PRODUIT CYCLIQUE D'ESPACES ET OPERATIONS DE STEENROD

par Max Karoubi

Dans cet article nous poursuivons notre étude des opérations de Steenrod commencée dans [3], en utilisant le produit cyclique des espaces et, indirectement, leur produit symétrique infini par Dold et Thom [1]. Afin de faciliter sa lecture, nous commencerons par rappeler quelques définitions fondamentales.

Soit X un ensemble simplicial pointé, de point base $*$, et soit R un anneau commutatif. Nous désignerons par L(X ; R) (ou simplement L(X) s'il n'y a pas de risque de confusion) le R-module simplicial libre de base X avec la relation $* = 0$. Il est bien connu que les groupes d'homotopie de L(X) sont (presque par définition) les groupes d'homologie réduits de X à coefficients dans R. En particulier, si X est un modèle simplicial de la sphère S^n (par exemple l'ensemble simplicial des applications continues des Δ_r dans S^n, r = 1, 2,..), L(X) est un modèle de l'espace d'Eilenberg-Mac Lane K(R ; n) : tous ses groupes d'homotopie sont nuls sauf le $n^{\text{ième}}$ qui est isomorphe à R.

Si Y est un deuxième ensemble simplicial connexe pointé, un accouplement R-bilinéaire

$$L(X) \wedge L(Y) \longrightarrow L(X \wedge Y)$$

est défini en associant à $x = \sum_i \lambda_i x_i$ et $y = \sum_j \mu_j y_j$ l'expression suivante[1] :

$$x \cup y = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j x_i \wedge y_j$$

Pour $X = S^q$ et $Y = S^r$ par exemple, il permet de définir une application

$$K(R, q) \wedge K(R, r) \longrightarrow K(R, q + r)$$

Elle induit le **cup-produit** usuel en cohomologie

$$H^q(X ; R) \times H^r(X ; R) \longrightarrow H^{q+r}(X ; R)$$

car $H^m(X ; R) \approx [X , K(R, m)]$ en général.

[1] où λ_i et $\mu_j \in R$ et où $x_i \in X$, $y_j \in Y$.

Un cas particulier important de cup-produit est la **puissance $p^{\text{ième}}$** d'un élément $x = \sum_i \lambda_i x_i$ de L(X) : elle s'écrit

$$x^p = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_p} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \ldots \lambda_{i_p} x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge .. \wedge x_{i_p}$$

dans $L(X^{\wedge p}) = L(X \wedge X \wedge \ldots \wedge X)$ (p facteurs X).

Supposons maintenant que p soit un nombre premier. Le **p-produit cyclique normalisé** de X est le quotient de $X^{\wedge p}$ par l'action du groupe cyclique C_p permutant circulairement les facteurs, la diagonale incluse naturellement dans $X^{\wedge p}$ étant identifiée au point base. Il est noté $CP_p^+(X)$. Si $\varphi : X^{\wedge p} \longrightarrow CP_p^+(X)$ désigne l'application canonique, il est clair que $\varphi(x^p) = \varphi((\sum_i \lambda_i x_i)^p)$ est la somme de p copies de $\wp(x)$, où l'application simpliciale

$$\wp : L(X) \longrightarrow L(CP_p^+(X))$$

est définie par la formule suivante

$$\wp(x) = \wp(\sum_i \lambda_i x_i) = \sum_{<i_1, i_2, \ldots, i_p>} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \ldots \lambda_{i_p} \varphi(x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge .. \wedge x_{i_p}) ,$$

$< i_1, i_2, \ldots, i_p >$ désignant la classe de la suite $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$ modulo l'action du groupe cyclique C_p. En suivant la terminologie de Steenrod [5], qui est tout à fait adaptée à notre contexte, nous appellerons $\wp(x)$ la **p-puissance réduite** de $x = \sum_i \lambda_i x_i$. Cette décomposition de $\varphi(x^p)$ est l'analogue simplicial de la propriété algébrique bien connue :

$$(\sum_i a_i)^p - \sum_i (a_i)^p \text{ divisible par p ,}$$

où p est un nombre premier, les a_i étant des variables commutant circulairement (dans un anneau non nécessairement commutatif).

Si p = 2 par exemple, on a

$$\wp(\sum_i \lambda_i x_i) = \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j \varphi(x_i \wedge x_j)$$

Le **p-produit cyclique** (non normalisé) $CP_p(X)$ est le quotient de $X^{\wedge p}$ par l'action du groupe cyclique C_p (la diagonale X n'étant pas identifiée au point base). La p-puissance réduite $\wp$ ne se factorise <u>pas</u> en général par $L(CP_p(X))$ à homotopie près, sauf pour R = **Z** et X connexe. En effet, dans ce cas, on peut remplacer L(X) par le produit symétrique infini de la réalisation géométrique $|X|$ de X [1]. La p-puissance réduite peut être alors définie par la formule suivante[2]

$$\wp'(\sum_i y_i) = \sum_{<i_1,i_2,\dots,i_p>} \varphi(y_{i_1} \wedge y_{i_2} \wedge .. \wedge y_{i_p})$$

Dans cette formule, $\varphi : |X|^{\wedge p} \longrightarrow CP_p(|X|)$ est l'application quotient, les indices i_α ne sont pas tous égaux et $< i_1, i_2, ..., i_p >$ désigne la classe de la suite $(i_1, i_2, ..., i_p)$ modulo l'action du groupe cyclique C_p. En réalisant géométriquement les ensembles simpliciaux (ce qui nous permet d'identifier X à $|X|$ par abus d'écriture), on peut alors démontrer que le diagramme suivant est commutatif à homotopie (pour R = **Z**) :

$$\begin{tikzcd} & L(CP_p^+(X)) & \\ L(X) \arrow[ur, "\wp"] \arrow[rr, "\wp'"] & & L(CP_p(X)) \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Considérons le cas particulier où X est la sphère S^q. La détermination des homologies de $CP_p(X)$ et $CP_p^+(X)$ est alors aisée, car $CP_p(X)$ est la suspension itérée d'un espace lenticulaire. Par exemple, $CP_2(S^q)$ (resp. $CP_2^+(S^q)$) a le type d'homotopie de $S^{q+1}(RP_{q-1})$ (resp.$S^{q+1}(RP_{q-1}) \vee S^{q+1}$). Si R = **Z**/p et si une base des espaces vectoriels d'homologie de $CP_p(X)$ ou $CP_p^+(X)$ à coefficients dans **Z**/p est choisie, les espaces $L(CP_p(X))$ et $L(CP_p^+(X))$ s'écrivent comme des produits d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane explicites (cf. l'annexe C).

Pour p impair, l'application $\wp$ ci-dessus détermine ainsi une opération cohomologique

$$K(\mathbf{Z}/p, q) \longrightarrow K(\mathbf{Z}/p, q + 1) \times K(\mathbf{Z}/p, q + 2) \times ...\times K(\mathbf{Z}/p, pq)$$

dont les composantes $K(\mathbf{Z}/p, q) \longrightarrow K(\mathbf{Z}/p, q+2j)$ sont en fait nulles pour $j \neq i(p - 1)$ et égales[3] aux opérations de Steenrod P^i pour $j = i(p - 1)$.
Pour p = 2, l'application

---

[2] $\sum_i y_i = (y_1, y_2, ..., y_n,..)$ appartenant au produit symétrique infini de $|X|$)

[3] A une normalisation près ; cf. 2.6 et [3].

$$\wp : L(S^q) \longrightarrow L(CP_2^+(S^q))$$

induit une opération cohomologique

$$K(\mathbf{Z}/2, q) \longrightarrow K(\mathbf{Z}/2, q + 1) \times K(\mathbf{Z}/2, q + 2) \times ... \times K(\mathbf{Z}/2, 2q)$$

dont les composantes $K(\mathbf{Z}/2, q) \longrightarrow K(\mathbf{Z}/2, q+j)$ sont les carrés de Steenrod Sq^j. Par ailleurs, considérons la cofibration homotopique

$$BC_p^+ \wedge X \longrightarrow EC_p^+ \wedge_{C_p} X^{\wedge p} \longrightarrow CP_p^+(X)$$

où BC_p^+ (resp.EC_p^+) est l'espace classifiant du groupe C_p (resp. son fibré universel) auquel on a ajouté un point en dehors. En particulier, l'application du produit cyclique normalisé $CP_p^+(X)$ dans la suspension de $BC_p^+ \wedge X$ (suite de Puppe) définit un homomorphisme $L(CP_p^+(X)) \longrightarrow L(S^1 \wedge BC_p^+ \wedge X)$. L'application composée $L(X) \xrightarrow{\wp} L(CP_p^+(X)) \longrightarrow L(S^1 \wedge BC_p^+ \wedge X)$, induit (en lui appliquant le foncteur π_n avec $n > 1$) des <u>opérations de Steenrod en homologie</u> (cf. 2.8 et 2.9)

$$H_n(X) \longrightarrow H_n(S^1 \wedge BC_p^+ \wedge X)$$

<u>pour tout anneau commutatif de coefficients</u>. En homologie mod. p, ces opérations sont duales des opérations de Steenrod usuelles (à une normalisation près).

Ce qui précède est détaillé dans les § 1 et 2 de cet article. Dans le § 3 (largement conjectural), nous généralisons les considérations précédentes en remplaçant le groupe cyclique par un sous-groupe quelconque du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$, en particulier un sous-groupe de Sylow. Enfin, dans le § 4, une autre généralisation est présentée dans le cadre de la cohomotopie : l'analogue de l'espace L(X) (pour $R = \mathbf{Z}$) et X <u>connexe</u> est $Q(X) = \Omega^\infty S^\infty(X)$. On utilise ici une description de cet espace détaillée dans [6] par exemple, ainsi que quelques résultats de J. Lannes [4]. Ce § 4 n'est pas entièrement original ; il recoupe des travaux antérieurs sur les invariants de James-Hopf. Citons notamment un article de Kuhn en relation avec le sujet (Transactions American Math. Society, 283, 1984, pp. 303 - 313).

Enfin, trois annexes sont consacrées à la démonstration de résultats techniques (cohomologie bivariante, transfert et espaces lenticulaires, etc...), dont l'auteur n'a pas trouvé trace sous cette forme dans la littérature consacrés à ces sujets. Ils permettent notamment de mieux conceptualiser les théorèmes démontrés dans les deux premiers paragraphes.

Remerciements. Je remercie W. Dwyer, N. Kuhn, J. Lannes, H. Miller et C. Mouët pour des commentaires fort utiles après une première rédaction de cet article, ainsi que R. Jardine qui a inspiré l'annexe C.

Table des matières

Les notations suivantes sont fréquemment utilisées dans cet article : si G est un groupe discret et X un G-espace, X_{hG} est l'espace de Borel associé, soit $X_{hG} =$ EG $\times_G$ X, EG désignant le G-fibré principal universel sur BG ; X_{hG} est le "quotient homotopique" de X par G. De même, X^{hG} désigne l'ensemble des "points fixes homotopiques", c'est-à-dire l'espace $\mathcal{S}(\xi)$ des sections du fibré ξ = EG $\times_G$ X sur BG. Les espaces X_G et X^G sont respectivement le quotient X/G et l'espace des points fixes de X par l'action de G. On a évidemment des applications $X_{hG} \longrightarrow X_G$ et $X^G \longrightarrow X^{hG}$. Elles ne sont pas des équivalences d'homotopie en général.

