n \geqq 1$ et $\breve{\Omega}_0^{\text{top}} = \bar{\Omega}_0^{\text{top}}/k$).

A partir de maintenant, toutes les homologies considérées : cyclique, de Hochschild, etc. seront supposées topologiques séparées.

Pour alléger les notations, on écrira désormais $HC_n(A)$, $\Omega_n(A)$, etc. au lieu de $HC_n^{\text{top}}(A)$, $\Omega_n^{\text{top}}(A)$, etc.

II. Définition des groupes de K-théorie multiplicative $\mathscr{K}_r(A)$. — Pour toute k-algèbre topologique localement convexe A, on peut définir les groupes de K-théorie topologique $K_r^{\text{top}}(A)$ comme les groupes d'homotopie $\pi_r(K_0(A) \times BGL(A_*))$ où A_* est l'anneau simplicial défini par $A_n = C^\infty(\Delta^n) \hat{\otimes} A$. Plus généralement, si X est un ensemble simplicial, le groupe $K_A^{\text{top}}(X)$ est l'ensemble des classes d'homotopie d'applications simpliciales de X dans l'espace de Kan $K_0(A) \times BGL(A_*)$; si $|X|$ est fini, c'est aussi le groupe de Grothendieck de la catégorie des fibrés repérés sur X [7] de fibre un A-module projectif de type fini. Si A est une algèbre de Banach, on retrouve les définitions usuelles [5]. En particulier, $K_r^{\text{top}}(A) \approx K_{r+2}^{\text{top}}(A)$ si $k = \mathbb{C}$ et $K_r^{\text{top}}(A) \approx K_{r+8}^{\text{top}}(A)$ si $k = \mathbb{R}$ (périodicité de Bott). A partir de maintenant, X désignera un ensemble simplicial tel que $|X|$ soit fini.

Considérons le complexe $\Omega_A^*(X) = \Omega^*(X; \breve{\Omega}_*(A))$ déjà introduit dans [4] et [7] et constitué des formes différentielles C^∞ sur X (au sens de Sullivan) à valeurs dans $\breve{\Omega}_*(A)$. Définissons une filtration sur ce complexe en posant $F^n(\Omega_A^*(X)) = \Omega^*(X; F^n(\breve{\Omega}_*(A)))$ où $F^n(\breve{\Omega}_*(A))$ est le sous-complexe suivant de $\breve{\Omega}_*(A)$:

$$0 \to \ldots \to H_n(A, A) \to \breve{\Omega}_{n+1}(A) \to \breve{\Omega}_{n+2}(A) \to \ldots$$

$H_n(A, A)$ étant placé en degré n $(n \geqq 1)$. En suivant [8], on définira un « A-fibré multiplicatif d'ordre r » sur X comme un triple (E, D, ω) où E est un A-fibré repéré sur X de fibre un A-module projectif de type fini, D une A-connexion sur E ([4], [7]) et $\omega \in \Omega_A^{2r-1}(X)$ telle que $d\omega \equiv \mathrm{Ch}_r(D) \bmod. F^r = F^r(\breve{\Omega}_A^*(X))$ (*cf.* [1], [4] et [7] pour la définition explicite du caractère de Chern Ch_r dans le contexte non commutatif).

Avec les notations de [8] on dira que deux fibrés multiplicatifs $\xi^0 = (E^0, D^0, \omega^0)$ et $\xi^1 = (E^1, D^1, \omega^1)$ sont équivalents s'il existe un isomorphisme $\alpha: E^0 \to E^1$ tel que $\omega^1 - \omega^0 \equiv \Theta_r(D^0, \alpha^* D^1) \bmod. B_A^{2r-1}(X) + F^r(\Omega_A^*(X))$. On désignera par $\mathscr{K}_A^{(2r)}(X)$ le groupe symétrisé du monoïde abélien formé des classes d'équivalence de fibrés multiplicatifs.

Théorème. — *On a la suite exacte*

$$K_A^{-1\,\text{top}}(X) \to \bigoplus_{i+j=2r-1} H^i(X; H_j(\breve{\Omega}_*(A)/F^r) \to \mathscr{K}_A^{(2r)}(X) \to K_A^{\text{top}}(X)$$
$$\to \bigoplus_{i+j=2r} H^i(X; H_j(\breve{\Omega}_*(A)/F^r)).$$

Dans cette suite exacte, $K_A^{-1\,\text{top}}(X) \approx [X, GL(A_*)]$ et les homomorphismes sont définis par des formules analogues à celles de [8].

