TRANSACTIONS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 347, Number 11, November 1995

FORMES DIFFERENTIELLES NON COMMUTATIVES ET COHOMOLOGIE A COEFFICIENTS ARBITRAIRES

MAX KAROUBI

ABSTRACT. The purpose of the paper is to promote a new definition of cohomology, using the theory of non commutative differential forms, introduced already by Alain Connes and the author in order to study the relation between K-theory and cyclic homology. The advantages of this theory in classical Algebraic Topology are the following:

A much simpler multiplicative structure, where the symmetric group plays an important role. This is important for cohomology operations and the investigation of a model for integral homotopy types (*Formes différentielles non commutatives et opérations de Steenrod*, Topology, to appear). These considerations are of course related to the theory of operads.

A better relation between de Rham cohomology (defined through usual differential forms on a manifold) and integral cohomology, thanks to a "non commutative integration".

A new definition of Deligne cohomology which can be generalized to manifolds provided with a suitable filtration of their de Rham complex.

In this paper, the theory is presented in the framework of simplicial sets. With minor modifications, the same results can be obtained in the topological category, thanks essentially to the Dold-Thom theorem (*Formes topologiques non commutatives*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., to appear).

A summary of this paper has been presented to the French Academy: CR Acad. Sci. Paris **316** (1993), 833–836.

Dans cet article, nous présentons la cohomologie *à coefficients arbitraires* des ensembles simpliciaux en termes de formes différentielles.

A priori, le sujet n'apparaît pas comme vraiment nouveau puisque, dans le même esprit, une présentation fut proposée dans les années 70 par A. Grothendieck [1] et E. Miller [10], après le travail de D. Quillen et D. Sullivan en cohomologie rationnelle.

Cependant, les avantages de la présentation adoptée ici, qui utilise de manière intensive les formes différentielles *non commutatives* et qui prolonge dans un certain sens l'article de H. Cartan sur le sujet [1], sont multiples. Tout d'abord, en spécialisant les anneaux simpliciaux de base, on retrouve à la fois *l'algèbre* des cochaînes usuelles et celle des formes différentielles (en faisant commuter les formes). Ainsi, est défini un "chapeau" commun aux formes différentielles usuelles et aux cochaînes (à coefficients *entiers*). Ceci permet de simplifier considérablement la définition de la cohomologie de Deligne-Beilinson (pour une variété C^∞ munie d'une filtration de son complexe de de Rham: cf. [6] et le §5).

Received by the editors August 9, 1994.
1991 *Mathematics Subject Classification*. Primary 55N35.

Par ailleurs, le complexe de de Rham non commutatif est filtré par le "poids" ou le "type" des formes différentielles non commutatives (fonctions du degré des polynômes impliqués dans les définitions). Nous montrons ici que le sous-complexe constitué des formes de poids $\leq r$ (resp. de type $\leq r$ avec $r \geq 1$) calcule la cohomologie en degrés $\leq r$ (resp. en degrés quelconques): ceci permet de réduire notablement la taille des formes non commutatives nécessaires pour les calculs (§§3 et 4).

Ceci étant dit, l'avantage essentiel de notre présentation se situe plutôt dans les symétries de la nouvelle algèbre de "cochaînes" ou de "formes" que nous introduisons ici. Par exemple, la non commutativité de la multiplication des formes différentielles fermées (ou cocycles) est contrôlée par une *action du groupe symétrique* $\mathfrak{S}_n$ (n étant différent suivant le degré). Cette action est homotopiquement équivalente à celle induite par la signature des permutations (2.12).

C'est ce controle précis de la non commutativité du cup-produit par une action homotopiquement équivalente à la signature qui fait l'originalité de notre présentation par des formes différentielles non commutatives (ou, ce qui revient au même, par des cochaînes "normalisées": cf. 2.11). Comme nous le montrerons dans un article suivant [7], cet aspect important de la théorie est responsable des opérations de Steenrod (pour la cohomologie à coefficients *arbitraires*). On peut aussi espérer que la mise en valeur de ces symétries au niveau des formes différentielles non commutatives est un premier pas (modeste) dans la direction d'un modèle "entier" des espaces, analogue au modèle rationnel de Quillen-Sullivan (cf. 1.12 et 2.16 par exemple).

Les spécialistes de la théorie des opérades reconnaitront ici des idées bien connues. La relation avec ces idées est plus transparente dans un article suivant celui-ci [7] et utilisant les mêmes techniques. De manière plus précise, il convient de se restreindre alors aux formes différentielles non commutatives "fermées": dans le langage[1] de P. May, les $\mathfrak{C}(j)$ sont alors des opérationes j-aires sur ces formes et l'action des divers groupes symétriques correspond à des changements d'ordre du produit de ces formes (cf. 1.12 par exemple).

Enfin, il convient de souligner que nous nous sommes placés ici dans un contexte simplicial pour plus de simplicité. En utilisant le théorème de Dold-Thom [4], il est possible de travailler dans un cadre purement topologique et d'y définir un complexe de de Rham non commutatif (avec action de groupes symétriques). Nous expliciterons ce point de vue dans une prochaine rédaction (à paraître aux Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.).

1. Formes differentielles non commutatives

1.1. Rappelons d'abord brièvement les définitions fondamentales de [2] et [5]. Soit k un anneau commutatif unitaire et soit A une k-algèbre (unitaire, mais non nécessairement commutative). On pose $\Omega^0(A) = A$ et $\Omega^1(A) = \operatorname{Ker}(A \otimes_k A \xrightarrow{m} A)$, où m est la multiplication. En fait, $\Omega^1(A)$ est un A-bimodule et d'autres bimodules, notés $\Omega^n(A)$, peuvent être définis par la for-

[1] Cf. par exemple l'article de I. Kriz et J.-P. May, *Operads, algebras, modules and motives* (à paraître).

mule

$$\Omega^n(A) = \Omega^1(A) \otimes_A \Omega^1(A) \otimes_A \cdots \otimes_A \Omega^1(A)$$

(produit tensoriel de n facteurs $\Omega^1(A)$, considérés comme A-modules à gauche ou à droite). La somme directe $\Omega^*(A)$ des $\Omega^n(A)$ est une k-algèbre de manière évidente. Par ailleurs, soit

$$d\colon \Omega^0(A) \to \Omega^1(A)$$

le k-homomorphisme défini par $d(z) = 1 \otimes \mathbf{z} - \mathbf{z} \otimes 1$. Il vérifie l'identité de Leibniz

$$d(xy) = d(x)y + xd(y).$$

Il s'étend en un homomorphisme k-linéaire de degré un et de carré nul de $\Omega^*(A)$ dans lui-même (noté encore d) qui vérifie l'identité de Leibniz généralisée[2]

$$d(\omega_n.\theta_p) = d(\omega_n).\theta_p + (-1)^n\omega_n.d\theta_p\,,$$

où ω_n est de degré n et θ_p de degré p. Ainsi, $\Omega^*(A)$ est munie d'une structure d'algèbre différentielle graduée. Ses éléments sont les formes différentielles "non commutatives".

1.2. Une présentation légèrment différente est la suivante (ce qui permet de caractériser la différentielle d sur $\Omega^n(A)$ pour $n > 0$): l'homomorphisme $(x, y) \mapsto x.dy$ induit un isomorphisme de $A \otimes_k A/k$ sur $\Omega^1(A)$. De même, $\Omega^n(A)$ s'identifie au produit tensoriel $A \otimes_k A/k \otimes_k A/k \otimes_k \cdots \otimes_k A/k$ (n facteurs A/k). Une forme différentielle non commutative s'interprète alors comme une combinaison linéaire de "symboles"

$$a^0.da^1.da^2.\cdots da^n\,,$$

dont la différentielle s'écrit simplement $1.da^0.da^1.da^2.\cdots da^n$. Le produit (noté #) de deux d'entre eux est déterminé par récurrence sur le degré du premier symbole grâce à la règle suivante:

$$(\omega.da)\#(x.\theta) = \omega\#d(ax).\theta - \omega\#(a.dx).\theta\,,$$

où a et x (resp. ω et θ) sont des éléments de A (resp. $\Omega^*(A)$).

1.3. Enfin, il convient de noter que $\Omega^*(A)$ est la solution d'un probléme universel: pour toute algèbre différentielle graduée Σ^* (non nécessairement commutative) et tout homomorphisme d'algèbres $f\colon A \to \Sigma^0$, il existe un unique homomorphisme d'algèbres différentielles graduées

$$f^*\colon \Omega^*(A) \to \Sigma^*$$

coïncidant avec f en degré 0.

1.4. Nous allons maintenant introduire d'autres types de "formes differentielles", permettant de réinterpréter ce qui précède. Posons $T^n(A) = A \otimes_k \cdots \otimes_k A$ ($n+1$ facteurs), soit encore $T^1(A) \otimes_A \cdots \otimes_A T^1(A)$ (n facteurs): ses éléments sont désignés comme les "formes différentielles étendues de degré n". Il est clair que $\Omega^n(A) = \Omega^1(A) \otimes_A \cdots \otimes_A \Omega^1(A)$, est un sous-$A$-bimodule de $T^n(A)$: c'est l'intersection des noyaux des k-homomorphismes

$$b_i\colon T^n(A) \to T^{n-1}(A)\,,$$

[2] d sera caractérisé en 1.2.

obtenus en faisant le produit de deux éléments de A consécutifs dans le k-produit tensoriel définissant $T^n(A)$. En outre, la somme directe $T^*(A)$ des $T^n(A)$ est une algèbre graduée de manière évidente, le produit[3] de $a_0 \otimes \cdots \otimes a_n$ par $b_0 \otimes \cdots \otimes b_m$ étant égal à $a_0 \otimes \cdots \otimes a_n b_0 \otimes \cdots \otimes b_m$. Celle-ci contient $\Omega^*(A)$ comme sous-algèbre.

L'application

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n) \mapsto a_0 da_1 da_2 \cdots da_n$$

induit un homomorphisme de k-modules

$$\phi\colon T^n(A) \to \Omega^n(A)$$

qui est inverse à gauche de l'homomorphisme d'inclusion

$$\gamma\colon \Omega^n(A) \to T^n(A).$$

Cependant, ϕ *n'est pas* un homomorphisme d'algèbres.