1. Produit cyclique d'espaces et puissance réduite.

1.1. Commençons ce paragraphe par quelques considérations classiques sur le transfert en homologie et en cohomologie usuelles. Soit G un groupe fini opérant à droite sur un ensemble simplicial T et soit T/G l'ensemble quotient (l'action de G n'est pas nécessairement libre). Un homomorphisme de "transfert"

$$\psi : L(T/G) \longrightarrow L(T)$$

est alors défini sur les éléments de base en posant $\psi(t) = \sum_{g\varepsilon G} \tilde{t}^{\,g}$, pour $t \in T/G$, $\tilde{t}$ relevé quelconque de t, $\tilde{t}^{\,g}$ désignant le transformé de $\tilde{t}$ par g. En fait, cette formule (qui est indépendante du choix de $\tilde{t}$) montre que l'image de ψ est contenue dans $L(T)^G$, ensemble des points fixes de L(T) par l'action de G. Dans le cadre topologique, X étant connexe, L(X) peut être remplacé par le produit symétrique infini (pour $R = \mathbf{Z}$) : il convient de remarquer que ψ est alors continue, induite en fait par une application continue de T/G dans $L(T)^G$.

1.2. Considérons la somme directe

$$\Delta(T) = L(T^G) \oplus L(T/G)$$

Une application (notée encore ψ) de $\Delta(T)$ dans $L(T)^G$ est définie en posant

$$\psi(t_0, t) = t_0 + \sum_{g\varepsilon G} \tilde{t}^{\,g}$$

Si T et U sont deux G-ensembles <u>pointés</u> , le “cup-produit”

$$\Delta(T) \wedge \Delta(U) \longrightarrow \Delta(T \wedge U)$$

associe aux deux couples (t_0, t) et (u_0, u) le couple (w_0, w) suivant :

1) $w_0 = t_0 \wedge u_0$

2) w est la classe dans $(T \wedge U)/G$ de $\tilde{w}$ dans $T \wedge U$ défini par

$$\tilde{w} = \sum_{g\varepsilon G} [(\tilde{t}^{\,g} \wedge u_0) + (t_0 \wedge \tilde{u}^g) + (\tilde{t}^{\,g} \wedge \tilde{u})]$$

Un accouplement

$$L(T)^G \wedge L(U)^G \longrightarrow L(T \wedge U)^G$$

est défini aussi de manière évidente. Enfin, si $s : BG \longrightarrow EG\ x_G\ T$ (resp. $s' : BG \longrightarrow EG\ x_G\ U$) est une section de la fibration $EG\ x_G\ T \longrightarrow BG$ (resp. $EG\ x_G\ U \longrightarrow BG$), le “cup-produit” de s et s' est la section $u \mapsto (\tilde{u}, s \wedge s')$, où $u \mapsto (\tilde{u}, s)$ (resp. $u \mapsto (\tilde{u}, s')$) est une section de la première fibration (resp. la seconde). Il est clair que les applications $\Delta(T) \longrightarrow L(T)^G$ et $L(T)^G \longrightarrow L(T)^{hG}$ sont compatibles avec ces structures “multiplicatives”.

1.3. Voici une variante de ce qui précède lorsque p = 0 dans R, p étant l'ordre du groupe G. Pour un ensemble T, posons de manière générale $T_0 = T/T^G$. Le transfert précédent induit alors un homomorphisme

$$L(T_0/G) \longrightarrow L(T)^G$$

En effet, si $x \in L(T^G)$, où T^G est considéré comme sous-ensemble de T/G, son transfert est un multiple de p, donc est nul dans L(T). Si on pose de même

$$\Delta_0(T) = L(T^G) \oplus L(T_0/G)$$

l'homomorphisme de $\Delta(T)$ dans $L(T)^G$ induit un homomorphisme

$$\Delta_0(T) \longrightarrow L(T)^G$$

Si U est un deuxième G-ensemble, le "cup-produit" $\Delta(T) \wedge \Delta(U) \longrightarrow \Delta(T \wedge U)$ défini plus haut induit un accouplement analogue sur les ensembles Δ_0 compatible avec l'homomorphisme de transfert $\Delta_0(T) \longrightarrow L(T)^G$ comme il a été explicité en 1.2.

1.4. Si X est un ensemble pointé, la "puissance $p^{\text{ième}}$" est une application

$$\varphi_p : L(X) \longrightarrow L(X^{\wedge p})$$

définie par la formule suivante, déjà utilisée en [3] :

$$\varphi_p(\sum \lambda_i x_i) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_p} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \ldots \lambda_{i_p} \, x_{i_1} \wedge x_{i_2} \ldots \wedge x_{i_p} \qquad (1)$$

Soient maintenant X et Y deux ensembles pointés. On définit un accouplement (ou produit) R-bilinéaire :

$$L(X^{\wedge p}) \wedge L(Y^{\wedge p}) \longrightarrow L((X \wedge Y)^{\wedge p})$$

C'est celui associé à l'accouplement évident d'ensembles $X^{\wedge p} \wedge Y^{\wedge p} \longrightarrow (X \wedge Y)^{\wedge p}$

Ces définitions étant posées, nous avons l'identité

$$\varphi_p(x.y) = \varphi_p(x)\varphi_p(y)$$

avec des notations évidentes. Si X est une sphère S^q et Y une sphère $S^{q'}$, celle-ci doit être légèrement modifiée par un automorphisme de $S^{p(q+q')}$, car le "produit"

$$L(S^{pq}) \wedge L(S^{pq'}) \longrightarrow L(S^{p(q+q')})$$

peut être défini indépendamment de la décomposition de chacune des sphères en p facteurs. Cet automorphisme est de degré $(-1)^{qq'p(p-1)/2}$.

1.5. Considérons maintenant le quotient de $X^{\wedge p}$ par l'action du groupe cyclique $C_p = \mathbf{Z}/p$ opérant par permutation circulaire des facteurs, la diagonale X étant identifiée au point base. L'ensemble obtenu est le **p-produit cyclique normalisé** de X ; il est noté $CP_p^+(X)$. Le groupe cyclique C_p opère de même sur l'ensemble des suites $(i_1, i_2, ..., i_p)$. On note $< i_1, i_2, ..., i_p >$ la classe de $(i_1, i_2, ..., i_p)$ dans l'ensemble quotient. Si p est un <u>nombre premier</u>[4], l'application composée

[4] Le cas où p est non premier sera envisagé au § 3.

$$\psi_p : L(X) \longrightarrow L(X^{\wedge p}) \longrightarrow L(CP_p^+(X))$$

s'écrit alors[5]

$$\psi_p(\sum \lambda_i x_i) = p \sum_{<i_1,i_2,\ldots,i_p>} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\ldots\lambda_{i_p} x_{i_1} \wedge x_{i_2} \ldots\wedge x_{i_p}$$

Cette identité permet de décrire l'application p-puissance réduite

$$\wp : L(X) \longrightarrow L(CP_p^+(X))$$

par la formule suivante :

$$\wp(\sum \lambda_i x_i) = \sum_{<i_1,i_2,\ldots,i_p>} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\ldots\lambda_{i_p} x_{i_1} \wedge x_{i_2} \ldots\wedge x_{i_p}$$

avec les conventions précisées dans la Note 5 (le point base étant toujours identifié à 0). Notons $\Delta_p^+(X)$ l'ensemble $\Delta_0(X^{\wedge p}) = L(X) \oplus L(CP_p^+(X))$ (avec les notations de 1.3) et considérons la composition suivante :

$$\gamma : \Delta_p^+(X) \longrightarrow L(X^{\wedge p})^{C_p} \longrightarrow L(X^{\wedge p})^{hC_p}$$

où la première application est le transfert (cf. 1.3).

1.6. THEOREME. *L'application* γ *est multiplicative* : *on a l'identité* $\gamma(z.t) = \gamma(z).\gamma(t)$ *pour* $z \in \Delta_p^+(X)$ *et* $t \in \Delta_p^+(Y)$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des considérations générales de 1.2-4.

1.7. Supposons maintenant que p = 0 dans R. Pour $x = \sum \lambda_i x_i \in L(X)$, posons $x_{(p)} = \sum (\lambda_i)^p x_i$. L'application $\overline{\wp} : L(X) \longrightarrow L(X) \oplus L(CP_p^+(X)) = \Delta_p^+(X)$ définie par $\overline{\wp}(x) = (x_{(p)}, \wp(x))$ est alors compatible avec la structure multiplicative sur le deuxième groupe définie en 1.2 et 1.3 (il convient de poser $T = X^{\wedge p}$, $U = Y^{\wedge p}$, $G = C_p$ avec les notations de 1.2). De manière précise, calculons $\wp[(\sum \lambda_i x_i).(\sum \mu_j y_j)] = \wp(\sum \lambda_i \mu_j x_i \wedge y_j)$. Il vient le développement suivant sur chaque simplexe :

$$\wp(\sum \lambda_i \mu_j x_i \wedge y_j) = \sum_{<(i_1,j_1),\ldots(i_p,j_p>} \lambda_{i_1}\mu_{j_1}\ldots \lambda_{i_p}\mu_{j_p} (x_{i_1} \wedge y_{j_1}) \wedge \ldots \wedge (x_{i_p} \wedge y_{j_p}) ,$$

où la somme est étendue à toutes les suites de couples (i_α, j_α) non tous égaux (le groupe C_p opérant ainsi avec des orbites de cardinal p). D'après les considérations générales de 1.2, les éléments de cette somme se répartissent en 3 types (cf. plus généralement le § 3) :

[5] si cette convention ne prête pas à confusion, on écrira de la même manière un élément de $L(X^{\wedge p})$ et sa classe dans $L(CP_p^+(X))$.

1. Les i_α et les j_β ne sont pas tous égaux ; on trouve alors

$$\wp(\sum \lambda_i x_i).\wp(\sum \mu_j y_j)$$

pour le produit défini en 1.2.

2. Les i_α sont égaux et les j_β ne sont pas tous égaux ; il vient alors

$$\sum_{(i,\ <j_1,j_2,..,j_p>)} (\lambda_i)^p \mu_{j_1}...\mu_{j_p}\ (x_i \wedge y_{j_1}) \wedge ... \wedge (x_i \wedge y_{j_p})$$

Cette dernière expression sera notée $x_{(p)}.\wp(y)$.

3. Les j_β sont égaux et les i_α ne sont pas tous égaux ; on trouve alors

$$\sum_{(<i_1,i_2,..,i_p>,\ j)} \lambda_{i_1}...\lambda_{i_p}(\mu_j)^p\ (x_{i_1} \wedge y_j) \wedge ... \wedge (x_{i_p} \wedge y_j)$$

expression qui sera notée de même $\wp(x).y_{(p)}$.

En résumé, nous obtenons ainsi le théorème suivant :

1.8. THEOREME. *Supposons que* p = 0 *dans* R. *Alors l'application*

$$\overline{\wp} : L(X) \longrightarrow L(X) \oplus L(CP_p^+(X)) = \Delta_p^+(X)$$

définie par $\overline{\wp}(x) = (x_{(p)}, \wp(x))$ *vérifie la propriété suivante*

$$\overline{\wp}(xy) = \overline{\wp}(x)\overline{\wp}(y)$$

pour $x \in L(X)$ *et* $y \in L(Y)$, *les deux membres de la formule appartenant à* $\Delta_p^+(X \wedge Y)$, *pour la structure multiplicative définie en* 1.2 *et* 1.3.

Considérons le cas particulier où X est la sphère S^q. Alors $X^{\wedge p} \cong S^{pq}$, le groupe cyclique C_p opérant de manière naturelle sur S^{pq}. Le lemme suivant est évident (remarquer que S^{pq} est le compactifié d'Alexandrof de $\mathbf{R}^{pq}$) :

1.9. LEMME. *L'espace quotient* S^{pq}/C_p *s'identifie à la* $(q+1)^{\text{ième}}$ *suspension (non réduite) de l'espace lenticulaire* S^{pq-q-1}/C_p, *où* C_p *opère sur* S^{pq-q-1} *par l'involution antipodique si* p = 2 *et grâce à la représentation induite sur* $\mathbf{C}^{q(p-1)/2}$ *par* $\rho \oplus \rho^2 \oplus ... \oplus \rho^{(p-1)/2}$, *où* ρ *est la représentation usuelle de* $\mathbf{Z}/p = \mu_p$ *dans* $\mathbf{C}^*$, *si* p *est impair*.