En particulier, si X est la sphère S^r et si $B = A^+$ où A^+ désigne l'algèbre A augmentée d'un élément unité, on pose

$$\breve{\mathscr{K}}_r(B) = \mathrm{Coker}(\mathscr{K}_B^{(2r)}(\mathrm{Point}) \to \mathscr{K}_B^{(2r)}(S^r))$$

et

$$\mathcal{K}_r(A) = \operatorname{Coker}(\breve{\mathcal{K}}_r(k) \to \breve{\mathcal{K}}_r(A^+)).$$

La suite exacte précédente peut alors s'écrire

$$K_{r+1}^{\mathrm{top}}(A) \to HC_{r-1}(A) \to \mathcal{K}_r(A) \to K_r^{\mathrm{top}}(A) \to HC_r(A)/\mathrm{Im}(H_r(A, A)).$$

Supposons maintenant que la suite

$$H_r(A, A) \to HC_r(A) \to HC_{r-2}(A)$$

soit exacte [hypothèse notée (H_r)]. On en déduit la suite exacte

$$K_{r+1}^{\mathrm{top}}(A) \to HC_{r-1}(A) \to \mathcal{K}_r(A) \to K_r^{\mathrm{top}}(A) \to HC_{r-2}(A). \tag{S}$$

Remarques. — La notation $\mathcal{K}_r(A)$ est empruntée à Graeme Segal qui a défini des groupes analogues s'insérant dans des suites exactes du type (S). Cependant, j'ignore si sa définition coïncide avec celle-ci. D'autre part, l'hypothèse (H_r) est vérifiée si $A = C^\infty(M)$, M variété compacte, d'après les calculs duaux de ceux effectués dans [1], toutes les homologies considérées étant alors séparées.

III. Relation avec les groupes K_r de Quillen.

Théorème. — *L'homomorphisme* $K_r(A) \to K_r^{\mathrm{top}}(A)$ *de la* K-*théorie algébrique de Quillen* [10] *vers la* K-*théorie topologique se factorise naturellement à travers le groupe* $\mathcal{K}_r(A)$

$$\begin{tikzcd} K_r(A) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathcal{K}_r(A) \arrow[dl] \\ & K_r^{\mathrm{top}}(A). & \end{tikzcd}$$

Théorème. — *On a le diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} K_{r+1}^{\mathrm{top}}(A) \arrow[r] \arrow[d, equal] & K_r^{\mathrm{rel}}(A) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Ch}_r^{\mathrm{rel}}"] & K_r(A) \arrow[r] \arrow[d] & K_r^{\mathrm{top}}(A) \arrow[r] \arrow[d, equal] & K_{r-1}^{\mathrm{rel}}(A) \arrow[d] \\ K_{r+1}^{\mathrm{top}}(A) \arrow[r] \arrow[d] & HC_{r-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{K}_r(A) \arrow[r] \arrow[d] & K_r^{\mathrm{top}}(A) \arrow[r] \arrow[d] & HC_{r-2}(A) \arrow[d, equal] \\ HC_{r+1}(A) \arrow[r] & HC_{r-1}(A) \arrow[r] & H_r(A, A) \arrow[r] & HC_r(A) \arrow[r] & HC_{r-2}(A) \end{tikzcd}$$

où le « caractère de Chern relatif » $\mathrm{Ch}_r^{\mathrm{rel}}$ *est défini dans* [2] *et où la dernière suite (peut-être non exacte) est définie dans* [1].

Exemple. — Soit X une variété C^∞ et soit A l'algèbre des fonctions C^∞ sur X. Alors le groupe $\mathcal{K}_r(A)$ est isomorphe au groupe noté $\mathcal{K}_r(X)$ d'une Note précédente [8] où la filtration sur $\Omega^*(X)$ est la filtration « bête » définie par

$$F^r(\Omega^n(X)) = \Omega^n(X) \quad \text{si } r \leqq n \qquad \text{et} \qquad 0 \text{ sinon}$$

(ceci est une terminologie admise par les spécialistes de théorie de Hodge). Si on considère plus particulièrement le cas où $X = S^1$ et $k = \mathbb{C}$, l'homomorphisme $K_2(C^\infty(S^1)) \to \mathcal{K}_2(C^\infty(S^1)) \approx \mathbb{C}^*$ est associé à l'extension centrale de $SL(C^\infty(S^1))$ par $\mathbb{C}^*$ d'après [2].

Remarque. — La définition de la K-théorie multiplicative (ainsi que celle de l'homologie cyclique) peut être généralisée à une filtration quelconque d'une algèbre différentielle graduée topologique $\Omega_*(A)$ telle que $\Omega_0(A) = A$ (l'image dans $\bar{\Omega}_*(A)$ étant fermée). Ainsi, dans l'exemple précédent il est plus naturel de considérer le complexe

$$\Omega_i(A) = \Omega^i(X) \oplus \Omega^{i-2}(X) \oplus \Omega^{i-4}(X) \oplus \ldots$$