1.5. **Proposition.** *Posons*

$$\begin{aligned} D(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) &= (1 \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) \\ &\quad - (a_0 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes a_n) + \cdots + (-1)^n (a_0 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1). \end{aligned}$$

Alors $D^2 = 0$ *et les diagrammes suivants sont commutatifs*:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^n(A) & \xrightarrow{d} & \Omega^{n+1}(A) \\ {\scriptstyle\gamma}\downarrow & & {\scriptstyle\gamma}\downarrow \\ T^n(A) & \xrightarrow{D} & T^{n+1}(A) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} T^n(A) & \xrightarrow{D} & T^{n+1}(A) \\ {\scriptstyle\phi}\downarrow & & {\scriptstyle\phi}\downarrow \\ \Omega^n(A) & \xrightarrow{d} & \Omega^{n+1}(A) \end{array}.$$

Démonstration. La commutativité du deuxième diagramme résulte immédiatement des définitions. D'autre part, les opérateurs D et d vérifient les relations suivantes:

$$D(\theta_n \omega_p) = D(\theta_n)\omega_p + (-1)^n \theta_n D(\omega_p)$$

$$d(\theta_n \omega_p) = d(\theta_n)\omega_p + (-1)^n \theta_n d(\omega_p)$$

où les indices représentent les degrés. Puisque A et $\Omega^1(A)$ engendrent $\Omega^*(A)$, la commutativité du premier diagramme se déduit de la commutativité dans le cas où $n = 0$ et 1. Pour $n = 0$, c'est une conséquence immédiate des définitions. Pour $n = 1$, considérons un élément $\omega = f_0 df_1 \in \Omega^1(A)$. Nous pouvons écrire alors les identités suivantes:

$$\begin{aligned} &\gamma(f_0 df_1) = f_0(1 \otimes f_1 - f_1 \otimes 1) = f_0 \otimes f_1 - f_0 f_1 \otimes 1, \\ &D(\gamma(f_0 df_1)) = 1 \otimes f_0 \otimes f_1 - f_0 \otimes 1 \otimes f_1 + f_0 \otimes f_1 \otimes 1 - 1 \otimes f_0 f_1 \otimes 1, \\ &\gamma(d(f_0 df_1)) = \gamma(df_0 df_1) = (1 \otimes f_0 - f_0 \otimes 1)(1 \otimes f_1 - f_1 \otimes 1). \end{aligned}$$

La relation requise

$$D(\gamma(f_0 df_1)) = \gamma(d(f_0 df_1))$$

s'en déduit. La relation $D^2 = 0$ se démontre de la même manière.

[3]On pourra bien sûr remarquer l'analogie frappante avec le produit d'Alexander-Whitney des cochaînes. Cette analogie est expliquée plus loin (cf. 2.9).

1.6. **Proposition.** *Supposons que A soit une k-algèbre augmentée. Alors les suites*

$$T^0(A) \to T^1(A) \to \cdots \to T^n(A) \to \cdots$$

et

$$\Omega^0(A) \to \Omega^1(A) \to \cdots \to \Omega^n(A) \to \cdots$$

sont exactes. Les noyaux de D: $T^0(A) \to T^1(A)$ et d: $\Omega^0(A) \to \Omega^1(A)$ s'identifient à k.

Démonstration. Soit $\lambda: A \to k$ une augmentation. Nous définissons un "opérateur d'homotopie"

$$K: A^{\otimes(n+1)} \to A^{\otimes(n)}$$

par la formule:

$$K(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = (-1)^n a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}\lambda(a_n)$$

et par $K(a_0) = \lambda(a_0)$ sur le complexe augmenté. Un calcul immédiat montre que $DK + KD = 1$, ce qui démontre la première partie de la proposition. Par ailleurs, soit

$$b': \Omega^n(A) \to \Omega^{n-1}(A)$$

l'homomorphisme défini par la formule suivante:

$$b'(a_0 da_1 \cdots da_{n-1} da_n) = (-1)^{n-1} a_0 da_1 \cdots da_{n-1}(a_n - \lambda(a_n))$$

(noter que $a_n - \lambda(a_n)$ ne dépend que de la classe de a_n dans A/k si $n \geq 1$) et par $b'(a_0) = \lambda(a_0)$ sur le complexe augmenté. Alors b' est la restriction de K à $\Omega^n(A)$. Donc $b'.d + d.b'$ est aussi l'identité.

1.7. Posons quelques définitions:

Une forme différentielle étendue $\omega \in T^n(A) = A^{\otimes(n+1)}$ est dite *antisymétrique* pour l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_{n+1}$ si une permutation quelconque σ des éléments du produit tensoriel transforme ω en $\varepsilon(\sigma)\omega$, $\varepsilon(\sigma)$ désignant la signature de σ.

Soient b_i: $T^n(A) \to T^{n-1}(A)$ les homomorphismes de k-modules définis en considérant le produit de deux facteurs consécutifs $(i, i+1)$ du produit tensoriel, $i = 1, \ldots, n$. Alors ω est dite *normalisée* si elle appartient à l'intersection des noyaux des k-homomorphismes b_i.

1.8. **Definition.** Le k-module dont les éléments sont les formes différentielles antisymétriques et normalisées est noté $\Lambda^n(A)$. En particulier,

$$\Lambda^n(A) \subset \Omega^n(A) \subset T^n(A).$$

1.9. **Exemple.** Soit V un ensemble fini et soit $A = C(V)$ le k-module des fonctions sur V à valeurs dans k. Alors $T^n(A)$ s'identifie à $C(V^{n+1})$, k-module des fonctions sur le produit de $n+1$ copies de V, $\Omega^n(A)$ est le sous k-module formé des fonctions $f(v_0, \ldots, v_n)$ qui sont égales à 0 si deux arguments consécutifs v_i et v_{i+1} sont égaux. Enfin, $\Lambda^n(A)$ est le sous k-module de $\Omega^n(A)$ formé des fonctions antisymétriques.

1.10. *Remarque importante.* Le k-module $\Lambda^*(A) = \oplus\Lambda^n(A)$ n'est pas une sous-algèbre de $\Omega^*(A)$, car le produit dans $\Omega^*(A)$ ne laisse pas stable $\Lambda^*(A)$.

1.11. **Proposition.** *La différentielle* $d\colon \Omega^n(A) \to \Omega^{n+1}(A)$ *induit un homomorphisme de* k*-modules*

$$d\colon \Lambda^n(A) \to \Lambda^{n+1}(A).$$

En outre, si A *est une algèbre augmentée, le complexe correspondant*

$$\Lambda^0(A) \to \Lambda^1(A) \to \cdots \to \Lambda^n(A) \to \Lambda^{n+1}(A) \to \cdots$$

est acyclique et $\operatorname{Ker} d\colon \Lambda^0(A) \to \Lambda^1(A)$ *s'identifie à* k.

Démonstration. Soit $\omega = \sum_i a_0^i \otimes a_i^1 \otimes \cdots \otimes a_n^i$ un élément de $\Lambda^n(A)$ que nous noterons pour simplifier $a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$. Alors $d(\omega)$ s'écrit

$$\begin{aligned}&1 \otimes a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n - a_0 \otimes 1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n\\ &\qquad + a_0 \otimes a_1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes a_n + \cdots + (-1)^{n+1} a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1.\end{aligned}$$

La permutation $(i, i+1)$ change le signe de la somme des deux termes d'indices $(i, i+1)$, ainsi que celui de chacun des autres termes. Puisque le groupe symétrique est engendré par les transpositions de deux termes consécutifs, $d(\omega)$ est bien antisymétrique. Par ailleurs, la somme des deux premiers termes consécutifs donne évidemment 0 (distinguer les deux premiers termes de la somme précédente et les autres). Ceci démontre la première partie de la proposition.

Soit $K\colon T^{n+1}(A) \to T^n(A)$ l'opérateur d'homotopie défini en 1.6 et associé à une augmentation $\lambda\colon A \to k$. Pour achever la démonstration de la proposition, il suffit de montrer que K induit une application $\Lambda^{n+1}(A) \to \Lambda^n(A)$. Par définition, nous avons l'identité $K(\omega) = K(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_{n+1}) = a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \lambda(a_{n+1})$. Il est clair que $K(\omega)$ est normalisé: si on calcule par exemple $a_{n-1} a_n \lambda(a_{n+1})$, on trouve l'image de $t = a_{n-1} \otimes a_n \otimes a_{n+1}$ par la composition des deux homomorphismes $t \mapsto a_{n-1} a_n \otimes a_{n+1}$ et $a \otimes b \mapsto a.\lambda(b)$ et le premier donne 0. De même, la permutation des facteurs a_{n-1} et $a_n \lambda(a_{n+1})$ revient à celle de a_{n-1} et a_n. Ainsi $K(\omega) \in \Lambda^n(A)$, ce qui achève la démonstration de la proposition.

1.12. Sur le sous k-module $Z^n(A)$ de $\Omega^n(A)$ dont les éléments sont les formes fermées de $\Omega^n(A)$, le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ opère à droite par la formule suivante

$$\omega^\sigma = da_{\sigma(1)}.da_{\sigma(2)}.\cdots da_{\sigma(n)}$$

si $\omega = da_1.da_2.\cdots da_n \in Z^n(A) = B^n(A)$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Le lemme suivant sera important dans [7] (cf. aussi 2.14).

1.13. **Lemme.** *L'action du groupe symétrique sur le sous-module des cycles de degré* n *du complexe* $\Lambda^*(A) \subset \Omega^*(A)$ *est donnée par la signature des permutations.*

Démonstration. Soit $\omega = \sum_i a_0^i \otimes a_1^i \otimes \cdots \otimes a_n^i$ un élément de $\Lambda^n(A)$. Puisque $\Lambda^n(A) \subset \Omega^n(A)$ et que l'endomorphisme $J = \gamma.\phi$ de $T^*(A)$, où γ et ϕ sont définis en 1.4, est l'identité sur $\Omega^*(A)$, ω peut aussi s'écrire $\sum_i a_0^i \otimes da_1^i \otimes \cdots \otimes da_n^i$. L'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $Z^n(A)$ est donc induite par celle de $\mathfrak{S}_n$ sur les n dernières composantes du produit tensoriel définissant $T^n(A) = A^{\otimes(n+1)}$. Puisque ω est antisymétrique, le lemme en résulte .

2. Le theoreme principal. Structures multiplicatives et action du groupe symetrique

2.1. Soit A_s la k-algèbre quotient $k[x_0, x_1, \dots, x_s]/(x_0 + x_1 + \cdots + x_s - 1)$ et soit $\Omega^*(A_s)$ (resp. $T^*(A_s)$) l'algèbre des formes différentielles non commutatives (resp. étendues) sur A_s. Les $\Omega^*(A_s)$ et $T^*(A_s)$ sont des *k-algèbres* différentielles graduées simpliciales, la structure simpliciale étant induite par celle des A_s. Elles seront notées simplement Ω^* et T^*. On notera de même Λ^* le *k-module* gradué simplicial défini par $s \mapsto \Lambda^*(A_s)$.