1.10. *Remarque*. Si X est une sphère, il en résulte que l'application canonique de X dans $CP_p(X)$ est homotopiquement triviale. Donc $CP_p^+(X)$ a le type d'homotopie du "wedge" $SX \vee CP_p(X)$, où SX désigne la suspension de X. En particulier, $CP_2^+(S^q)$ a le type d'homotopie de $S^{q+1} \vee S^{q+1}(RP_{q-1})$. Par conséquent, si $R = \mathbf{Z}/2$, l'espace vectoriel simplicial $L(CP^+_2(S^q))$ est le produit suivant d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane[6] :

$$K(\mathbf{Z}/2, q+1) \times K(\mathbf{Z}/2, q+2) \times \ldots \times K(\mathbf{Z}/2, 2q)$$

1.11. PROPOSITION. *Soit* $R = \mathbf{Z}/2$ *et soient* P^n *et* P^m *deux quotients de* S^n *et* S^m, *compactifiés d'Alexandrof de* $\mathbf{R}^n$ *et* $\mathbf{R}^m$, *par une action linéaire du groupe* $G = C_2$. *Alors l'application*

$$L(P^n) \wedge L(P^m) \longrightarrow L(P^{n+m})$$

définie en 1.2 induit le cup-produit usuel sur les espaces d'Eilenberg-Mac Lane $K(\mathbf{Z}/2, \alpha)$, *composantes des espaces* $L(P^s)$[7].

Démonstration. Les espaces P^n et P^m sont des suspensions itérées d'espaces projectifs réels et l'application est déduite d'un accouplement

$$S^{r+1}(RP_{q-1}) \wedge S^{t+1}(RP_{s-1}) \longrightarrow L(S^{r+t+1}(RP_{q+s-1}))$$

avec $r + q = n$ et $t + s = m$. Si q est pair, $H_n(S^{r+1}(RP_{q-1})) \cong \mathbf{Z}/2$ et l'application "dernière cellule" de $S^{r+1}(RP_{q-1})$ dans S^n est de degré un. On peut aussi remarquer qu'une autre interprétation de l'application "dernière cellule" $L(RP_q) \longrightarrow L(S^q)$ est le transfert mod. 2 qui est de degré 1 mod. 2. Ceci est clair si q est impair (car l'action de $\mathbf{Z}/2$ est compatible avec l'orientation). Dans le cas général, il suffit d'écrire le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} RP_{q-1} \arrow[r] & RP_q \arrow[r] & S^q \\ S^{q-1} \arrow[u] \arrow[r] & S^q \arrow[u] \arrow[r] & S^q \vee S^q \arrow[u] \end{tikzcd}$$

en remarquant que, dans tous les cas, l'application $RP_q \longrightarrow S^q$ induit un isomorphisme sur les groupes d'homologie à coefficients dans $\mathbf{Z}/2$. Le diagramme commutatif suivant (où les flèches verticales sont canoniquement scindées) permet alors de conclure en raisonnant par récurrence sur la dimension des espaces projectifs :

$$\begin{tikzcd} L(S^{r+1}(RP_{q-1})) \wedge L(S^{t+1}(RP_{s-1})) \arrow[r] \arrow[d] & L(S^{r+t+1}(RP_{q+s-1})) \arrow[d] \\ L(S^{r+q}) \wedge L(S^{t+s}) \arrow[r] & L(S^{r+t+q+s}) \end{tikzcd}$$

Revenons maintenant au cup-produit qui nous concerne plus particulièrement

---

[6] La base de l'homologie de $CP^+_2(S^q)$ est évidente (cf. l'annexe C).

[7] Chaque espace d'homologie étant de dimension un, il n'y a pas d'ambigüité sur le choix de la base (cf. l'annexe C).

ici[8] (avec les notations de 1.3) :

$$\Delta_0(S^n) \wedge \Delta_0(S^m) \longrightarrow \Delta_0(S^{n+m})$$

1.12. THEOREME. *L'accouplement précédent induit le cup-produit usuel au niveau des espaces d'Eilenberg-Mac Lane, composantes des espaces* $\Delta_0(S^n)$.

Démonstration. D'après la proposition 1.11, il induit déjà les accouplements usuels

$$K(\mathbf{Z}/2, q + \alpha) \wedge K(\mathbf{Z}/2, q' + \alpha') \longrightarrow K(\mathbf{Z}/2, q + q' + \alpha + \alpha'),$$

sauf peut-être pour α ou $\alpha' = 0$ ou 1. Dans ce cas, utilisons le transfert $\Delta_0(S^n) \longrightarrow L(S^n)^{hC_2}$ décrit en 1.1 et 1.2. Puisqu'il est compatible avec les structures multiplicatives d'après 1.3, il suffit de montrer qu'il induit un isomorphisme sur les groupes d'homotopie π_q et $\pi_{q+1} \cong \mathbf{Z}/2$. Pour le premier groupe, ceci résulte immédiatement de [3] 1.15. Pour le second, considérons la première opération cohomologique $K(\mathbf{Z}/2, q) \longrightarrow K(\mathbf{Z}/2, q+1)$ induite par la puissance $2^{\text{ième}}$ et qui résulte de la décomposition de $L(S^{2q})^{hC_2}$ en un produit d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane (cf. l'annexe C). Cette opération se factorise évidemment par $\Delta_2^+(S^q)$ grâce à la $2^{\text{ième}}$ puissance réduite. Il suffit donc de montrer que l'application $K(\mathbf{Z}/2, q) \longrightarrow K(\mathbf{Z}/2, q+1)$ n'est pas nulle. Puisque c'est l'homomorphisme de Bockstein Sq^1 d'après [3] 1.15, la démonstration du théorème est achevée (cf. aussi l'annexe B).

1.13. THEOREME. *Soit* p *un nombre premier impair,* et *soient* P^n *et* P^m *deux quotients de* S^n *et* S^m, *compactifiés d'Alexandrof de* $\mathbf{R}^n$ *et* $\mathbf{R}^m$, *par une action linéaire du groupe* C_p, *le sous-espace des points fixes étant de dimension strictement positive dans les deux cas*. *L'application*

$$\Delta(S^n) \wedge \Delta(S^m) \longrightarrow \Delta(S^{n+m})$$

définie en 1.3 (*pour* $R = \mathbf{Z}$) *induit alors le cup-produit usuel sur les espaces d'Eilenberg-Mac Lane facteurs des espaces* Δ *(compte tenu de diverses normalisations précisées plus loin).*

Démonstration. D'après l'annexe B, avec les notations de 1.3, on sait que le transfert

$$L(S^n/C_p) \longrightarrow L(S^n)^{hC_p}$$

induit un isomorphisme sur les groupes d'homotopie π_i si $i > q+1$, q désignant la dimension de l'espace des points fixes. Par ailleurs, d'après 1.3, il est compatible avec les structures multiplicatives et nous avons déterminé en [3] la structure multiplicative des $L(S^n)^{hC_p}$. Plus précisément, la composante neutre de $L(S^n)^{hC_p}$ a le type

[8] De manière générale, rappelons que pour tout G-espace X, on pose $\Delta_0(X) = L(X^G) \oplus L(X_0/G)$ avec $X_0 = X/X^G$ (cf. 1.3).

d'homotopie d'un produit d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane $K(\mathbf{Z}, n) \times \prod_r K(\mathbf{Z}/p, n-2r)$ avec $r > 0$. Pour $n + j$ pair, le choix des générateurs des groupes d'homotopie $\pi_j(L(S^n/C_p)) \approx \pi_j(L(S^n)^{hC_p})$ équivaut à celui des groupes de cohomologie $H^{n+j}(BC_p;\mathbf{Z})$ du groupe cyclique C_p, choix explicité dans la Note 1 de [3].

Pour être complet, il convient de préciser le choix du générateur de $\pi_q(L(S^q))$. Pour que celui-ci soit compatible avec les structures multiplicatives, il doit correspondre à celui du générateur naturel de $\pi_q(L((S^n)^{C_p})) \approx H^{n-q}(C_p ; \mathbf{Z})$ par l'homomorphisme de transfert

$$\Delta(S^n) = L(S^q) \oplus L(S^n/G) \longrightarrow L(S^n)^{hG}$$

Un cas particulièrement important est celui où $S^n = S^{pq}$ (produit contracté de p facteurs S^q). Dans ce cas, on a vu au § 1 de [3] que l'application $L(S^q) \longrightarrow L(S^{pq})^{hC_p}$ induit sur les générateurs "naturels" des groupes d'homotopie π_q la multiplication par $(-1)^s (m!)^q$ avec $m = (p-1)/2$ et $s = m(q^2 - q)/2$.

1.14. *Remarque.* Le cup-produit

$$L(CP_p^+(S^q)) \wedge L(CP_p^+(S^{q'})) \longrightarrow L(CP_p^+(S^{q+q'}))$$

introduit un signe au niveau des générateurs canoniques, car l'application

$$S^{pq} \wedge S^{pq'} \longrightarrow S^{p(q+q')}$$

est de degré $(-1)^{qq'p(p-1)/2}$ (comparer avec [3] § 1.7).

2. Définition des opérations de Steenrod par la puissance réduite mod. p.

2.1. Soit S l'ensemble des suites non constantes $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_p)$ telles que $\varepsilon_i = 0$ ou 1. Le groupe cyclique C_p opère transitivement sur S avec des orbites de cardinal p. Soit $\overline{S}$ l'ensemble quotient et soit $s : \overline{S} \longrightarrow S$ une section arbitraire. On définit une application

$$\Theta_p : L(X) \times L(X) \longrightarrow L(X^{\wedge p})$$

par la formule suivante (où on pose $s(\overline{u}) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_p)$ pour $\overline{u} \in \overline{S}$) :

$$\Theta_p(\sum \lambda_i^0 x_i^0, \sum \lambda_i^1 x_i^1) = \sum_{\overline{u}, (i_1, .., i_p)} \lambda_{i_1}^{e_1} \lambda_{i_2}^{e_2} ... \lambda_{i_p}^{e_p} \; x_{i_1}^{\varepsilon_1} \wedge x_{i_2}^{\varepsilon_2} \wedge ... \wedge x_{i_p}^{\varepsilon_p}$$

Si p = 2 par exemple, pour un choix évident de s, la formule s'écrit simplement

$$\Theta_2\Big(\sum \lambda_i^0\, x_i^0,\ \sum \lambda_i^1\, x_i^1\Big) = \sum_{(i,\,j)} \lambda_i^0\, \lambda_j^1\, x_i^0 \wedge x_j^1$$

c'est-à-dire comme le cup-produit usuel. Si p = 3, on peut choisir la formule suivante :

$$\Theta_3\Big(\sum \lambda_i^0\, x_i^0,\ \sum \lambda_i^1\, x_i^1\Big) = \sum \lambda_{i_1}^0\, \lambda_{i_2}^1\, \lambda_{i_3}^1\ \ x_{i_1}^0\ x_{i_2}^1\ x_{i_3}^1 + \sum \lambda_{i_1}^0\, \lambda_{i_2}^0\, \lambda_{i_3}^1\ \ x_{i_1}^0\ x_{i_2}^0\ x_{i_3}^1$$

(car (0, 1, 1) et (0, 0, 1) sont deux représentants de $\overline{S}$). Désignons par
$\upsilon : L(X^{\wedge p}) \longrightarrow L(CP_p^+(X))$ l'homomorphisme induit par l'application quotient
$X^{\wedge p} \longrightarrow CP_p^+(X)$.