2.2. **Proposition.** *Les suites d'applications k-linéaires simpliciales*

$$\Lambda^0 \xrightarrow{d} \Lambda^1 \xrightarrow{d} \Lambda^2 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Lambda^n \xrightarrow{d}$$

$$\Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \Omega^2 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^n \xrightarrow{d}$$

$$T^0 \xrightarrow{D} T^1 \xrightarrow{D} T^2 \xrightarrow{D} \cdots \xrightarrow{D} T^n \xrightarrow{D}$$

sont exactes. Les noyaux des premières flèches sont simplicialement triviaux et s'identifient à k.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de 1.6 et 1.11, compte tenu que A_s est une algèbre augmentée (non canoniquement).

2.3. **Proposition.** *Pour* $n \geq 0$ *et* $s \geq 1$, *les groupes d'homotopie* $\pi_{s-1}(\Omega^n)$ *et* $\pi_{s-1}(T^n)$ *sont nuls.*

Démonstration. Nous allons démontrer seulement la première assertion, la deuxième se démontrant de manière analogue. Notons ∂_* les opérateurs face simpliciaux. Pour que $\pi_{s-1}(\Omega^n)$ soit nul, s étant ≥ 2, il faut et il suffit que tout $\omega \in \Omega^n(A_{s-1})$, vérifiant $\partial_i(\omega) = 0$ pour tout i, soit de la forme $\partial_0(\theta)$, avec $\theta \in \Omega^n(A_s)$ et $\partial_i(\theta) = 0$ pour $i > 0$. Pour que $\pi_0(\Omega^n)$ soit nul, il faut et il suffit que tout $\lambda \in \Omega^n(A_0) = k$ soit de la forme $\partial_1(\omega)$, avec $\omega \in \Omega^0(A_1)$ et $\partial_0(\omega) = 0$.

La deuxième assertion est immédiate. Si A_1 est identifié à $k[X]$, il suffit de poser $\theta = \lambda X$ pour $\omega = \lambda$.

Vérifions maintenant le premier point et considérons une forme différentielle $\omega(y_1, \dots, y_s)$, de degré n, définie pour $y_1 + \cdots + y_s = 1$ (en d'autres termes sur Δ_{s-1}), dont les restrictions aux faces $y_i = 0$ sont nulles. Nous devons étendre ω à Δ_s en une forme $\theta(x_0, \dots, x_s)$, définie donc pour $x_0 + \cdots + x_s = 1$, dont la restriction à la face $x_i = 0$, $i > 0$ (resp. $i = 0$), est nulle (resp. est égale à ω en posant $y_i = x_i$). En remplaçant y_1 par $1 - y_2 - \cdots - y_s$, nous pouvons écrire $\omega = \omega(y_1, \dots, y_s)$ comme un élément du groupe $\Omega^n(k[y_2, \dots, y_s])$, plus précisément $\omega = \gamma_1(y_2, y_3, \dots, y_s)$, γ_1 s'annulant si l'une des variables y_i prend la valeur 0 pour $i \geq 2$. Posons alors

$$\sigma_1(x_0, x_1, \dots, x_s) = x_1 \gamma_1(x_2, x_3, \dots, x_s)$$

pour $x_0 + \cdots + x_s = 1$. Cette forme s'annule pour $x_i = 0$, $i \geq 1$, et elle coïncide avec $x_1 \omega(x_1, \dots, x_s)$ pour $x_0 = 0$ (poser $y_i = x_i$). Des formes différentielles analogues $\sigma_2, \dots, \sigma_s$ peuvent être définies en privilégiant à tour de rôle les variables $x_2, \dots, x_s$. Soit alors θ la forme sur Δ_s définie par

$$\begin{aligned}\theta(x_0, x_1, \dots, x_s) = {} & \sigma_1(x_0, x_1, \dots, x_s) + \sigma_2(x_0, x_1, \dots, x_s) \\ & + \cdots + \sigma_s(x_0, x_1, \dots, x_s).\end{aligned}$$

Cette forme s'annule sur toutes les faces $x_i = 0$, $i \geq 1$. Sur la face $x_0 = 0$, elle est égale à

$$x_1\omega(x_1, \dots, x_s) + x_2\omega(x_1, \dots, x_s) + \cdots + x_s\omega(x_1, \dots, x_s),$$

c'est-à-dire à $\omega(x_1, \dots, x_s)$, puisque $x_1 + x_2 + \cdots + x_s = 1$.

2.4. Afin de comparer les formes différentielles non commutatives et les cochaînes simpliciales usuelles, il est commode de considérer l'algèbre simpliciale quotient $\overline{A}_*$ de A_* que voici: elle est obtenue à partir de A_s en la quotientant par les relations $(x_i)^2 = x_i$ et $x_i x_j = 0$ si $i \neq j$. Ainsi, $\overline{A}_s$ s'identifie à k^{s+1}, k-algèbre des fonctions (à valeurs dans k) sur l'ensemble fini $\{0, 1, \dots, s\}$, sommets du s-simplexe standard Δ_s. L'homomorphisme $A_s \to \overline{A}_s$ associe à un polynôme P la valeur obtenue lorsque toutes les variables x_i sont nulles sauf une (nécessairement égale à 1). En appliquant aux algèbres simpliciales $\overline{A}_*$ et A_* les foncteurs Λ^*, Ω^* et T^* du § précédent, on obtient ainsi six k-modules simplicaux qu'il est commode de rassembler dans le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccccc}
\Lambda^*(A_*) & \longrightarrow & \Omega^*(A_*) & \longrightarrow & T^*(A_*) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\Lambda^*(\overline{A}_*) & \longrightarrow & \Omega^*(\overline{A}_*) & \longrightarrow & T^*(\overline{A}_*).
\end{array}$$

On démontre pour l'algèbre simpliciale $\overline{A}_*$ et les k-modules différentiels gradués simpliciaux qui s'en déduisent $\overline{\Lambda}^* = \Lambda^*(\overline{A}_s)$, $\overline{\Omega}^* = \Omega^*(\overline{A}_s)$ et $\overline{T}^* = T^*(\overline{A}_s)$ une proposition analogue à la proposition 2.2:

2.5. **Proposition.** *Les suites d'applications k-linéaires simpliciales*

$$\overline{\Lambda}^0 \xrightarrow{d} \overline{\Lambda}^1 \xrightarrow{d} \overline{\Lambda}^2 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \overline{\Lambda}^n \xrightarrow{d}$$

$$\overline{\Omega}^0 \xrightarrow{d} \overline{\Omega}^1 \xrightarrow{d} \overline{\Omega}^2 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \overline{\Omega}^n \xrightarrow{d}$$

$$\overline{T}^0 \xrightarrow{D} \overline{T}^1 \xrightarrow{D} \overline{T}^2 \xrightarrow{D} \cdots \xrightarrow{D} \overline{T}^n \xrightarrow{D}$$

sont exactes. Les noyaux des premières flèches sont simplicialement triviaux et s'identifient à k.

Par ailleurs, les groupes d'homotopie des quatre algèbres simpliciales Ω^*, $\overline{\Omega}^*$, T^* et $\overline{T}^*$ sont nuls. La proposition suivante montre qu'il en est de même pour ceux du k-module $\Lambda^*(\overline{A}_*)$.

2.6. **Proposition.** *Les groupes d'homotopie $\pi_s(\Lambda^n(\overline{A}_*))$ sont nuls pour s et $n \geq 0$.*

Démonstration. L'ensemble $\Lambda^n(\overline{A}_s)$ s'identifie au k-module des fonctions de $n+1$ variables $f(v_0, v_1, \dots, v_n)$, où les v_i parcourent l'ensemble V des sommets de Δ_s, qui sont antisymétriques pour l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_{n+1}$ et qui sont nulles si deux variables v_i sont égales. Si une telle fonction est définie sur Δ_s et si elle est nulle sur toutes les faces, on l'étend de manière évidente à Δ_{s+1} en une fonction F définie par $F(v_0, v_1, \dots, v_n) = 0$ si l'un quelconque des v_i n'appartient pas à Δ_s.

2.7. **Théorème.** *Notons indifféremment Γ_*^* un des cinq k-modules différentiels simpliciaux gradués définis en 2.4, soient $\Omega^*(A_*)$, $T^*(A_*)$, $\Omega^*(\overline{A}_*)$, $T^*(\overline{A}_*)$ et $\Lambda^*(\overline{A}_*)$ respectivement. Pour tout ensemble simplicial X, posons* $\Gamma^*(X) = \mathrm{Mor}(X, \Gamma_*^*)$. *La cohomologie du k-module gradué $\Gamma^*(X)$ s'identifie alors naturellement à la cohomologie $H^*(X; k)$ de l'ensemble simplicial X à valeurs dans k. Cet isomorphisme est en outre un isomorphisme d'algèbres sauf pour $\Gamma_*^* = \Lambda^*(\overline{A}_*)$.*[4]

Démonstration. Nous allons appliquer la méthode développée par H. Cartan dans [1]. Il est d'abord clair que $\mathrm{Mor}(X, T^*(\overline{A}_*))$ s'identifie à l'algèbre usuelle des cochaînes sur l'ensemble simplicial X à coefficients dans k, le cup-produit s'identifiant à celui d'Alexander-Whitney (cf. 1.4 ainsi que 2.9 pour les détails). D'autre part, d'après 2.2 et 2.5, si on note Z^r le k-module simplicial des formes "fermées" (ou cocyles) de degré r pour l'un quelconque des cinq complexes simpliciaux Γ^* considérés, on a une suite exacte de k-modules simpliciaux

$$0 \longrightarrow Z^{n-1} \longrightarrow \Gamma^n \xrightarrow{d} Z^n \longrightarrow 0.$$

Les groupes d'homotopie de Γ^n étant tous nuls et Z^0 s'identifiant au k-module simplicialement trivial k, on démontre par récurrence sur n que Z^n est un modèle de l'espace d'Eilenberg-Mac Lane $K(k, n)$. Ainsi, les cocycles de degré n du complexe $\Gamma^*(X)$ s'identifient aux morphismes de X dans Z^n. Les cobords s'identifient aux morphismes qui se factorisent par Γ^n, c'est-à-dire ceux homotopes à 0, car Γ^n est contractile. Donc la cohomologie en degré n du complexe est isomorphe à l'ensemble des classes d'homotopie de X dans $K(k, n)$: le théorème est démontré.

2.8. *Remarque.* Un examen attentif des défiitions et des démonstrations précédentes pour le groupe simplicial $\overline{A}_*$ montre que la structure d'anneau de k n'est pas intervenue de manière essentielle (sauf évidemment pour le cup-produit en cohomologie; cf. 1.9). Le théorème précédent est donc en partie vrai pour un groupe abélien quelconque k, avec une modification évidente des définitions.

2.9. Nous allons préciser un peu plus l'isomorphisme entre la cohomologie usuelle et celle du complexe $\Omega^*(X) = \mathrm{Mor}(X, \Omega^*)$, appelée *cohomologie de de Rham non commutative* de l'ensemble simplicial X. Soit $C^*(\Delta_s)$ l'algèbre standard des cochaînes sur $\Delta_s = \{0, 1, \dots, s\}$ à coefficients dans k: une cochaîne λ de $C^n(\Delta_s)$ est la donnée, pour toute suite $(i_0, \dots, i_n) \in \Delta_s$, d'un élement $\lambda(i_0, \dots, i_n)$ de k. Le cup-produit

$$C^n(\Delta_s) \times C^m(\Delta_s) \to C^{n+m}(\Delta_s).$$

est défini grâce à la formule d'Alexander-Whitney (cf. [8, p. 241]):

$$(\lambda \cup \mu)(i_0, \dots, i_{n+m}) = \lambda(i_0, \dots, i_n)\mu(i_n, \dots, i_{n+m})$$

(Ainsi $C^*(\Delta_s)$ s'identifie à $T^*(\overline{A}_s)$ avec les définitions de 1.4 et 2.4.) Si $\lambda \in C^0(\Delta_s)$, son cobord $\delta(\lambda) \in C^1(\Delta_s)$ est donc défini par $\delta(\lambda)(i, j) = \lambda(j) - \lambda(i)$. Soit maintenant

$$\varphi^* : \Omega^*(A_s) \to C^*(\Delta_s)$$

[4] qui n'est pas considérée comme algèbre: cf. la remarque 1.10.

l'unique homomorphisme d'algèbres différentielles graduées tel que $\varphi^0(f) = \tilde{f}$ soit la restriction du polynôme f aux sommets de Δ_s. Ainsi, $\varphi^0(f)(i) = f(0, \dots, 1, 0, \dots)$, où le 1 est à la $i^{\text{ème}}$ place (cf. 1.3). Plus précisément, φ^n est défini par la formule suivante:

$$\varphi^n(f^0.df^1.df^2.\cdots df^n) = \tilde{f}^0 \cup \delta\tilde{f}^1 \cup \delta\tilde{f}^2 \cup \cdots \cup \delta\tilde{f}^n,$$

où le deuxième membre est donc la cochaîne

$$(i_0, i_1, \dots, i_n) \mapsto \tilde{f}^0(i_0)[\tilde{f}^1(i_1) - \tilde{f}^1(i_0)][\tilde{f}^2(i_2) - \tilde{f}^2(i_1)]\cdots[\tilde{f}^n(i_n) - \tilde{f}^n(i_{n-1})].$$

2.10. **Théorème.** *L'homomorphisme φ^* induit un isomorphisme d'algèbres de cohomologie*

$$H^n(\Omega^*(X)) \xrightarrow{\cong} H^n(X; k),$$

$H^n(X; k)$ (resp. $H^n(\Omega^*(X))$ désignant la cohomologie simpliciale usuelle (resp. la cohomologie de de Rham non commutative) à coefficients dans k.

Démonstration. Ce théorème n'est qu'une reformulation de 2.6, compte tenu des considérations algébriques du §1.

2.11. *Remarque.* La cohomologie des ensembles simpliciaux apparaît donc ainsi comme celle du complexe $\mathrm{Mor}(X, \Omega^*(\overline{A}_*))$, où $\Omega^n(\overline{A}_*)$ est formé des cochaînes "normalisées"

$$(i_0, i_1, \dots, i_n) \mapsto f(i_0, i_1, \dots, i_n),$$

c'est-à-dire telles que $f(i_0, i_1, \dots, i_n) = 0$ si deux indices consécutifs i_α et $i_{\alpha+1}$ sont égaux. L'action du groupe symétrique sur l'ensemble des *cocycles* normalisés provient de l'identification entre cet ensemble et celui des formes différentielles non commutative fermées de degré n sur l'anneau $\overline{A}_*$.

Notons de manière plus précise $Z^n_\Lambda(\overline{A}_*)$ (resp. $Z^n(\overline{A}_*)$, $Z^n(A_*)$ l'espace Z^n des formes fermées de degré n décrit en 2.7 pour le complexe simplicial $\Lambda^*(\overline{A}_*)$ (resp. $\Omega^*(\overline{A}_*)$, $\Omega^*(A_*)$). L'inclusion Ξ de $Z^n_\Lambda(\overline{A}_*)$ dans $Z^n(\overline{A}_*)$ et d'après l'application canonique Θ: $Z^n(A_*) \to Z^n(\overline{A}_*)$ sont des équivalences d'homotopie 2.7.

2.12. **Proposition.** *Les homomorphismes de k-modules simpliciaux Ξ et Θ sont des équivalences d'homotopie équivariantes pour l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sur $Z^n(\overline{A}_s)$ et $Z^n(A_*)$ décrite en* 1.12 *et pour l'action de $\mathfrak{S}_n$ par la signature sur $Z^n_\Lambda(\overline{A}_*)$.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de 1.13 et 2.7.

2.13. Soient maintenant π un sous-groupe du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ et $E\pi$ le π-fibré principal universel sur $B\pi = K(\pi, 1)$. Soient

$$\xi_1 = E\pi \times_\pi Z^n(A_*), \quad \xi_2 = E\pi \times_\pi Z^n(\overline{A}_*) \quad \text{et} \quad \xi_3 = E\pi \times_\pi Z^n_\Lambda(\overline{A}_*)$$

les espaces de Borel correspondants,[5] considérés comme fibrés sur $B\pi$. Nous avons des applications fibrées $\xi_1 \to \xi_2 \leftarrow \xi_3$ induites par les applications canoniques équivariantes $Z^n(A_*) \to Z^n(\overline{A}_*) \leftarrow Z^n_\Lambda(\overline{A}_*)$.

[5]L'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sur le k-module des formes fermées de degré n a été explicitée en 1.12. Sur $Z^n_\Lambda(\overline{A}_*)$ cette action est donnée par la signature.

2.14. **Théorème.** *Les applications* $\xi_1 \to \xi_2 \leftarrow \xi_3$ *sont des équivalences d'homotopie fibrées.*

Démonstration. Il suffit de juxtaposer les trois fibrations suivantes

$$\begin{array}{ccccc} Z^n_\Lambda(\overline{A}_*) & \longrightarrow & E\pi \times_\pi Z^n_\Lambda(\overline{A}_*) & \longrightarrow & B\pi \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Z^n(\overline{A}_*) & \longrightarrow & E\pi \times_\pi Z^n(\overline{A}_*) & \longrightarrow & B\pi \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ Z^n(A_*) & \longrightarrow & E\pi \times_\pi Z^n(A_*) & \longrightarrow & B\pi. \end{array}$$

2.15. *Remarque.* Ce résultat s'interprète plus simplement si π est inclus dans le groupe alterné ou si $2 = 0$ dans k. L'espace de Borel est alors simplement $B\pi \times Z^n(\overline{A}_*) \cong B\pi \times Z^n(A_*)$, soit $B\pi \times K(k, n)$. Plus généralement, pour un ensemble simplicial X et π quelconque, l'ensemble des classes d'homotopie d'applications de X dans l'espace de Borel $E\pi \times_\pi Z^n(A_*)$ ou $E\pi \times_\pi Z^n(\overline{A}_*)$ s'identifie à $H^n(X \times B\pi ; \mathbf{k})$, $\mathbf{k}$ représentant le système de coefficients locaux k induit par la signature des permutations sur $\pi = \pi_1(B\pi)$.

2.16. *Remarque.* D'autres opérations peuvent être définies sur le k-module des formes différentielles non commutatives (cf. [3]). En particulier, l'action σ_n du générateur du groupe cyclique $\mathbf{Z}/n$ opèrant sur $Z^n(A)$ peut être étendue en un opérateur inversible κ sur $\Omega^n(A)$ [6] défini par $\kappa(a_0da_1 \cdots da_n) = da_n.a_0.da_1 \cdots da_{n-1}$. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Z^{n-1}(A) & \longrightarrow & \Omega^n(A) & \longrightarrow & Z^n(A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \kappa} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_n} & & \\ 0 & \longrightarrow & Z^{n-1}(A) & \longrightarrow & \Omega^n(A) & \longrightarrow & Z^n(A) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Il convient de noter que l'action de κ contrôle la non commutativité du diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} Z^m(A) \times \Omega^n(A) & \longrightarrow & \Omega^{n+m}(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega^n(A) \times Z^m(A) & \longrightarrow & \Omega^{m+n}(A). \end{array}$$

D'autre part, l'algèbre engendrée par κ et le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ permet de caractériser $\Lambda^n(A)$ comme sous k-module de $\Omega^n(A)$: $\mathfrak{S}_n$ y opère via la signature des permutations et κ y opère comme $(-1)^{n-1}$.

3. Reduction par le type

3.1. Soit de nouveau A l'algèbre A_s, c'est-à-dire le quotient de l'algèbre des polynômes $k[x_0, \dots, x_s]$ par l'idéal $(\Sigma x_i - 1)$. En tant que k-module, $T^n(A) = A \otimes_k \cdots \otimes_k A$ ($n+1$ facteurs) s'identifie à un quotient d'une algèbre de polynômes en $(s+1)(n+1)$ variables x^i_j, $j = 0, \dots, s$ et $i = 0, \dots, n$.

[6] déjà introduit dans [5] (au signe près).

Si une forme différentielle étendue ω est la classe d'un polynôme P en les x_j^i, on note r^i le degré total de P par rapport aux variables x_j^i, j variant de 0 à s. La forme ω est dite de *type* $\leq r$ si elle est la classe d'un polynôme P tel que $r^i \leq r$ pour tout i. Le k-module des formes différentielles étendues de degré n et de type $\leq r$ sera noté $T^n_{\leq r}(A)$. En particulier, $T^n_{\leq 0}(A) = k$. Il est clair que la différentielle $D\colon T^n(A) \to T^{n+1}(A)$ induit un homomorphisme, noté encore D, de $T^n_{\leq r}(A)$ dans $T^{n+1}_{\leq r}(A)$.

3.2. **Proposition.** *La suite de k-modules simplicaux*

$$T^0_{\leq r}(A) \xrightarrow{D} T^1_{\leq r}(A) \xrightarrow{D} T^2_{\leq r}(A) \xrightarrow{D} \cdots \xrightarrow{D} T^n_{\leq r}(A) \xrightarrow{D} T^{n+1}_{\leq r}(A) \xrightarrow{D} \cdots$$

est exacte. Le noyau du premier homomorphisme est simplicialement trivial et s'identifie à k.