2.2. THEOREME. *Soit* $\wp : L(X) \longrightarrow L(CP_p^+(X))$ *l'application définie par la* p-*puissance réduite (cf. 1.7) et soient* $x^0 = \sum \lambda_i^0\, x_i^0$ *et* $x^1 = \sum \lambda_i^1\, x_i^1$ *deux éléments de* L(X). *On a alors la formule suivante* :

$$\wp(x^0 + x^1) = \wp(x^0) + \wp(x^1) + \upsilon(\Theta_p(x^0, x^1))$$

Démonstration. Le développement de $\wp(x^0 + x^1)$ donne la somme suivante :

$$\wp(x^0) + \wp(x^1) + \sum_{\substack{(i_1, \ldots, i_p) \\ <\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p>}} \lambda_{i_1}^{e_1}\, \lambda_{i_2}^{e_2} \ldots \lambda_{i_p}^{e_p}\ \ x_{i_1}^{\varepsilon_1} \wedge x_{i_2}^{\varepsilon_2} \wedge \ldots \wedge x_{i_p}^{\varepsilon_p}\ ,$$

où (ε_i) est une suite non constante et où le $\sum$ est évidemment égal à $\upsilon(\Theta_p(x^0, x^1))$. Le théorème en résulte aussitôt.

2.3. Ce dernier résultat a une conséquence importante que nous allons décrire grâce au diagramme cocartésien homotopique

$$\begin{array}{ccc} BC_p \times X/BC_p & \longrightarrow & (EC_p \times_{C_p} X^{\wedge p})/BC_p \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & CP_p(X) \end{array}$$

De celui-ci on déduit une application canonique bien définie à homotopie près

$$CP_p(X) \longrightarrow S^1 \wedge (BC_p^+ \wedge X) = S^1 \wedge (BC_p \times X/BC_p)\ ,$$

où BC_p^+ désigne l'espace classifiant BC_p auquel on a rajouté un point en dehors. Notons que cette application se factorise par $CP_p^+(X) = CP_p(X)/X$ (cf. aussi 2.8). En désignant par $\wp^\#$ l'application composée de la puissance réduite $\wp : L(X) \longrightarrow L(CP_p^+(X))$ et de l'homomorphisme $L(CP_p^+(X)) \longrightarrow L(S^1 \wedge BC_p^+ \wedge X)$ induit par l'application précédente, nous pouvons écrire la formule d'additivité suivante (à homotopie près) :

$$\wp^\#(x^0 + x^1) = \wp^\#(x^0) + \wp^\#(x^1)$$

(car l'application $(x^0, x^1) \mapsto \wp^{\#}(x^0 + x^1) = \wp^{\#}(x^0) + \wp^{\#}(x^1)$ se factorise par $L(X^{\wedge p})$ à homotopie près). En particulier, si X est une sphère S^q et si $L(CP_p^+(S^q))$ est décomposé en un produit d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane (cf. l'annexe C), les applications $L(S^q) \longrightarrow L(CP_p^+(S^q)) \longrightarrow K(\mathbf{Z}/p, q+r)$ qu'on en déduit sont homotopiquement additives pour $q+ r < pq$. L'application puissance $p^{\text{ième}}$, soit de $L(S^q) = K(\mathbf{Z}/p, q)$ dans $L(S^{pq}) = K(\mathbf{Z}/p, pq)$ induit aussi une opération additive au niveau de la cohomologie pour des raisons évidentes. Nous allons déterminer ces opérations en commençant par le cas p = 2.

2.4. THEOREME. *Soit* $R = \mathbf{Z}/2$. *L'application*

$$\psi : K(\mathbf{Z}/2, q) = L(S^q) \longrightarrow \Delta_2^+(S^q)$$

où $\Delta_2^+(S^q) = L(S^q) \oplus [\, L(S^{q+1}(RP_{q-1}) \vee S^{q+1})\,]$

$$\approx K(\mathbf{Z}/2, q) \times K(\mathbf{Z}/2, q+1) \times K(\mathbf{Z}/2, q+2) \times \dots \times K(\mathbf{Z}/2, 2q)$$

induit l'opération cohomologique somme des carrés de Steenrod

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{\dim(x)} Sq^i(x)$$

Démonstration. Les opérations cohomologiques additives Sq^i sont caractérisées par les axiomes suivants :

1. $Sq^0 = 1$
2. Si $\dim(x) = n$, $Sq^n(x) = x^2$
3. $Sq^i(x) = 0$ si $i > \dim(x)$
4. $Sq^j(xy) = \sum_{k=0}^{j} Sq^k(x)\, Sq^{j-k}(x)$

Puisque l'opération cohomologique $\psi(x)$ vérifie les mêmes axiomes d'après ce qui précède, on a bien $\psi(x) = \varphi(x)$, ce qui démontre le théorème. Une autre démonstration peut être aisément construite à partir de [3] § 1 et l'annexe B.4.

2.5. Soit p un nombre premier impair tel que p = 0 dans R et soit τ l'endomorphisme idempotent de $L(CP_p^+(X))$ défini par la formule suivante :

$$\tau(x_1 \wedge \dots \wedge x_p) = \frac{1}{(p-1)\,!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p/C_p} x_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge x_{\sigma(p)} \;,$$

σ parcourant l'ensemble des classes à gauche de l'ensemble quotient $\mathfrak{S}_p/C_p$. Il est clair que l'image de l'application composée

$$L(X) \longrightarrow L(X) \oplus L(CP_p^+(X)) \xrightarrow{\tau} L(X) \oplus L(CP_p^+(X))$$

est contenue dans le sous-groupe invariant par τ. Cette remarque implique le résultat suivant :

2.6. THEOREME. *Soit* p *un nombre premier impair et soit* $R = \mathbf{Z}/p$.

L'application

$$K(\mathbf{Z}/p, q) = L(S^q) \longrightarrow \Delta_p^+(S^q) \ ,$$

où $\Delta_p^+(S^q) = L(S^q) \oplus L(S^{q+1} \vee (S^{pq}/C_p))$

$$\approx K(\mathbf{Z}/p, q) \times K(\mathbf{Z}/p, q+1) \times K(\mathbf{Z}/p, q+2) \times ... \times K(\mathbf{Z}/p, pq)$$

induit des opérations cohomologiques

$$H^q(X ; \mathbf{Z}/p) \longrightarrow H^{q+2r}(X ; \mathbf{Z}/p)$$

Celles-ci sont triviales si $r \not\equiv 0$ mod. $p - 1$. *Si* $r \equiv 0$ mod. $p-1$, *l'opération cohomologique obtenue*

$$P^i : H^q(X ; \mathbf{Z}/p) \longrightarrow H^{q+2i(p-1)}(X ; \mathbf{Z}/p)$$

est la puissance réduite de Steenrod (*cf.* [5] *et* [3], 1.14), *multipliée par le facteur de normalisation* $(-1)^r (m!)^q$ *explicité en* [3] 1.14, m *étant égal* $(p - 1)/2$ *et* r *à* $i.m + m(q^2 - q)/2)$.

Démonstration. Ce théorème résulte immédiatement de l'annexe B.1-2 et des considérations développées dans [3] § 1 (cf. 1.13 plus particulièrement).

2.7. *Remarque*. Ce qui précède montre que la puissance réduite $L(X) \longrightarrow L(CP_p^+(X))$ ne se factorise pas par $L(CP_p^h(X))$ en général, $CP_p^h(X)$ désignant l'espace de Borel $EC_p \times_{C_p} X^{\wedge p}$, l'application $L(EC_p \times_{C_p} X^{\wedge p}) \longrightarrow L(CP_p^+(X))$ étant induite par la deuxième projection. Par contre, nous verrons au § 4 que les opérations de Steenrod en cohomotopie (définies comme applications de $Q(X)$ dans $Q(CP_p(X))$ se factorisent par $Q(CP_p^h(X))$ (cf. aussi 2.11).

2.8. Réécrivons la cofibration homotopique établie en 2.3 :

$$BC_p^+ \wedge X \longrightarrow EC_p^+ \underset{C_p}{\wedge} X^{\wedge p} \longrightarrow CP_p^+(X) \ ,$$

BC_p^+ (resp. EC_p^+) désignant l'espace classifiant (resp. le fibré principal universel) du groupe cyclique C_p auquel on a ajouté un point en dehors. De cette cofibration, on déduit une application $CP_p^+(X) \longrightarrow S^1 \wedge BC_p^+ \wedge X$ (suite de Puppe). En lui appliquant le foncteur L et en composant par la puissance réduite $L(X) \longrightarrow L(CP_p^+)$ comme en 2.3, on obtient une application canonique

$$L(X) \longrightarrow L(S^1 \wedge BC_p^+ \wedge X)$$

Celle-ci permet de retrouver les opérations de Steenrod d'une manière différente pour un anneau commutatif de coefficients R quelconque. De manière plus précise, définissons une **théorie de la cohomologie bivariante** sur les espaces pointés X et Y en posant $HH(X, Y) = [Y, L(X)]$ (ensemble des classes d'homotopie d'applications pointées ; plus de détails sont proposés dans l'annexe A). Si X (resp. Y) est une sphère S^n, on trouve la cohomologie réduite $\tilde{H}^n(Y)$ (resp. l'homologie réduite $\tilde{H}_n(X)$). Les considérations précédentes permettent de définir une application

$$HH(X, Y) \longrightarrow HH(S^1 \wedge BC_p^+ \wedge X, Y)$$

En particulier, pour Y = la sphère S^n, on en déduit des <u>opérations de Steenrod en homologie</u>

$$H_n(X) \longrightarrow H_n(S^1 \wedge BC_p^+ \wedge X)$$

l'homologie étant prise à coefficients dans un anneau commutatif arbitraire R. Celles-ci sont à comparer aux opérations <u>cohomologiques</u>

$$H^n(X ; R) \longrightarrow H^{np}(X \times B\mathfrak{S}_p ; R_\varepsilon)$$

où R_ε est le système local induit par la signature sur $\mathfrak{S}_p$ à valeurs dans $\pm 1 \subset R$ définies dans [3]. Si $R = \mathbf{Z}/p$, la formule de Künneth permet d'écrire les opérations de Steenrod homologiques comme morphismes $H_n(X) \longrightarrow \bigoplus_r H_{n-r}(X)$ (les générateurs de l'homologie du groupe discret C_p étant choisis de manière explicite : cf. la Note 1 de [3]).

2.9. THEOREME. *Soit* $n - r > 0$. *Si* $R = \mathbf{Z}/p$, *le morphisme* $H_n(X) \longrightarrow H_{n-r}(X)$ *défini ci-dessus est dual de l'opération de Steenrod non normalisée* $D_s : H^{n-r}(X) \longrightarrow H^n(X)$ *définie en* [3] § 1.3 *et* 1.5 *avec* $s = p(n - r)-r$.