Démonstration. Il suffit de remarquer que l'opérateur d'homotopie

$$K\colon T^{n+1}(A) \to T^n(A)$$

défini en 1.6 respecte le type.

3.3. **Proposition.** *Soit $T^n_{\leq r}$ le k-module simplicial*

$$s \mapsto T^n_{\leq r}(A_s).$$

Alors, pour $n \geq 0$, $s \geq 0$ et $r \geq 1$, les groupes d'homotopie $\pi_s(T^n_{\leq r})$ sont nuls.

Démonstration. L'assertion étant claire pour $s = 0$, nous supposerons $s \geq 1$. Soit ω une forme différentielle étendue de degré n et de type $\leq r$ sur Δ_s, c'est à dire un polynôme[7] en les variables $(x_i^1, \ldots, x_s^i)$, $i = 0, \ldots, n$, qui s'annule sur toutes les "faces" de Δ_s, donc si $x_1 = 0$ ou $x_2 = 0, \ldots,$ ou $x_s = 0$, ou $x_1 + x_2 + \cdots + x_s = 1$, les x_j désignant les *groupes* de variables x_j^i, $i = 0, 1, \ldots, n$. Nous devons montrer que ω s'étend en une forme $\tilde{\omega}$ sur Δ_{s+1}, c'est-à-dire en un polynôme en $x_1, x_2, \ldots, x_{s+1}$, s'annulant si l'un des groupes de variables x_j, $j \leq s$, est nul ou si $x_1 + x_2 + \cdots + x_{s+1} = 1$, et qui coïncide enfin avec ω si le groupe de variables x_{s+1} se réduit à 0. Ecrivons $\omega(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ sous la forme $\omega(x_1^0, x_1^1, \ldots, x_1^n; x_2, \ldots, x_s)$ (ce qui privilégie le groupe de variables x_1). Alors ω peut s'écrire ainsi:

$$\begin{aligned}
&\omega(x_1^0, x_1^1, \ldots, x_1^n; x_2, \ldots, x_s) - \omega(0, x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^n; x_2, \ldots, x_s)\\
&\quad+\omega(0, x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^n; x_2, \ldots, x_s) - \omega(0, 0; x_1^2, \ldots, x_1^n; x_2, \ldots, x_s)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\quad+\omega(0, 0, \ldots, 0, x_1^n; x_2, \ldots, x_s) - \omega(0, \ldots, 0; x_2, \ldots, x_s),
\end{aligned}$$

compte tenu que $\omega(0, \ldots, 0; x_2, \ldots, x_s) = 0$ par hypothèse. Ainsi ω s'exprime comme combinaison linéaire des x_1^i avec des *monômes* en les x_j^i comme coefficients. On peut procéder de même avec les autres variables pour chaque monôme qui intervient dans la décomposition précédente. Plus précisément, ω s'exprime comme combinaison linéaire des monômes $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_s^{i_s}$, avec des monômes $\lambda_{i_1 i_2 \cdots i_s}$ en les x_j^i pour coefficients; en outre, la construction précédente montre que le poids de chaque monôme $\lambda_{i_1 i_2 \cdots i_s} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_s^{i_s}$ est

[7] D'un point de vue additif, un produit tensoriel d'algèbres de polynômes est évidemment une algèbre de polynômes.

$\leq r$. Introduisons maintenant de nouvelles variables $t^0, t^1, \ldots, t^n$ et posons formellement $x^i = y^i/t^i$ ou, plus précisément, $x^i_j = y^i_j/t^i$. En multipliant la fraction rationnelle $\omega(y^i_j/t^i)$ par $(t^0t^1\cdots t^n)^r$, on trouve un polynôme $\theta(y_1, y_2, \ldots, y_s, t^0, t^1, \ldots, t^n)$ qui coïncide avec $\omega(x_1, \ldots, x_s)$ si $y_j = x_j$ et $t^i = 1$. Ce polynôme s'annule si le groupe de variables z est égal à 0, avec $z^i = \sum_{j=1}^p y^i_j - t^i$. En recommençant le raisonnement précédent avec la nouvelle variable z, on voit que θ s'écrit comme combinaison linéaire des monômes $x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_p^{i_p}z^k$. En remplaçant t^i par 1, il en résulte que ω s'exprime comme combinaison linéaire des monômes $x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_s^{i_s}(\sum_{j=1}^s x^k_j - 1)$, soit

$$\omega = \sum \lambda_{i_1 i_2\cdots i_s k} x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_s^{i_s}\left(\sum_{j=1}^{s} x^k_j - 1\right),$$

où le type des monômes $\lambda_{i_1 i_2\cdots i_s k} x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_s^{i_s}x^k_j$ est $\leq r$. La forme différentielle

$$\tilde{\omega}(x_1, \ldots, x_{s+1}) = \sum_{i_1 i_2\cdots i_s k} \lambda_{i_1 i_2\cdots i_s k} x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_s^{i_s}\left(\sum_{j=1}^{s} x^k_j - 1\right)$$

est alors définie sur Δ_{s+1} et vérifie les conditions requises.

3.4. **Corollaire.** *Soit* $Z^n_{\leq r} \subset T^n_{\leq r}$ *le* k*-module simplicial des formes différentielles étendues fermées de degré* n *et de type* $\leq r$. *Alors, si* $r \geq 1$, $\pi_s(Z^n_{\leq r}) = 0$ *si* $s \neq n$ *et* $\pi_n(Z^n_{\leq r}) \cong k$. *Par conséquent,* $Z^n_{\leq r}$ *est un modèle de l'espace d'Eilenberg-Mac Lane de type* (k, n) *et la cohomologie de degré* n *d'un ensemble simplicial* X *est celle du sous-complexe* $\mathrm{Mor}(X, T^*_{\leq r})$ *de* $\Omega^*(X) = \mathrm{Mor}(X, \Omega^*)$.

Démonstration. Ecrivons la fibration suivante (en utilisant 3.2):

$$0 \to Z^{n-1}_{\leq r} \to T^{n-1}_{\leq r} \xrightarrow{D} Z^n_{\leq r} \to 0.$$

Puisque les groupes d'homotopie de $T^{n-1}_{\leq r}$ sont nuls d'après la proposition précédente, $\pi_s(Z^n_r)$ est isomorphe à $\pi_0(Z^{n-s}_r)$ ou à $\pi_{s-n}(k)$. Ces groupes sont nuls si $s \neq n$ et sont canoniquement isomorphes à k si $s = n$, ce qui démontre la première partie du corollaire. Par ailleurs, le k-module des cocycles de degré n du complexe $\mathrm{Mor}(X, T^*_{\leq r})$ est égal à $\mathrm{Mor}(X, Z^n_{\leq r})$. Puisque $T^{n-1}_{\leq r} \to Z^n_{\leq r}$ est une fibration, le k-module des morphismes $X \to Z^n_{\leq r}$ homotopes à 0 s'identifie au k-module des cobords, c'est-à-dire des morphismes se factorisant en $X \to T^{n-1}_{\leq r} \to Z^n_{\leq r}$. Donc, la cohomologie en degré n du complexe $\mathrm{Mor}(X, T^*_{\leq r})$ est isomorphe à l'ensemble des classes d'homotopie d'applications simpliciales de X dans $Z^n_{\leq r}$, c'est-à-dire à $H^n(X; k)$.

3.5. *Remarque.* Considérons plus particulièrement le complexe $T^*_{\leq 1}$. Il s'identifie (additivement) au complexe des cochaînes C^* (utiliser le fait que le quotient $k[x]/(x^2 - x)$ est isomorphe au k-module des polynômes de degrés ≤ 1). Le morphisme composé

$$C^* \cong T^*_{\leq 1} \to T^* \xrightarrow{\tau} C^*,$$

où τ est induit par l'application canonique $A_* \to \overline{A}_*$ (cf. 1.4 et 2.4), est évidemment l'application identique.

4. Reduction par le poids

4.1. Reprenons les notations du début du §3. Une forme différentielle étendue ω est dite de *poids* $\leq r$ si $\Sigma r_i \leq r$. Le k-module simplicial des formes différentielles étendues de poids $\leq r$ sera noté $T^n_{(r)}$ (ne pas confondre avec la définition sensiblement différente $T^n_{\leq r}$ explicitée en 3.1). La différentielle D induit alors un homomorphisme de $T^n_{(r)}$ dans $T^{n+1}_{(r)}$. De même, on note $\Omega^n_{(r)}$ le k-module simplicial des formes différentielles combinaisons linéaires de $a_0 da_1 \cdots da_n$, où les a_i sont des polynômes dont la somme des degrés est $\leq r$. La différentielle d induit un homomorphisme de $\Omega^n_{(r)}$ dans $\Omega^{n+1}_{(r)}$. Il est clair que l'inclusion $\Omega^n \to T^n$ et la projection $T^n \to \Omega^n$ respectent les filtrations par le poids. En particulier $T^n_{(r)} \cap \Omega^n = \Omega^n_{(r)}$.

4.2. **Proposition.** *Les suites de k-modules*

$$T^0_{(r)}(A) \xrightarrow{D} T^1_{(r)}(A) \xrightarrow{D} T^2_{(r)}(A) \xrightarrow{D} \cdots \xrightarrow{D} T^n_{(r)}(A) \xrightarrow{D} T^{n+1}_{(r)}(A) \xrightarrow{D} \cdots$$

et

$$\Omega^0_{(r)}(A) \xrightarrow{d} \Omega^1_{(r)}(A) \xrightarrow{d} \Omega^2_{(r)}(A) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^n_{(r)}(A) \xrightarrow{d} \Omega^{n+1}_{(r)}(A) \xrightarrow{d} \cdots$$

sont exactes. Les noyaux des premiers homomorphismes sont simplicialement triviaux et s'identifient à k.

Démonstration. Comme dans le paragraphe précédent, il suffit de remarquer que l'opérateur d'homotopie K défini en 2.2 respecte le poids aussi bien que le type. En outre, il coïncide avec l'opérateur d'homotopie b' lorsqu'on se restreint au sous k-module $\Omega^{n+1}(A)$ de $T^{n+1}(A)$.

4.3. De manière parallèle à la discussion développée dans le §3, nous nous proposons de montrer que les groupes d'homotopie $\pi_s(T^n_{(r)})$ et $\pi_s(\Omega^n_{(r)})$ sont nuls avec cependant la restriction $s < r$. A cette fin, nous aurons besoin de quelques lemmes préliminaires, inspirés de discussions avec R. Thomason.