Démonstration. Ecrivons $L(S^1 \wedge BC_p^+)$ comme somme des groupes abéliens simpliciaux $\bigoplus_{\alpha=1}^{\infty} L(S^\alpha)$ (à homotopie près ; cf. l'annexe C). On a alors $L(S^1 \wedge BC_p^+ \wedge X) \approx \bigoplus_{\alpha=1}^{\infty} L(S^\alpha) \otimes L(X)$. Soit maintenant $u \in H^q(X)$, représentée par une application $f_u : X \longrightarrow L(S^q)$. L'opération de Steenrod $L(S^q) \longrightarrow L(S^1 \wedge BC_p^+ \wedge S^q) \approx \bigoplus_{\alpha=1}^{\infty} L(S^\alpha) \otimes L(S^q)$ induit une application $L(S^q) \longrightarrow L(S^q \wedge S^\alpha)$, donc, par composition avec f_u, une application $X \longrightarrow L(S^q \wedge S^\alpha)$, c'est-à-dire un élément $P_\alpha(u) \in H^{q+\alpha}(X)$. La correspondance $u \mapsto P_\alpha(u)$ définit l'opération de Steenrod <u>cohomologique</u> D_s avec $s = (p-1)q - \alpha$. Par ailleurs, soit $v \in H_{q+\alpha}(X)$, représentée par une application $S^{q+\alpha} \longrightarrow L(X)$. Alors, l'opération <u>homologique</u> associée à α, soit Q_α, s'obtient par la composition des morphismes suivants :

$$S^{q+\alpha} \longrightarrow L(X) \longrightarrow L(X \wedge S^{\alpha}) = L(X) \otimes L(S^{\alpha})$$

On a ainsi $Q_{\alpha}(v) \in H_{q+\alpha}(X \wedge S^{\alpha}) \cong H_q(X)$.
Le produit scalaire $<v, P_{\alpha}(u)>$ est le degré de la composition

$$S^{q+\alpha} \longrightarrow L(X) \longrightarrow L(S^q) \longrightarrow L(S^q \wedge S^{\alpha})$$

tandis que le produit scalaire $< Q_{\alpha}(v), u >$ est le degré de la composition

$$S^{q+\alpha} \longrightarrow L(X \wedge S^{\alpha}) \longrightarrow L(S^q \wedge S^{\alpha})$$

ou encore

$$S^{q+\alpha} \longrightarrow L(X) \longrightarrow L(X \wedge S^{\alpha}) \longrightarrow L(S^q \wedge S^{\alpha})$$

Il suffit donc de vérifier la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} L(X) & \longrightarrow & L(S^q) \\ \downarrow & & \downarrow \\ L(X \wedge S^{\alpha}) & \longrightarrow & L(S^q \wedge S^{\alpha}) \end{array}$$

Elle résulte de la naturalité de l'application $L(X) \longrightarrow L(X \wedge S^{\alpha})$.

2.10. *Remarque*. Soit x un élément du noyau de l'application de Steenrod en homologie $H_n(X) \longrightarrow H_n(S^1 \wedge BC_p^+ \wedge X)$. Grâce à la cofibration homotopique

$$BC_p^+ \wedge X \longrightarrow EC_p^+ \wedge_{C_p} X^{\wedge p} \longrightarrow CP_p^+(X)$$

on peut appliquer à x une opération de Steenrod secondaire.Le résultat appartient au conoyau de l'application $H_n(BC_p^+ \wedge X) \longrightarrow H_n(EC_p^+ \wedge_{C_p} X^{\wedge p})$, soit $H_n(BC_p \times X/BC_p) \longrightarrow H_n(EC_p \times_{C_p} X^{\wedge p})/BC_p)$. Ce cas se présente par exemple si x appartient à l'image de l'homomorphisme de Hurewicz $\pi_n^s(X) \longrightarrow H_n(X)$ (cf. le § 4).

2.11. *Remarque finale*. Dans ce paragraphe, à l'exception des dernières considérations, nous nous sommes restreints à $R = \mathbf{Z}/p$. Cependant, la 2-puissance réduite par exemple (pour $R = \mathbf{Z}$) définit aussi bien une application

$$K(\mathbf{Z}, q) \cong L(S^q) \longrightarrow \Delta_2(S^q) \cong K(\mathbf{Z}, q) \times K(\mathbf{Z}/2, q+2) \times K(\mathbf{Z}/2, q+4) \times \ldots \times K(\mathbf{Z}/2, 2q)$$

d'après l'annexe C. Cette extension des définitions est néanmoins illusoire. En effet, d'après la fin de l'annexe C, l'application canonique $\Delta_2(S^q) \longrightarrow \Delta_2^+(S^q)$ induit sur les espaces d'Eilenberg-Mac Lane facteurs des Δ le produit de l'application identique par l'homomorphisme de Bockstein. Puisque $Sq^{2r+1} = Sq^1.Sq^{2r}$, les opérations cohomologiques ainsi définies sur $K(\mathbf{Z}, q)$ se déduisent de celles définies sur $K(\mathbf{Z}/2,q)$ par l'application composée $K(\mathbf{Z}, q) \longrightarrow K(\mathbf{Z}/2, q) \xrightarrow{Sq^{2i}} K(\mathbf{Z}/2, q+2i)$.

3. Généralisation.

3.1. Nous nous proposons de généraliser partiellement les considérations des deux paragraphes précédents en remplaçant le groupe cyclique C_p, p premier, par un sous-groupe G du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$, n étant un entier quelconque. Pour simplifier les considérations du début, nous supposerons que R = **Z**, ce qui permet de remplacer L(X), X connexe pointé, par le produit symétrique infini de X, d'un maniement plus simple et plus géométrique [1].

Si $I = (i_1, i_2, ..., i_n)$ est une suite d'entiers et si $g \in G$, nous faisons opérer g <u>à droite</u> sur cette suite en posant $I^g = (i_{g(1)}, i_{g(2)}, ..., i_{g(n)})$. De manière parallèle, g opère à droite sur $X^{\wedge n}$ par $(x_1, x_2, ..., x_n)^g = (x_{g(1)}, x_{g(2)}, ..., x_{g(n)})$. De manière générale, si U est un G-espace et si H est un sous-groupe de G, on désigne par $U^{(H)}$ la réunion des sous-espaces de U formé des éléments invariants par H ou par un sous-groupe conjugué gHg^{-1}. En particulier, considérons la réunion

$$(X^{\wedge n})^{(H)} = \bigcup_g (X^{\wedge n})^{gHg^{-1}} ,$$

évidemment invariante par l'action de G. L'espace quotient $(X^{\wedge n})^{(H)}/G$, noté simplement $X_{<H>}$, va jouer le rôle du produit cyclique de X étudié dans le paragraphe précédent.

De manière précise, soit $x = \sum_{i=1}^{m} x_i$ un élément de L(X) (puissance symétrique infinie de X). La puissance $n^{\text{ième}}$, soit x^n, appartient à $L(X^{\wedge n})$ et s'écrit comme la somme de m^n termes $x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge ... \wedge x_{i_n}$, somme qui peut se décomposer de la manière suivante suivant le "type" de la suite $I = (i_1, i_2, ..., i_n)$. Le <u>type</u> <H> est formé de suites I dont le stabilisateur est un sous-groupe conjugué de H. Leur orbite $<i_1, i_2, ..., i_n>$ est donc de cardinal |G|/|H|. Bien entendu, le type <H> ne dépend que de la classe de conjugaison (notée aussi <H>) de H dans G. Si $G = C_p$, p premier par exemple, il n'y a que deux types : le groupe G lui-même (il s'agit alors des suites constantes) et le groupe trivial (les indices i_α ne sont pas tous égaux).

A chaque type <H>, on associe la "H-puissance réduite" de x comme l'expression suivante appartenant à $L(X_{<H>}) := L((X^{\wedge n})^{(H)}/G))$:

$$\sum_{<i_1, i_2, ..., i_n>} x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge ... \wedge x_{i_n}$$

Cette somme est étendue aux suites de type <H>. La "puissance réduite totale" est l'application

$$\wp : L(X) \longrightarrow \bigoplus_{<H>} L(X_{<H>})$$

où chaque composante de $\wp$, soit

$$\wp_H : L(X) \longrightarrow L(X_{<H>})$$

correspond à la somme explicitée ci-dessus. En particulier, pour H réduit à l'élément neutre 0, on en déduit une application remarquable

$$\wp_0 : L(X) \longrightarrow L(X^{\wedge n}/G) = L(X_{<0>})$$

Un homomorphisme de "transfert"

$$\phi_H : L(X_{<H>}) \longrightarrow L(X^{\wedge n})^G$$

est défini en associant à la classe de l'élément $x = x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n$ dans $(X^{\wedge n})^{gHg^{-1}}$ la somme suivante

$$y = \sum_{t \in G/H'} x^{t^{-1}}$$

où t parcourt l'ensemble des classes à gauche de G par $H' = gHg^{-1}$. Cette somme est bien invariante par G. Elle est indépendante du choix de g : si r est le cardinal de H, il suffit de remarquer que r.y est la somme des x^t, t parcourant le groupe G. Puisque $L(X^{\wedge n})$ est un **Z**-module libre, l'élément y est bien défini par la formule ci-dessus.

3.2. THEOREME. *L'application composée*

$$L(X) \longrightarrow \bigoplus_{<H>} L(X_{<H>}) \xrightarrow{\sum \phi_H} L(X^{\wedge n})^G \longrightarrow L(X^{\wedge n})^{hG}$$

coïncide avec la puissance $n^{\text{ième}}$ *équivariante définie dans* [3].

Démonstration. Il suffit de décomposer $(\sum x_i)^n$ suivant les différentes classes <H> de sous-groupes de G.

3.3. Soit K un deuxième sous-groupe de G tel que $H \subset K$. On suppose que G opère à droite sur deux espaces pointés U et V. On peut alors définir de manière générale un "cup-produit" qui généralise celui introduit en 1.2, soit :

$$\varphi : L(U^{(H)}/G) \wedge L(V^{(K)}/G) \longrightarrow L((U \wedge V)^{(H)}/G) ,$$

par la formule suivante

$$\varphi(u, v) = \sum_{g \in G/K'} u^g \wedge v$$

où $K' = \alpha K \alpha^{-1}$ si $u \in \alpha H \alpha^{-1}$. Il convient de vérifier que cette somme ne dépend que des classes de u et v dans $U^{(H)}/G$ et $V^{(K)}/G$ respectivement. Pour u ceci est clair, car l'application $g \mapsto \beta g$ induit une translation de G/K' (défini par la relation d'équivalence $x \sim y$ ssi $x^{-1}y \in K'$). Par ailleurs, $\varphi(u, v^\beta) = \sum_{g \in G/K'} u^{g\beta^{-1}} \wedge v$ et la translation $g \mapsto g\beta^{-1}$ induit un isomorphisme de G/K' sur G/K" avec $K" =$
$\beta\alpha K \alpha^{-1}\beta^{-1}$. Enfin, la somme définissant $\varphi(u, v)$ est indépendante du choix de α. En effet, elle peut s'écrire aussi $\sum_{g \in G/K'} u \wedge v^{g^{-1}}$, ou encore $\frac{1}{r} \sum_{g \in G} u \wedge v^{g^{-1}}$, r étant le cardinal de K.

3.4. Un exemple intéressant est celui où G est un p-sous-groupe de Sylow[9] du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ avec $n = p^r$, p premier. On désigne par $S = S_{p^r}$ un tel sous-groupe. Considérons le quotient (noté $\overline{X^{\wedge n}}$) de $X^{\wedge n}$ par l'action de S. La puissance réduite (correspondant au sous-groupe trivial H = 0) est alors définie comme une application

$$\wp_0 : L(X) \longrightarrow L(\overline{X^{\wedge n}})$$

qui associe à $x = \sum x_i$ l'élément suivant de $L(\overline{X^{\wedge n}})$:

$$\wp_0(x) = \sum_{<i_1, i_2, \ldots, i_n>} x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \ldots \wedge x_{i_n}$$

Dans cette expression $I = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ est une suite d'indices sur lesquels le groupe S opère librement (i.e. $(i_{g(1)}, i_{g(2)}, \ldots, i_{g(n)}) \neq (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ si $g \neq e$ et $< i_1, i_2, \ldots, i_n >$ désigne une orbite ($\wp_0$ a été défini dans un contexte plus général en 3.1). Si S n'opère pas librement sur la suite I, il existe un élément g d'ordre une puissance de p tel que $(i_{g(1)}, i_{g(2)}, \ldots, i_{g(n)}) = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$; en décomposant la permutation g en cycles, on voit que p indices i_α au moins sont égaux.

3.5. Il convient de noter la non-trivialité de l'opération cohomologique $\wp_0 : L(X) \longrightarrow L(X^{\wedge n}/S)$. Celle-ci est sans doute reliée aux compositions d'opérations de Steenrod classiques. Vérifions ce fait pour r = 2, soit $n = p^2$. Dans ce cas, le groupe $S = S_{p^2}$ est de cardinal p^{p+1} ; il est engendré par p cycles d'ordre p, soit $(1, 2, .., p), (p+1, p+2, \ldots, 2p), \ldots, (p^2 - p + 1, \ldots, p^2)$ ainsi que par le cycle consistant à permuter circulairement les paquets précédents. Le fait que S opére

[9] Rappelons que deux sous-groupes de Sylow sont conjugués.

librement sur une suite $(i_1, i_2, ..., i_{p^2})$ revient donc à écrire que chaque paquet $(i_1, .., i_p)$, $(i_{p+1}, .., i_{2p})$, etc... n'est pas formé de suites constantes et que les p paquets ne sont pas tous égaux. Considérons maintenant la composition

$$L(X) \longrightarrow L(X^{\wedge n}/S) \longrightarrow L(X^{\wedge n})^S \longrightarrow L(X^{\wedge n})^{C_p \times C_p} \longrightarrow L(X^{\wedge n})^{h(C_p \times C_p)} \quad \mathbf{(1)}$$

où la deuxième application est le transfert (cf.1.1 et 3.1) et la troisième la restriction, le groupe $C_p \times C_p$ étant inclus dans S par la permutation simultanée des paquets précédents entre eux et dans leur intérieur. Nous pouvons de même composer la puissance de Steenrod $L(X) \longrightarrow L(X^{\wedge p})^{hC_p}$ avec elle-même (cf. [3] 2.11). La différence est la somme $\sum[t_0t_sD_{0,s}(x) + t_rt_0D_{r,0}(x) - t_0t_0D_{0,0}(x)]$ avec les notations de [3] 2.11. On en déduit que la composition **(1)** ci-dessus est la somme $\sum_{r\neq 0, s\neq 0} t_rt_sD_{r,s}(x)$ qui n'est pas triviale en général.

3.6. Plaçons nous maintenant dans le cadre simplicial, ce qui nous permettra de considérer un anneau commutatif de base quelconque R. Un élément x de L(X) = L(X ; R) s'écrit alors comme une somme $\sum \lambda_i x_i$, où les λ_i sont des scalaires appartenant à R (<u>les x_i étant distincts</u>). On exprime l'élément $\wp_0(x)$ de manière légèrement différente comme la somme

$$\sum_{<i_1, i_2, ..., i_n>} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2} ... \lambda_{i_n} \; x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge ... \wedge x_{i_n}$$

où la suite $(i_1, i_2, ..., i_n)$ est de stabilisateur trivial. Cependant, <u>l'application ainsi définie n'est pas simpliciale,</u> car le cardinal des orbites par l'action de $S = S_{p^r}$ peut se modifier par une opération face. Pour remédier à cet inconvénient, notons $X_0^{\wedge n}$ le sous-ensemble de $X^{\wedge n}$ formé des suites $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ dont le stabilisateur (pour l'action de S) n'est pas trivial. Ce sous-ensemble est invariant par l'action de S. On pose $X_0^{\bar{\wedge} n} = X_0^{\wedge n}/S$. Si on interprète la puissance réduite comme une application

$$L(X) \longrightarrow L(X^{\bar{\wedge} n}/X_0^{\bar{\wedge} n}) ,$$

elle devient alors simpliciale. Cette définition est bien une généralisation de la situation développée dans le paragraphe précédent. En effet, si on choisit r = 1, $S = C_p$, on a $X_0^{\wedge n} = X$ et $X^{\bar{\wedge} n}/X_0^{\bar{\wedge} n} = CP_p^+(X)$.

3.7. THEOREME. *La puissance réduite définit un morphisme simplicial*

$$\wp : L(X) \longrightarrow L(X^{\bar{\wedge} n}/X_0^{\bar{\wedge} n})$$

Avec des notations évidentes, elle peut être définie simplement par la formule suivante

$$\wp(x) = \frac{1}{|S_{pr}|} \cdot (x)^{p^r}$$

Démonstration. Elle résulte immédiatement des considérations précédentes grâce à la méthode décrite en 1.5.

3.8. PROPOSITION. *L'espace quotient* $\bar{X}^{\wedge n}/\bar{X}_0^{\wedge n}$ *a le type d'homotopie du quotient des espaces de Borel correspondant*

$$ES\, x_S\, X^{\wedge n}/ES\, x_S\, X_0^{\wedge n}$$

Démonstration. En effet, l'action de S est libre sur le complémentaire $X^{\wedge n} - X_0^{\wedge n}$. L'espace quotient écrit dans l'énoncé est donc égal à $\bar{X}^{\wedge n} - \bar{X}_0^{\wedge n}$, car $\bar{X}^{\wedge n} = X^{\wedge n}/S$ et $\bar{X}_0^{\wedge n} = X_0^{\wedge n}/S$.

3.9. Soit $R = \mathbf{Z}/p^s$, s étant un entier arbitraire. Les espaces $\bar{X}^{\wedge n}$ et $\bar{X}_0^{\wedge n}$ étant difficiles à décrire directement, nous allons introduire une variante en remplaçant S par le groupe symétrique $G = \mathfrak{S}_n$ lui-même. De manière précise, définissons un endomorphisme τ de $L(\bar{X}^{\wedge n})$ en posant

$$\tau(x_1 \wedge ... \wedge x_n) = \frac{|S|}{|G|} \sum_{\sigma \in G/S} x_{\sigma(1)} \wedge ... \wedge x_{\sigma(n)}$$

Alors τ est idempotent, car c'est la composée $\tau_1.\tau_2$ de deux applications telles que $\tau_2.\tau_1$ = Id. D'une part, $\tau_1 : L(X^{\wedge n}/G) \longrightarrow L(X^{\wedge n}/S)$ est définie par la même formule que τ ; d'autre part $\tau_2 : L(X^{\wedge n}/S) \longrightarrow L(X^{\wedge n}/G)$ est l'application quotient. L'image de la puissance réduite $L(X) \longrightarrow L(X^{\wedge n}/S)$ est invariante par τ : elle est donc contenue dans $L(X^{\wedge n}/G)$, considéré comme sous-groupe de $L(X^{\wedge n}/S)$ par l'application τ_1. Soit $X_1^{\wedge n}$ la réunion des sous-espaces conjugués de $X_0^{\wedge n}$ par l'action des éléments g de G, c'est-à-dire $X_1^{\wedge n} = = \cup\, g\, X_0^{\wedge n}\, g^{-1}$. Alors $X_1^{\wedge n}$ est la réunion des sous-espaces de $X^{\wedge n}$ formé des produits $x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n$, où p élements x_α au moins sont égaux comme on le voit en décomposant les permutations en cycles (cf. 3.4).

3.10. THEOREME. *Soit* $R = \mathbf{Z}/p^s$, s *étant un entier arbitraire avec* $n = p^r$. *Alors la* n-*puissance réduite mod.* p^s *définit une application simpliciale*

$$L(X) \longrightarrow L(EG\, x_G\, X^{\wedge n}/EG\, x_G\, X_1^{\wedge n})$$

où $G = \mathfrak{S}_n$ *et où* $X_1^{\wedge n}$ *est la réunion de sous-espaces de* $X^{\wedge n}$ *formé des produits* $(x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n)$ *dans lesquels* p *élements* x_α *au moins sont égaux.*

Considérons le cas particulier où X est une sphère de dimension q. Alors $X^{\wedge n}$ est le compactifié d'Alexandrof de $\mathbf{R}^{qn}$. Le sous-espace $X_1^{\wedge n}$ est réunion de compactifiés d'Alexandrof de sous-espaces de $\mathbf{R}^{qn}$ de dimension m = q(n-p+1) qui sont obtenus en choisissant p coordonnées parmi n (il y a donc $\binom{n}{p}$ tels sous-espaces). Nous allons déterminer une partie importante de la topologie de l'espace $X_1^{\wedge n}$ grâce au lemme suivant :

3.11. LEMME. *L'espace* $X_1^{\wedge n}$ *contient en facteur direct (à homotopie équivariante près) le bouquet de sphères* $\bigvee_t S^m$, *où* $m = q(n - p + 1)$, *et où* t *parcourt l'ensemble des parties à* p *éléments d'un ensemble à* n *éléments* ($n = p^r$ *comme plus haut).*

Démonstration. L'espace $X_1^{\wedge n}$ est le compactifié d'Alexandrof de la réunion de sous-espaces de $\mathbf{R}^n$ qui sont de dimension m : chacun de ces sous-espaces est l'image par l'action de G du sous-espace V défini par l'ensemble des vecteurs s'écrivant $(x_1, x_2, ..., x_n)$, où x_i appartient à $\mathbf{R}^q$ et où $x_1 = x_2 = ... = x_p$. On définit maintenant une application

$$\varphi : \bigvee_t S^m \longrightarrow X_1^{\wedge n}$$

où chaque flèche $S^m \longrightarrow X_1^{\wedge n}$ est induite par l'inclusion d'un sous-espace. Par ailleurs $W^g = (\bigcup_{h \neq g} V^h) \cap V^g$ est un sous-ensemble de codimension ≥ 1 de V^g. Il existe donc une application de degré un, soit $\theta_g : (V^+)^g \longrightarrow (V^+)^g$ (où V^+ désigne la sphère S^m, compactifiée d'Alexandrof de $\mathbf{R}^m$) telle que que $\theta_g(W^g) = \{\infty\}$. On définit alors une application équivariante

$$\psi : X_1^{\wedge n} \longrightarrow \bigvee_t S^m$$

comme étant égale à θ_g sur chaque cellule de dimension m, $\{\infty\}$ ailleurs. Il est clair que la composée $\psi.\varphi$ est homotope à l'identité de manière équivariante.

3.12. THEOREME. *Pour* $i < qn$, *l'homologie relative* $H_i(X^{\wedge n}, X_1^{\wedge n})$ *(à* *coefficients dans* R*) contient en facteur direct* $H_{i-m}(BK ; R)$, *où* $K = \mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_{n-p}$ *est le sous-groupe évident de* $G = \mathfrak{S}_n$ ($n = p^r$; $m = q(n - p + 1)$).

Démonstration. Cette homologie relative est nulle en degrés > qn. Pour les degrés inférieurs à qn, c'est celle de la paire ($EG \times_G X^{\wedge n}$, $EG \times_G X_1^{\wedge n}$), donc de $EG \times_G X_1^{\wedge n}$ d'après l'isomorphisme de Thom appliqué au fibré $EG \times_G X^{\wedge n}$ sur BG (ce fibré est orienté si p est impair ; si p = 2, il convient d'utiliser des coefficients locaux). Par ailleurs, le lemme précédent implique que l'espace $EG \times_G X_1^{\wedge n}$ contient en facteur direct $EG \times_G Y$, où $Y = \bigvee_t S^m$, t parcourant l'espace homogène G/K. D'après le lemme de Shapiro et la suite spectrale de Serre, on a par ailleurs $H_i(EG \times_G Y) \cong H_{i-m}(BK)$, ce qui achève la démonstration du théorème.

3.13. *Remarque*. Le théorème précédent permet de définir pour tout espace T des opérations cohomologiques :

$$H^q(T ; Z/p^s) \longrightarrow H^i(T ; G_i)$$

avec $n = p^r$; $m = q(n - p + 1)$; $i < qn$ et où $G_i = H^{i-m}(BK ; \mathbf{Z}/p^s)$, avec $K = \mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_{n-p}$). Un problème ouvert est d'étudier leur relation avec les opérations de Steenrod usuelles.