Soit R_s l'algèbre des polynômes à sn variables notée de la manière suivante

$$R_s = k[x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^n, x_2^1, \ldots, x_2^n, \ldots, x_s^1, \ldots, x_s^n].$$

On pose

$$\begin{aligned} f^1 &= x_1^1 + x_2^1 + \cdots + x_s^1 \\ f^2 &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_s^2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f^n &= x_1^n + x_2^n + \cdots + x_s^n. \end{aligned}$$

On considère les idéaux suivants

$$J_1^n = (x_1^1, \ldots, x_n^1), J_2^n = (x_2^1, \ldots, x_2^n), \ldots, J_s^n = (x_s^1, \ldots, x_s^n),$$
$$\mathcal{J} = (f^1, f^2, \ldots, f^n).$$

L'entier n étant fixé dans ce qui suit, les idéaux $J_1^n, J_2^n, \ldots, J_s^n$ seront notés simplement $J_1, J_2, \ldots, J_s$ s'il n'y a pas de risque de confusion. D'après les arguments développés en 3.3, l'intersection des idéaux $J_1 \cap J_2 \cap \cdots \cap J_q$ est égale à leur produit $K_q = J_1.J_2 \cdots J_q$ si $q \leq s$.

Par la suite, nous utiliserons constamment le lemme général suivant:

4.4. **Lemme.** *Soient* L_1 *et* L_2 *deux idéaux quelconques d'un anneau commutatif unitaire* R. *Alors* $L_1 \cap L_2/L_1.L_2 \cong \mathrm{Tor}_1^R(R/L_1, R/L_2)$. *En outre, si* R *est un anneau gradué et si* L_1 *et* L_2 *sont gradués, l'isomorphisme précédent respecte la graduation.*

Démonstration. Ecrivons la suite exacte

$$\begin{aligned}\mathrm{Tor}_1^R(R, R/L_2) \to \mathrm{Tor}_1^R(R/L_1, R/L_2) \to L_1 \otimes_R R/L_2 \\ \to R \otimes_R R/L_2 \to R/L_1 \otimes_R R/L_2.\end{aligned}$$

Nous avons $\mathrm{Tor}_1^R(R, R/L_2) = 0$ et $L_1 \otimes_R R/L_2 \cong L_1/L_1.L_2$. Donc

$$\mathrm{Tor}_1^R(R/L_1, R/L_2) \cong \mathrm{Ker}(L_1/L_1.L_2 \to R/L_2) \cong L_1 \cap L_2/L_1.L_2.$$

Dans le cas gradué, ces isomorphismes sont bien entendu compatibles avec la graduation.

4.5. **Lemme.** *Pour tout* i, *on a un isomorphisme de* k*-modules gradués*

$$\mathrm{Tor}_{i-1}^{R_s}(R_s/\mathcal{J}, R_s/J_1 \cdots J_s) \cong \mathrm{Tor}_i^{R_{s-1}}(R_{s-1}/\overline{\mathcal{J}}, R_{s-1}/\overline{J}_1 \cdots \overline{J}_s)$$

où $\overline{\mathcal{J}}$, $\overline{J}_r$, *etc ... sont les images des idéaux* $\mathcal{J}$, $\overline{J}_r$, *etc ... dans l'anneau quotient* $R_{s-1} \cong R_s/(x_s^1, x_s^2, \ldots, x_s^n)$.

Démonstration. Puisque $K_{s-1}J_s = K_{s-1} \cap J_s$, nous pouvons écrire la suite exacte

$$0 \to R_s/K_{s-1}J_s \to R_s/K_{s-1} \oplus R_s/J_s \to R_s/(K_{s-1} + J_s) \to 0.$$

Par ailleurs, nous pouvons résoudre $R_s/\mathcal{J}$ par le complexe de Koszul qui est le produit tensoriel des complexes suivants (α variant de 1 à s) :

$$R_s \xrightarrow{.f^\alpha} R_s.$$

Il en résulte que $\mathrm{Tor}_i^{R_s}(R_s/\mathcal{J}, R_s/K_{s-1})$ et $\mathrm{Tor}_i^{R_s}(R_s/\mathcal{J}, R_s/J_s)$ sont nuls pour $i > 0$, car les f^α forment une suite régulière dans $R_s/(K_{s-1})$ et dans R_s/J_s. Par conséquent,

$$\mathrm{Tor}_i^{R_s}(R_s/\mathcal{J}, R_s/(K_{s-1} + J_s)) \cong \mathrm{Tor}_{i-1}^{R_s}(R_s/\mathcal{J}, R_s/K_s).$$

D'autre part, puisque la structure de R_s-module de $N = R_s/(K_{s-1} + J_s) \cong R_{s-1}/\overline{J}_1.\overline{J}_2 \cdots \overline{J}_{s-1}$ est induite par celle de R_{s-1}-module grâce à la projection canonique $R_s \to R_{s-1} \cong R_s/J_s$, le même argument (complexe de Koszul), montre aussi que

$$\begin{aligned}\mathrm{Tor}_i^{R_{s-1}}(R_{s-1}/\overline{\mathcal{J}}, N) = \mathrm{Tor}_i^{R_{s-1}}(R_{s-1}/\overline{\mathcal{J}}, R_{s-1}/\overline{J}_1 \cdot \overline{J}_2 \cdots \overline{J}_{s-1}) \\ \cong \mathrm{Tor}_i^{R_s}(R_s/\mathcal{J}, N).\end{aligned}$$

Le lemme est alors obtenu en composant les deux isomorphismes que nous venons de démontrer.

4.6. **Corollaire.** *Le* k*-module gradué* $\mathcal{J} \cap (J_1.J_2 \cdots J_s)/\mathcal{J}.J_1.J_2 \cdots J_s$ *est nul en poids* $> s$.

Démonstration. Désignons par la même lettre un idéal dans R_s et sa projection dans R_q avec $q < s$ en général. Le lemme précédent utilisé $s-1$ fois démontre l'isomorphisme suivant:

$$\mathrm{Tor}_1^{R_s}(R_s/\mathcal{J}, R_s/J_1J_2 \cdots J_s) \cong \mathrm{Tor}_s^{R_1}(R_1/\mathcal{J}, R_1/J_1) \cong \mathrm{Tor}_s^{k[y_1, \ldots, y_n]}(k, k).$$

Il est bien connu[8] que $\mathrm{Tor}_s^{k[y_1,\ldots,y_n]}(k, k)$ est une algèbre extérieure engendrée par des éléments de degré 1 et de *poids* 1 (par rapport aux variables y). Le lemme en résulte.

4.7. **Proposition.** *Soit A l'algèbre simpliciale $s \mapsto A_s$ et soit $\Omega^n_{(r)}$ (resp. $T^n_{(r)}$) le groupe simplicial des formes différentielles (resp. étendues) de degré n et de poids r sur l'algèbre simpliciale A_*. Alors les groupes d'homotopie $\pi_s(\Omega^n_{(r)})$ et $\pi_s(T^n_{(r)})$ sont nuls si $r > s$.*

Démonstration. Puisque $\Omega^n_{(r)}$ est facteur direct de $T^n_{(r)}$ (cf. 1.4), il suffit de démontrer que le deuxième groupe est nul. Pour cela, considérons une forme différentielle étendue de poids $\leq r$ avec $r > s$, c'est à dire

$$\omega = \omega(x_1, x_2, \ldots, x_s)$$

avec $x_i = (x_i^j)$, qui s'annule si $x_i = 0$ pour un i ou si $x_1 + x_2 + \cdots + x_s = 1$ (c'est-à-dire $= 1$ pour toutes les coordonnées). D'après 4.6, la partie homogène de ω en degré r peut s'écrire comme une somme

$$\sum \lambda_{i_1 i_2 \cdots i_s}(x) x_1^{i_1}.x_2^{i_2} \cdots x_s^{i_s} \left(\sum_{j=1}^{s} x_j^k \right).$$

La différence entre ω et la somme

$$\theta = \sum \lambda_{i_1 i_2 \cdots i_s}(x) x_1^{i_1}.x_2^{i_2} \cdots x_s^{i_s} \left(\sum_{j=1}^{s} x_j^k - 1 \right)$$

est une forme différentielle étendue de poids $\leq r-1$ qui possède les mêmes propriétés que ω. Elle s'étend en une forme de poids $\leq r$ sur le $(s+1)$-simplexe vérifiant les propriétés voulues, grâce à l'argument de "partition de l'unité" explicité en 2.3. Si, dans l'expression de θ, la somme $\sum_{j=1}^{s}$ est remplacée par $\sum_{j=1}^{s+1}$, on trouve ainsi une forme différentielle sur le $(s+1)$-simplexe vérifiant les propriétés requises. La proposition est démontrée.

4.8. **Théorème.** *Pour tout ensemble simplicial X, et $r \geq n$, la cohomologie en degré n du complexe $\Omega^*_{(r)}(X) = \mathrm{Mor}(X, \Omega^*_{(r)})$ est isomorphe à la cohomologie à coefficients dans k.*

Démonstration. Comme dans le paragraphe précédent, désignons par Z^* le k-module des formes différentielles fermées. D'après la proposition 4.2, nous pouvons écrire la suite exacte de k-modules simpliciaux

$$0 \to Z^{n-1}_{(r)} \to \Omega^{n-1}_{(r)} \to Z^n_{(r)} \to 0.$$

Si $r > s$, nous avons donc $\pi_s(Z^n_{(r)}) \cong \pi_{s-1}(Z^{n-1}_{(r)})$ qui est isomorphe à $\pi_{s-n}(Z^0_{(r)})$ si $s \geq n$ ou à $\pi_0(Z^{n-p}_{(r)})$ si $n \geq s$. Ces derniers groupes sont nuls si $s \neq n$ et sont canoniquement isomorphes à k si $s = n$.

Si $s > r$, donc $s > n$, le groupe d'homotopie $\pi_s(Z^n_{(r)})$ est nul, car une forme différentielle de poids $\leq r < s$ s'annulant sur toutes les faces de Δ_s est nulle.

[8] Complexe de Koszul de nouveau.

Enfin, si $s = r \geq n$, l'homomorphisme $\Omega^{n-1}_{(r)} \to Z^n_{(r)}$ ci-dessus induit 0 sur les groupes d'homotopie π_n, car une forme différentielle de degré $n-1$ s'annulant sur toutes les faces de Δ_n est exacte. Par conséquent, $\pi_s(Z^n_{(r)})$ est isomorphe à $\pi_{s-1}(Z^{n-1}_{(r)})$, l'argument étant le même que plus haut.

En conclusion, si $r \geq n$, nous avons démontré que $Z^n_{(r)}$ est un modèle de l'èspace d'Eilenberg-Mac Lane de type (k, n) et que l'homomorphisme $\Omega^{n-1}_{(r)} \to Z^n_{(r)}$ est homotope à 0. Ainsi, le k-module formé des classes d'homotopie d'applications de X dans $Z^n_{(r)}$ s'identifie au quotient de $\mathrm{Mor}(X, Z^n_{(r)})$ par l'image de $\mathrm{Mor}(X, \Omega^{n-1}_{(r)})$, c'est-à-dire à la cohomologie du complexe $\mathrm{Mor}(X, \Omega^*_{(r)})$. Le théorème est démontré.

4.9. *Remarque.* Considérons l'intégration des formes différentielles décrite dans l'appendice. En remplaçant le complexe Ω^* par le complexe $T^*_{\leq 1}$ (resp. $\Omega^*_{(r)}$), nous définissons (par l'intégration usuelle sur les simplexes) un morphisme de complexes

$$T^n_{\leq 1} \to \widehat{C}^n \quad (\text{resp. } \Omega^n_{(r)} \to C^n_{(r)}),$$

où $\widehat{C}^n$ (resp. $C^n_{(r)}$) désigne le k-module des cochaînes usuelles localisé par inversion de $(n+1)!$ (resp. $r!$). Ce morphisme se factorise bien entendu par le k-module des formes différentielles *commutatives* de poids $n+1$ (resp. r), où la même factorielle est inversée. Par ailleurs, il est bien connu que le k-module des formes différentielles commutatives forme un complexe, dont la cohomologie en degré n est isomorphe à $H^n(X; k)$ si $(n+1)!$ est inversible dans k. Dans cette échelle, la cohomologie des formes différentielles non commutatives coïncide donc avec celle des formes différentielles commutatives (cohomologie "tame").

5. Cohomologie de Deligne-Beilinson

5.1. Soit M une variété différentiable munie d'une filtration[9] F^r de son complexe de de Rham $A^*(M) = A^*(M; k)$ des formes différentielles à coefficients dans $k = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. La cohomologie de Deligne-Beilinson (dans le sens généralisé en [6]) est celle du "cône à gauche"[10] du morphisme

$$\Psi\colon \widetilde{C}^*(M; \mathbf{Z}) \times F^r(A^*(M)) \to A^*(M),$$

où $\widetilde{C}^*(M; \mathbf{Z})$ est le cône à gauche du morphisme

$$C^*(M; \mathbf{Z}) \times A^*(M) \to C^*(M; k).$$

Le complexe des cochaînes singulières *différentiables* sur la variété M à coefficients dans L est ici désigné par $C^*(M; L)$. Le morphisme $A^*(M) \to C^*(M; k)$ est défini par intégration des formes différentielles sur les simplexes singuliers différentiables (cf. [6, §7.11 et 7.15], pour les détails). En outre, la

[9]Un exemple typique est celui de la filtration de Hodge sur une variété analytique complexe X, k étant le corps des nombres complexes: cf. [6]. La notation A^* est utilisée afin d'éviter toute confusion avec le complexe de de Rham non commutatif qui est noté Ω^* dans cet article.

[10]Le "cône à gauche" $C(\alpha)$ d'un morphisme $\alpha\colon C^* \to D^*$ d'un morphisme de complexes *cohomologiques* est défini en sorte qu'on ait la suite exacte $H^n(C(\alpha)) \to H^n(C^*) \to H^n(D^*). \to H^{n+1}(C(\alpha)) \to \cdots$ Comme il a été souligné dans [6], cette définition (qui est la suspension de le définition usuelle du cône) est celle qui convient pour les structures multiplicatives en cohomologie.

cohomologie de Deligne-Beilinson peut être munie d'un produit remarquable[11] (cf. loc. cit. et Note 9).

L'objet de ce paragraphe est de montrer que la cohomologie de Deligne-Beilinson, munie de sa structure multiplicative, est canoniquement isomorphe à la cohomologie du cône à gauche du morphisme de complexes

$$\Omega^*(N(\mathscr{U});\mathbf{Z}) \times F^r(A^*(M)) \to A^*(M).$$

Dans notre contexte, $\mathscr{U}$ est un recouvrement ouvert de M choisi assez fin pour que la réalisation géométrique de son nerf $N(\mathscr{U})$ soit homotopiquement équivalent à M; Ω^* désigne le complexe de de Rham *non commutatif* de l'ensemble simplicial $N(\mathscr{U})$.

De manière plus précise, une forme différentielle non commutative sur $N(\mathscr{U})$ à coefficients $\mathbf{Z}$ induit une forme différentielle non commutative à coefficients k ($=\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ suivant la théorie). Grâce à une partition de l'unité, elle induit donc une forme différentielle *commutative* usuelle sur M. On définit ainsi un morphisme de complexes

$$\Omega^*(N(\mathscr{U});\mathbf{Z}) \to A^*(M).$$

5.2. Fixons une fois pour toutes une partition de l'unité associée au recouvrement $\mathscr{U}$. On peut lui associer le diagramme commutatif suivant (où $C(\alpha)$ désigne en général le cône à gauche du morphisme α).

$$\begin{tikzcd}
C(u) \arrow[r] & C^*(M;\mathbf{Z}) \times A^*(M) \arrow[r, "u"] & C^*(M;k) \\
C(v) \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r] & C^*(|N(\mathscr{U})|;\mathbf{Z}) \times A_s^*(N(\mathscr{U})) \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r, "v"] & C^*(M;k) \arrow[u, equal] \arrow[d] \\
C(w) \arrow[r] & C_s^*(n(\mathscr{U});\mathbf{Z}) \times A_s^*(N(\mathscr{U})) \arrow[r, "w"] & C_s^*(N(\mathscr{U});k) \\
\Omega^*(N(\mathscr{U});\mathbf{Z}) \arrow[u] \arrow[r] & \Omega^*(N(\mathscr{U});\mathbf{Z}) \arrow[u] \arrow[r] & 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, $C^*(M;L)$ désigne de manière générale le complexe des cochaînes singulières différentiables sur M à coefficients dans L; $C^*(|N(\mathscr{U})|;L)$ désigne le complexe des cochaînes singulières sur la réalisation géométrique $|N(\mathscr{U})|$ du nerf de $\mathscr{U}$; $C_s^*(N(\mathscr{U});L)$ est le complexe des cochaînes simpliciales sur $N(\mathscr{U})$. Un n-simplexe de $N(\mathscr{U})$ induit une application

$$\Delta^n \to |N(\mathscr{U})|$$

d'où le morphisme de complexes

$$C^*(|N(\mathscr{U})|;L) \to C_s^*(N(\mathscr{U});L).$$

Enfin, $A_s^*(N(\mathscr{A}))$ désigne le complexe de de Rham-Sullivan sur l'ensemble simplicial $N(\mathscr{U})$ et le morphisme $C^*(|N(\mathscr{U})|;L) \to C^*(M;L)$ est induit par l'application continue bien connue $M \to |N(\mathscr{U})|$.

[11]Pour $k=\mathbf{C}$, il convient de multiplier certains morphismes par une puissance de $2i\pi$. Nous négligerons ce facteur ici, car il ne joue qu'un rôle de normalisation.

5.3. Par ailleurs, les diagrammes induits par cup-produit comme le suivant, obtenu par intégration des formes:

$$\begin{array}{ccc} A^*(M)\times A^*(M) & \longrightarrow & A^*(M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C^*(M;k)\times C^*(M;k) & \longrightarrow & C^*(M;k) \end{array}$$

sont commutatifs à homotopie canonique près.[12] On définit ainsi des accouplements

$$C(\alpha)\times C(\alpha)\to C(\alpha)$$

avec $\alpha = u, v$ ou w, compatibles entre eux [6, §7.9]), ce qui se traduit par le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} C(u)\times C(u) & \longrightarrow & C(u) \\ \uparrow & & \uparrow \\ C(v)\times C(v) & \longrightarrow & C(v) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C(w)\times C(w) & \longrightarrow & C(w) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Omega^*(N(\mathscr{U});\mathbf{Z})\times\Omega^*(N(\mathscr{U});\mathbf{Z}) & \longrightarrow & \Omega^*(N(\mathscr{U});\mathbf{Z}) \end{array}$$

5.4. Ce qui précède permet de définir un isomorphisme $\Omega^*(N(\mathscr{U});\mathbf{Z}) \to C(u) = \widetilde{C}^*(M;\mathbf{Z})$ dans la catégorie dérivée, compatible avec les structures multiplicatives. De manière plus précise, on a le diagrammecommutatif suivant:

[12]De manière précise, si M et N sont deux variétés, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A^*(M)\otimes A^*(N) & \longrightarrow & A^*(M\times N) \\ \downarrow & & \\ C^*(M)\otimes C^*(N) & & \Big\downarrow \\ \downarrow & & \\ [C_*(M)\otimes C_*(N)]^\natural & \longleftarrow & C^*(M\times N) \end{array}$$

où $^\natural$ désigne le dual, où la fléche $\to$ est le produit extérieur des formes différentielles usuelles et et où la flèche $\leftarrow$ est la duale de l'application canonique $\theta\colon C_*(M)\otimes C_*(N)\to C_*(M\times N)$ obtenue en triangulant $\Delta_p\times\Delta_q$ ("shuffles"; cf. [8, p. 240]). On dispose d'un morphisme naturel de complexes $\gamma\colon C_*(M\times N)\to C_*(M)\otimes C_*(N)$ tel que $\theta.\gamma$ et $\gamma.\theta$ soient homotopes à l'identité ([8] loc. cit). Par composition de ces morphismes ou de leurs duaux, on construit ainsi le diagramme homotopiquement commutatif annoncé:

$$\begin{array}{ccc} A^*(M)\otimes A^*(N) & \longrightarrow & A^*(M\times N) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C^*(M)\otimes C^*(N) & \longrightarrow & C^*(M\times N). \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
C(\psi) & \longrightarrow & \widetilde{C}^*(M;\mathbf{Z}) \times F^r(A^*(M)) & \xrightarrow{\Psi} & A^*(M) \\
\uparrow & & \uparrow & & \| \\
C(\phi) & \longrightarrow & C(v) \times F^r(A^*(M)) & \xrightarrow{\phi} & A^*(M) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
C(\theta) & \longrightarrow & C(w) \times F^r(A^*(M)) & \xrightarrow{\theta} & A^*(M) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
C(\Gamma) & \longrightarrow & \Omega^*(N(\mathscr{U});\mathbf{Z}) \times F^r(A^*(M)) & \xrightarrow{\Gamma} & A^*(M)
\end{array}$$

et les divers cup-produits

$$C(\alpha) \times C(\alpha) \to C(\alpha)$$

avec $\alpha = \Psi, \phi, \theta$ ou Γ sont ainsi compatibles entre eux. La discussion précédente se conclut par le théorème suivant:

5.5. **Théorème.** *Soit $\mathscr{U}$ un recouvrement ouvert de la variété M tel que l'application canonique de M dans la réalisation géométrique du nerf de $\mathscr{U}$ soit une équivalence d'homotopie.*[13] *Alors la cohomologie de Deligne-Beilinson de M relative à la filtration F^r du complexe de de Rham $A^*(M;k)$ (cf. [6]) est canoniquement isomorphe au cône à gauche (cf. Note 9) du morphisme de complexes*

$$\Omega^*(N(\mathscr{U});\mathbf{Z}) \times F^r(A^*(M)) \to A^*(M).$$

Dans le premier membre, $\Omega^*(N(\mathscr{U});\mathbf{Z})$ désigne le complexe de de Rham non commutatif sur le nerf $N(\mathscr{U})$ de $\mathscr{U}$, le cône à gauche étant muni de la structure multiplicative explicitée en [6, §7] par exemple.