4. Opérations de Steenrod en cohomotopie[10].

4.1. Si X est un espace pointé connexe, rappelons d'abord que $QX = \Omega^\infty S^\infty X$ peut être décrit à partir du groupe symétrique infini de la manière suivante (cf. [6] par exemple). Dans la réunion disjointe des espaces suivants (où $\mathbf{R}^\infty$ désigne la réunion de tous les espaces $\mathbf{R}^n$) :

$$X_n = \mathbf{R}^{\infty(n)} \times_{\mathfrak{S}_n} X^n$$

identifions[11] l'élément de X_{n+m} défini par

$$(t_1, t_2, ..., t_n, t_{n+1}, ..., t_{n+m} ; x_1, x_2, ..., x_n, *, *, ..., *) ,$$

où $*$ désigne le point base, à l'élément de X_n défini par

$$(t_1, t_2, ..., t_n ; x_1, x_2, ..., x_n)$$

---

[10] Comme il a été signalé dans l'introduction, ce paragraphe ne prétend pas être totalement original. Il est relié à de multiples travaux antérieurs sur les invariants de James-Hopf et les scindages de Snaith. Cependant, la comparaison avec les opérations de Steenrod semble être nouvelle.

[11] De manière générale on désigne par $Y^{(n)}$ le sous-espace de Y^n formé des suites $(y_1, y_2, ..., y_n)$ telles que les éléments y_i soient distincts.

Il est alors démontré dans [6] par exemple que l'espace ainsi obtenu a le type d'homotopie de QX. Cet espace peut être muni d'une loi + de X_n x X_m dans X_{n+m} . Elle associe à $(t, x) = (t_1, ..., t_n ; x_1,..., x_n)$

et $(u, y) = (u_1, u_2, ..., u_m ; y_1, y_2, ..., y_m)$

la suite

$$(t, x) + (u, y) = (t_1, t_2, ..., t_n, \tilde{u}_1, .., \tilde{u}_m ; x_1, x_2, ..., x_n, y_1,.., y_m),$$

où les ũ sont les images des u dans un <u>autre</u> facteur $\mathbf{R}^\infty$. Cette loi + est indépendante du choix de cet autre facteur à homotopie près.

L'élément $(t_1, t_2, ..., t_n ; x_1, x_2, ..., x_n)$ considéré plus haut sera noté de manière plus suggestive sous la forme

$$t_1.x_1 + t_2.x_2 + ..+ t_n.x_n$$

où les t_i sont <u>distincts</u>. En particulier, la projection sur le facteur x du couple (t, x) avec $t = (t_1, t_2, ..., t_n)$ et $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ (ce qui revient à projeter $\mathbf{R}^\infty$ sur le point base) induit une application

$$QX \longrightarrow L(X) ,$$

où L(X) désigne le produit symétrique infini (ou son groupe symétrisé). Si X est la sphère S^q par exemple, nous retrouvons l'application canonique $QS^q \longrightarrow K(\mathbf{Z}, q)$: elle induit l'homomorphisme de Hurewicz <u>cohomologique</u> $\pi_s^q(X) \longrightarrow H^q(X)$ de la cohomotopie stable vers la cohomologie pour tout espace X. De manière duale, en appliquant le foncteur π_n au morphisme $QX \longrightarrow L(X)$, on trouve l'homomorphisme de Hurewicz <u>homologique</u> $\pi_n^s(X) \longrightarrow H_n(X)$.

4.2. Le “cup-produit” classique

$$QX \wedge QY \longrightarrow Q(X \wedge Y)$$

est induit par l'accouplement $X_m \wedge Y_n \longrightarrow (X \wedge Y)_{mn}$ défini par

$$[(t_i, x_i), (t_j, x_j)] \mapsto (t_it_j, x_i \wedge x_j)$$

où t_it_j désigne le couple $(t_i, t_j) \in \mathbf{R}^\infty \oplus \mathbf{R}^\infty \cong \mathbf{R}^\infty$. Le résultat final sera noté de manière abrégée

$$\sum_{(i,j)} t_it_j\, x_i \wedge x_j$$

On définit de même une opération “puissance $p^{\text{ième}}$” :

$$\phi : QX \longrightarrow QX^{\wedge p}$$

par la formule

$$(t, x) \mapsto \sum_{(i_1,i_2,...,i_p)} t_{i_1} . t_{i_2} . . t_{i_p}\, x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge ... \wedge x_{i_p} .$$

(somme de n^p produits).

Grâce à l'identification de $\mathbf{R}^\infty$ à $\mathbf{R}^\infty \oplus \mathbf{R}^\infty \ldots \oplus \mathbf{R}^\infty$, le groupe symétrique $\mathfrak{S}_p$ opère <u>à droite</u> sur $QX^{\wedge p}$ par la formule suivante (σ étant un élément de $\mathfrak{S}_p$) :

$$\sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_p)} t_{i_1}.t_{i_2}.\,.\,t_{i_p}\, x_{i_1}\wedge x_{i_2}\wedge \ldots \wedge x_{i_p}$$
$$\mapsto \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_p)} t_{i_{\sigma(1)}}.t_{i_{\sigma(2)}}.\,.\,t_{\sigma(p)}\, x_{\sigma(1)}\wedge x_{\sigma(2)}\wedge \ldots \wedge x_{\sigma(p)}.$$

4.3. Il est clair que l'image de ϕ est invariante par cette action. La puissance $2^{\text{ième}}$ par exemple est définie par

$$(t_i, x_j) \mapsto \sum t_i.t_j\,.\,x_i \wedge x_j$$

L'action du groupe $\mathbf{Z}/2$ sur $\mathbf{R}^\infty \oplus \mathbf{R}^\infty$ et $X \wedge X$ équivaut à permuter (i, j) et (j, i), ce qui définit un élément d'ordre 2 dans $\mathfrak{S}_{n^2}$.

Etudions plus en détail l'action de $\mathfrak{S}_p$ sur $QX^{\wedge p}$ décrite plus haut. Elle est en fait le produit de deux actions qui commutent entre elles : celle (notée $\aleph_1$) induite par l'action de $\mathfrak{S}_p$ sur $\mathbf{R}^\infty \cong \mathbf{R}^\infty \oplus \ldots \oplus \mathbf{R}^\infty$ (p facteurs $\mathbf{R}^\infty$) et une deuxième (notée $\aleph_2$), induite par l'action de $\mathfrak{S}_p$ sur $X^{\wedge p}$, donc sur $QX^{\wedge p}$.

4.4. LEMME. *L'action $\aleph_1$ est homotopiquement triviale.*
Démonstration. Il est clair que le modèle homotopique de QY ne change pas si on remplace $\mathbf{R}^\infty$ par $\mathbf{R}^\infty \oplus (\mathbf{R}^\infty \oplus \ldots \oplus \mathbf{R}^\infty)$. Sur le premier facteur $\mathbf{R}^\infty$, $\mathfrak{S}_p$ opère trivialement (action induite sur QY notée $\aleph_0$). Sur le second facteur ($\mathbf{R}^\infty \oplus \mathbf{R}^\infty \ldots \oplus \mathbf{R}^\infty$), $\mathfrak{S}_p$ opère par permutation des facteurs $\mathbf{R}^\infty$. On obtient ainsi des équivalences d'homotopie équivariantes

$$(QY, \aleph_0) \longrightarrow (QY, \aleph_0 \oplus \aleph_1) \longleftarrow (QY, \aleph_1)$$

Le lemme en résulte.

4.5. Ainsi, à condition d'inverser formellement dans la catégorie des fractions les équivalences d'homotopie équivariantes, on voit que la puissance $p^{\text{ième}}$ induit l'application suivante (le groupe $\mathfrak{S}_p$ opérant sur $X^{\wedge p}$, donc sur $QX^{\wedge p}$, par permutation des facteurs) :

$$QX \longrightarrow (QX^{\wedge p})^{h\mathfrak{S}_p}$$

Par ailleurs, dans le § 2 de [3], nous avons défini une application semblable pour les produits symétriques infinis

$$L(X) \longrightarrow L(X^{\wedge p})^{h\mathfrak{S}_p}$$

Il est clair que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} QX & \longrightarrow & (QX^{\wedge p})^{h\mathfrak{S}_p} \\ \downarrow & & \downarrow \\ L(X) & \longrightarrow & L(X^{\wedge p})^{h\mathfrak{S}_p} \end{array}$$

4.6. Restreignons-nous maintenant au sous-groupe $C_p = \mathbf{Z}/p$ de $\mathfrak{S}_p$, p étant un nombre premier. Pour un CW complexe Y avec C_p action, J. Lannes [4] a démontré l'équivalence d'homotopie suivante (à condition de compléter les espaces considérés au nombre premier p) :

$$(QY)^{hC_p} \approx Q(Y^{C_p}) \times Q(\tilde{Y}_{hC_p})^{p-1}$$

où $\tilde{Y}_{hCp} = Y_{hCp}/BC_p$ (cf. les notations dans l'introduction). Appliquons ce théorème à $Y = X^{\wedge p}$, le groupe C_p opérant sur $X^{\wedge p}$ par permutation circulaire des facteurs, le premier facteur $Q(Y^{C_p})$ s'identifiant ainsi à QX. Déterminons le second facteur du produit précédent si X est la sphère S^q, donc $Y = S^{pq}$, le groupe C_p opérant sur S^{pq}, considéré comme compactifié d'Alexandrof de $\mathbf{R}^{pq}$. Si p est impair, $\tilde{Y}_{hC_p}$ s'identifie à l'espace de Thom du fibré qV sur BC_p, où V est le fibré suivant :

$$V = \mathbf{1} \oplus L \oplus L^2 \oplus ... \oplus L^{(p-1)/2}$$

(cf. [3], § 1.13 : **1** désigne le fibré réel trivial de rang un et L le fibré canonique sur BC_p qui est de rang complexe 1, donc de rang réel 2). Cet espace de Thom est la limite inductive (suivant N) de la $q^{\text{ième}}$ suspension du compactifié d'Alexandrof de $(\mathbf{C}^N - \mathbf{C}^{q(p-1)/2})/\mathfrak{R}$. Ici $\mathfrak{R}$ est la relation d'équivalence sur $\mathbf{C}^N$ qui identifie deux suites (x_i) et (y_i) si $y_i = \lambda_i x_i$ avec $\lambda_i = \lambda$ si $i > q(p-1)/2$ et λ_i = une puissance de λ comprise entre 1 et (p-1)/2 pour chaque espace $\mathbf{C}^q$ contenu dans $\mathbf{C}^{q(p-1)/2}$. La limite inductive s'identifie ainsi à $S^q(BC_p/L_{q,p})$, $q^{\text{ième}}$ suspension du quotient de l'espace classifiant BC_p par un espace lenticulaire $L_{q,p}$. Cet espace lenticulaire $L_{q,p}$ est obtenu comme quotient de l'ensemble des vecteurs non nuls de l'espace vectoriel $\mathbf{C}^q \oplus ... \oplus \mathbf{C}^q$ (m = (p-1)/2 facteurs $\mathbf{C}^q$) par la relation d'équivalence qui identifie les suites

$$(x_1, x_2, ..., x_m) \quad \text{et} \quad (\lambda x_1, \lambda^2 x_2, ..., \lambda^m x_m)$$

pour λ racine $p^{\text{ième}}$ de l'unité et $x_i \in \mathbf{C}^q$. Le résultat final est donc une application "puissance $p^{\text{ième}}$"

$$QS^q \longrightarrow QS^q \times Q(S^q(BC_p/L_{q,p}))$$

(du moins après complétion des espaces considérés en p). En particulier, l'application canonique de $Q(S^q(BC_p/L_{q,p}))$ dans $Q(S^{q+1}(L_{q,p}))$ permet de définir le morphisme suivant après complétion en p :

$$QS^q \longrightarrow Q(S^{q+1}(L_{q,p}))$$

4.7. On peut procéder de même pour p = 2 en remplaçant $\mathbf{C}^n$ par $\mathbf{R}^n$. Après complétion des espaces au nombre 2, on obtient une application

$$QS^q \longrightarrow QS^q \times Q(S^q(RP_\infty/RP_{q-1})) ,$$

où RP_{n-1} (resp. RP_∞) désigne l'espace projectif réel de dimension n-1 (resp. infinie). Comme en 4.6, cette application se déduit d'un théorème de J. Lannes [4]. Il en résulte une application de QS^q dans $Q(S^{q+1}(RP_{q-1}))$, du moins après complétion au nombre 2.