Appendice. Integration des formes differentielles non commutatives

A.1. Nous supposerons ici que $k \supset \mathbf{Q}$ (des hypothèses un peu plus générales sont envisagées en 4.9). L'intégration sur les simplexes définit un homomorphisme de k-modules gradués simpliciaux (avec les notations de 2.1):

$$I\colon \Omega^* \to C^*.$$

Plus précisément, nous avons la formule

$$I(f^0 df^1 \cdots df^n)(i_0, \dots, i_n) = \int_\sigma f^0 \wedge df^1 \wedge \cdots \wedge df^n \in k,$$

où $\sigma = [i_0, \dots, i_n]$ est le n-simplexe orienté (éventuellement dégénéré), défini par les sommets $(i_0, \dots, i_n)$ et où le symbole $\int$ désigne l'intégrale des formes différentielles usuelles (il est facile de voir que c'est un nombre rationnel multiplié par un élément de k). Notons que l'intégrale est nulle si le simplexe est dégénéré. D'après la formule de Stokes, I définit bien un morphisme de complexes. Notons cependant que I *n'est pas multiplicatif*,[14] ce qui crée des complications pour certaines définitions de base, notamment celle de la cohomologie de Deligne-Beilinson (cf. [6] et le §5).

[13] Ceci est par exemple le cas si l'intersection d'un nombre quelconque d'ouverts du recouvrement est vide ou contractile.

[14] Il l'est cependant à homotopie près: cf. Note 11.

A.2. **Théorème.** *Le morphisme I est homotope (en tant que morphisme de complexes simpliciaux) à celui défini en 2.9 et noté*[15] φ. *Plus précisément, il existe un morphisme simplicial gradué* $K\colon \Omega^* \to C^{*-1}$ *tel que* $dK+Kd = I-\varphi$.

Ce théorème résultera de la proposition A.4 démontrée plus loin. Définissons auparavant l'intégration "partielle" suivante:

$$I_{n,m}\colon \Omega^n \times C^m \to C^{n+m}$$

où

$$I_{n,m}(\omega, c)(i_0, \dots i_{n+m}) = \left(\int_{[i_0, \dots, i_n]} \omega\right).c(i_n, i_{n+1}, \dots, i_{n+m}).$$

En fait, $I_{n,m}$ est la composition des applications:

$$\Omega^n \times C^m \to C^n \times C^m \to C^{n+m},$$

où la première est induite par intégration des formes sur le facteur Ω^n et où la seconde est le cup-produit des cochaînes. Si δ désigne la différentielle sur le complexe C^* comme plus haut, nous avons donc la formule $\delta(I_{n,m}(\omega, c)) = I_{n+1,m}(d\omega, c) + (-1)^{\deg(\omega)} I_{n,m+1}(\omega, \delta c)$. Par abus d'écriture, nous poserons $\omega.c = I_{n,m}(\omega, c)$.

A.3. Définissons un morphisme de complexes simpliciaux

$$I_r\colon \Omega^* \to C^*$$

par la formule suivante

$$I_r(f^0 df^1 \cdots df^n) = (f^0.df^1 \cdots df^r).(\delta \tilde{f}^{r+1} \cdots \delta \tilde{f}^n),$$

pour $r < n$, $\tilde{f}$ étant la restriction de la fonction f aux sommets du simplexe comme en 2.4. On pose $I_r(f^0 df^1 \cdots df^n) = I(f^0 df^1 \cdots df^n)$ si $r \geq n$. On notera que $I_0 = \varphi$, et que $I_r(\omega) = I(\omega)$ pour r assez grand.

A.4. **Proposition.** *Les morphismes de complexes I_r et I_{r-1} sont homotopes.*

Démonstration. Définissons un "opérateur d'homotopie" simplicial

$$K_r\colon \Omega^n \to C^{n-1}$$

par la formule suivante:

$$\begin{aligned} K_r(\omega) &= (f^0.df^1 \cdots df^{r-1}.f^r).(\delta \tilde{f}^{r+1} \cdots \delta \tilde{f}^n) \\ &\quad - (f^0.df^1 \cdots df^{r-1}).(\tilde{f}^r.\delta \tilde{f}^{r+1} \cdots \delta \tilde{f}^n) \end{aligned}$$

pour $\omega = f^0.df^1 \cdots df^n$ et $r \leq n$. Cette dernière expression a bien un sens, car elle ne dépend que de la classe de f^r modulo k. On pose aussi $K_r(\omega) = 0$ pour $r > n$. Nous pouvons alors écrire les identités que voici:

$$\begin{aligned} \delta K_r(\omega) &= (df^0.df^1 \cdots df^{r-1}.f^r).(\delta \tilde{f}^{r+1} \cdots \delta \tilde{f}^n) \\ &\quad + (-1)^{r-1}(f^0.df^1 \cdots df^{r-1}.df^r).(\delta \tilde{f}^{r+1} \cdots \delta \tilde{f}^n) \\ &\quad - (f^0.df^1 \cdots df^{r-1}).(\tilde{f}^r.\delta \tilde{f}^{r+1} \cdots \delta \tilde{f}^n) \\ &\quad + (-1)^r(f^0.df^1 \cdots df^{r-1}).(\delta \tilde{f}^r.\delta \tilde{f}^{r+1} \cdots \delta \tilde{f}^n) \end{aligned}$$

[15] Noter que φ est multiplicatif.

et

$$\begin{aligned} K_r.d(\omega) &= K_r(df^0.df^1\cdots df^n) \\ &= (df^0.df^1\cdots f^r).(\delta\tilde{f}^{r+1}\cdots\delta\tilde{f}^n) \\ &\quad - (df^0.df^1\cdots df^{r-1}).(\tilde{f}^r.\delta\tilde{f}^{r+1}\cdots\delta\tilde{f}^n). \end{aligned}$$

Par conséquent, $\delta K_r - K_r.d = (-1)^{r-1}I_r + (-1)^r I_{r-1}$, soit

$$I_r - I_{r-1} = \delta((-1)^{r-1}K_r) - (-1)^r K_r d.$$

Si nous remplaçons K_r par $K'_r = (-1)^{r-1}K_r$, cette identité s'écrit aussi

$$I_r - I_{r-1} = \delta K'_r + K'_r d.$$

Ceci achève la démonstration de la Proposition A.4.

Démonstration du théorème A.2. On pose $K = \sum_{r=0}^{\infty} K'_r$. Cette somme infinie a bien un sens car elle est en fait finie en chaque degré. Puisque $I_r(\omega) - I_{r-1}(\omega) = (\delta K'_r + K'_r d)(\omega)$, que $I(\omega) = \varphi(\omega)$ et $I_r(\omega) = I(\omega)$ pour r assez grand, on a la relation

$$I - \varphi = \delta K + Kd$$

ce qui démontre le théorème.

A.5. *Remarque.* La démonstration du théorème A.2 n'a utilisé de l'intégrale que la propriété de compatibilité avec l'opérateur bord sur les chaînes ("formule de Stokes"). La même méthode permet de démontrer le théorème plus général que voici:

A.6. **Théorème.** *Soient I et $J: \Omega^* \to D^*$ deux morphismes de complexes qui coïncident sur $k \subset \Omega^0$, Ω^* désignant le complexe des formes différentielles non commutatives. Ils sont alors homotopes.*

A.7. **Exemple d'application.** Les deux cup-produits

$$\Omega^n \times \Omega^p \to \Omega^{n+p} \text{ et } \Omega^p \times \Omega^n \to \Omega^{n+p}$$

peuvent s'interpréter comme des morphismes de complexes

$$L \text{ et } R: \Omega^* \to \mathrm{Hom}(\Omega^*, \Omega^{*+n})$$

(multiplication à gauche ou à droite). De manière plus précise, les morphismes de complexes L et R sont définis par les formules $L(\omega)(\theta) = \omega.\theta$ et $R(\omega)(\theta) = (-1)^{np}(\theta.\omega)$. D'après le théorème précédent, ils sont homotopes. Dans la perspective de la cohomologie de de Rham non commutative, cette remarque permet de mieux comprendre le caractère commutatif (au sens gradué) de l'algèbre de cohomologie. Une autre interprétation est donnée dans [7] grâce à la théorie des opérations de Steenrod.

References

1. H. Cartan, *Théories cohomologiques*, Invent. Math. **35** (1976), 261–271.
2. A. Connes, *Non commutative differential geometry*, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. **62** (1985), 257–360.
3. J. Cuntz et D. Quillen, *Operators on noncommutative differential forms and cyclic homology*, J. Differential Geometry (à paraître).

4. A. Dold et R. Thom, *Quasifaserungen und unendliche symmetrische produkte*, Ann. of Math. **67** (1958), 239–281; Voir aussi *Une généralisation de la notion d'espace fibré. Application aux produits symétriques infinis*, C. R. Acad. Sci. Paris **242** (1956), 1680–1682.
5. M. Karoubi, *Homologie cyclique et K-théorie*, Astérisque **149**, Société Mathématique de France (1987).
6. ———, *Classes caractéristiques de fibrés feuilletés, holomorphes ou algébriques*, K-Theory **8** (1994), 153–211.
7. ———, *Formes différentielles non commutatives et opérations de Steenrod*, Topology (à paraître).
8. S. Mac Lane, *Homology*, Springer-Verlag, 1975.
9. P. May, *Simplicial objects in algebraic topology*, Van Nostrand, 1967.
10. E. Miller, *De Rham cohomology with arbitrary coefficients*, Topology **17** (1978), 193–203.
11. S. Steenrod et D. Epstein, *Cohomology operations*, Ann. of Math. Stud., no. 50, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1962.

Département de Mathématiques, Université Paris 7, 2 Place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France

E-mail address: `karoubi@mathp7.jussieu.fr`