4.8. Le lecteur attentif aura remarqué des similitudes frappantes entre les considérations de 4.6-7 et celles développées dans les paragraphes précédents. En particulier, pour tout espace X, se pose le problème de l'existence d'une "puissance réduite" :

$$Q(X) \longrightarrow Q(CP_p(X))$$

Pour cela, reconsidérons la puissance $p^{\text{ième}}$ ordinaire

$$R^{\infty(n)} \times_{\mathfrak{S}_n} X^n \longrightarrow R^{\infty(n^p)} \times_{\mathfrak{S}_{n^p}} (X^{\wedge p})^{n^p}$$

qui a été définie formellement par la formule suivante

$$\sum t_i x_i \mapsto \sum t_{i_1} t_{i_2} \ldots t_{i_p} x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \ldots \wedge x_{i_p}$$

Le quotient de $\mathbf{R}^\infty \approx (\mathbf{R}^\infty)^p$ par l'action de C_p est encore un espace contractile. Cependant, les classes des éléments $t_{i_1} t_{i_2} \ldots t_{i_p}$ dans ce quotient ne sont pas distinctes. On a $t_{i_1} t_{i_2} \ldots t_{i_p} = t_{j_1} t_{j_2} \ldots t_{j_p}$ si et seulement si les suites $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$ et $(j_1, j_2, \ldots, j_p)$ se déduisent l'une de l'autre par permutation circulaire. Quotientons alors <u>simultanément</u> $(\mathbf{R}^\infty)^p$ et $X^{\wedge p}$ par l'action du groupe cyclique C_p et restreignons-nous aux suites $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$ telles que les i_α ne soient pas tous égaux. L'expression

$$\sum_{<i_1, i_2, \ldots, i_p>} t_{i_1} t_{i_2} \ldots t_{i_p} x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \ldots \wedge x_{i_p}$$

a alors un sens dans l'espace $((\mathbf{R}^\infty)^p/C_p)^{(m)} \times_{\mathfrak{S}_m} (X^{\wedge p}/C_p)^m$, avec $m = (n^p - n)/p$. En passant à la limite inductive suivant n, on en déduit bien une application

$$\wp : Q(X) \longrightarrow Q(CP_p(X)) ,$$

désignée aussi par " puissance réduite mod. p " (la relation entre cette application et celle déduite du théorème de J. Lannes sera faite en 4.15, à la fin de ce paragraphe, grâce à un argument de transfert).

4.9. Contrairement à ce que nous avons vu en homologie et cohomologie ordinaires (cf. 2.3 et 2.7), l'application $\wp : Q(X) \longrightarrow Q(CP_p(X))$ ainsi construite se factorise par $Q(EC_p \times_{C_p} X^{\wedge p}/BC_p) := Q(EC_p^+ \wedge_{C_p} X^{\wedge p})$, où EC_p^+ désigne l'espace $EC_p \cup \{\infty\}$. (l'espace $EC_p^+ \wedge_{C_p} X^{\wedge p}$ sera noté simplement $CP_p^h(X)$: c'est le "**produit cyclique homotopique**" de X). En effet, si $\sum t_i x_i \in Q(X)$, on peut lui associer l'élément suivant de $Q(EC_p^+ \wedge_{C_p} X^{\wedge p})$

$$\sum_{<i_1,i_2,\ldots,i_p>} c(t_{i_1}.t_{i_2}\ldots t_{i_p})\,[t_{i_1}\, t_{i_2}\ldots t_{i_p}\, ,\, x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \ \ldots \wedge\ x_{i_p}]$$

Dans cette expression $c(t_{i_1}.t_{i_2}\ldots t_{i_p})$ désigne la classe de $t_{i_1}.t_{i_2}\ldots t_{i_p}$ dans $(\mathbf{R}^{\infty})^p/C_p$ et le couple $[t_{i_1}.t_{i_2}\ldots t_{i_p}\, ,\, x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \ \ldots \wedge\ x_{i_p}]$ représente un élément de $EC_p^+ \wedge_{C_p} X^{\wedge p}$ qui ne dépend que de la classe $<i_1, i_2,.., i_p>$. Puisque les $c(t_{i_1}.t_{i_2}\ldots t_{i_p})$ sont distincts, on a bien défini une application $\wp^h : Q(X) \longrightarrow Q(CP_p^h(X))$ telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} Q(X) & \longrightarrow & Q(CP_p^h(X)) \\ \| & & \downarrow \\ Q(X) & \longrightarrow & Q(CP_p(X)) \end{array}$$

Comme nous l'avons vu en 2.3 et 2.7, l'espace $CP_p^h(X)$ est lié au produit cyclique de X par un diagramme cocartésien

$$\begin{array}{ccc} BC_p \times X/BC_p & \longrightarrow & CP_p^h(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & CP_p(X) \end{array}$$

Puisque le cône de l'application $BC_p \times X/BC_p \longrightarrow X$ est la suspension de $BC_p^+ \wedge X$, on a une cofibration homotopique

$$CP_p^h(X) \longrightarrow CP_p(X) \longrightarrow S^1 \wedge BC_p^+ \wedge X$$

La factorisation montrée plus haut montre donc que l'application composée

$$Q(X) \longrightarrow Q(CP_p(X)) \longrightarrow Q(S^1 \wedge BC_p^+ \wedge X)$$

est homotope à 0, en contraste avec la situation homologique (cf. 2.7). En particulier, l'application composée

$$Q(S^n) \longrightarrow L(S^n) \longrightarrow L(CP_p(S^n)) \longrightarrow L(S^1 \wedge BC_p^+ \wedge S^n)$$

est homotope à 0 : ceci implique que les opérations de Steenrod $H^q(X) \longrightarrow H^{q+r}(X\,;\,\mathbf{Z}/p)$ sont nulles sur l'image de l'homomorphisme de Hurewicz $\pi_s^q(X) \longrightarrow H^q(X)$ si $r > q$. Bien entendu, cette nullité des opérations de Steenrod sur l'image de l'homomorphisme de Hurewicz se démontre de manière élémentaire. Cependant, le caractère plus précis que nous avons donné pour cette annulation laisse espérer une possibilité de définir des “opérations de Steenrod secondaires” (cf. 2.10).

4.10. Le choix d’un point base dans EC_p (par exemple l’image de l’élément neutre e de EC_p qui est un groupe abélien) définit une application $X^{\wedge p} \longrightarrow CP_p^h(X)$, soit $x_1 \wedge x_2 \ldots \wedge x_p \mapsto (e, x_1 \wedge x_2 \ldots \wedge x_p)$. L’application composée

$$X^{\wedge p} \longrightarrow CP_p^h(X) \longrightarrow CP_p(X)$$

est alors l’application quotient canonique. En particulier, cherchons l’image de la puissance $p^{\text{ième}}$ de $x = \sum t_i x_i$ dans $Q(CP_p^h(X))$. On a

$$x^p = \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_p)} t_{i_1} t_{i_2} \ldots t_{i_p} \, x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \ldots \wedge x_{i_p}$$

Son image dans $Q(CP_p^h(X))$ est

$$\sum (t_i)^p (x_i)^p + \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_p)} t_{i_1} t_{i_2} \ldots t_{i_p} (e, \, x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \ldots \wedge x_{i_p})$$

où la dernière somme somme est indexée par des suites $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$, les i_α n’étant pas tous égaux. Cet élément est homotope (en tant qu’application de Q(X) dans $Q(CP_p^h(X))$ à la somme suivante :

$$\sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_p)} t_{i_1} t_{i_2} \ldots t_{i_p} \, [\, t_{i_1} t_{i_2} \ldots t_{i_p}, \, x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \ldots \wedge x_{i_p} \,]$$

(utiliser la contractibilité de $\mathbf{R}^{\infty(p)}$). En choisissant un domaine fondamental de l’action de C_p sur $\mathbf{R}^{\infty(p)}$, on voit que cette expression s’écrit aussi comme p fois la somme suivante dans $Q(CP_p^h(X)$:

$$\sum_{<i_1, i_2, \ldots, i_p>} c(t_{i_1} t_{i_2} \ldots t_{i_p}) \, [t_{i_1} t_{i_2} \ldots t_{i_p}, \, x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \ldots \wedge x_{i_p}]$$

($c(t_{i_1} t_{i_2} \ldots t_{i_p})$ désignant la classe de $t_{i_1} t_{i_2} \ldots t_{i_p}$ dans le domaine fondamental), c’est-à-dire précisément la “puissance réduite” $\wp^h(x)$ de x dans $Q(CP_p^h(X))$ qui a été définie en 4.9.

4.11. Comme en 4.6-7, considérons le cas particulier où X est une sphère S^q. Pour p impair, d’après ce qu’on a vu plus haut, la p-puissance réduite définit donc une application

$$Q(S^q) \longrightarrow Q(CP_p^h(S^q)) = Q(S^q(BC_p/L_{q,p}))$$

Si p = 2, les calculs faits en 4.7 montrent que la puissance réduite définit aussi une application

$$Q(S^q) \longrightarrow Q(CP^h_2(S^q) = Q(S^q(RP_\infty/RP_{q-1}))$$

La relation entre cette puissance réduite et la puissance $p^{\text{ième}}$ ordinaire sera faite en 4.13.

4.12. Nous nous proposons de faire le lien entre les deux points de vue[12] que nous venons de développer sur les opérations de Steenrod en cohomotopie, grâce à une application de transfert analogue à celle définie en homologie et en cohomologie (cf. 1.1). Pour cela, considérons un groupe fini G opèrant librement sur un espace pointé V[13] (sauf au point base) et posons U = V/G. On peut alors définir une application “transfert”

$$\tau : U \longrightarrow Q(V)$$

de la manière suivante (communication de J. Lannes). Il convient d'abord de plonger G dans un groupe symétrique $\mathfrak{S}_r$ et V dans $\mathbf{R}^{\infty(r)} \cup \{0\} := \mathbf{R}^{\infty(r)+}$ de manière équivariante (c'est possible car V est un CW-complexe de type fini). On a donc le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\lambda} & \mathbf{R}^{\infty(r)+} \\ \pi\downarrow & & \downarrow \\ U & \longrightarrow & \mathbf{R}^{\infty(r)+}/G \end{array}$$

($G \subset \mathfrak{S}_r$ opère sur $\mathbf{R}^{\infty(r)+}$ par permutation des coordonnées). L'application τ cherchée associe alors au point u de U l'élément

$$\tau(u) = \sum_{\pi(v)=u} \lambda(v).v \;,$$

où $\lambda(v).v \in \mathbf{R}^{\infty(r)} \times_{\mathfrak{S}_r} V^r$. L'application τ s'étend de manière usuelle à Q(U) : il suffit de poser

$$\tau(\sum_\alpha t_\alpha u_\alpha) = \sum_{\pi(y_\alpha)=x_\alpha} t_\alpha.\lambda(v_\alpha).v_\alpha$$

Dans cette formule, l'expression $t_\alpha.\lambda(v_\alpha)$ doit être comprise comme un élément de $\mathbf{R}^\infty \times \mathbf{R}^{\infty(r)}$. L'image du transfert appartient au sous-espace $Q(V)^G$ de Q(V) formé des éléments invariants par G (G opérant <u>simultanément</u> sur V et $\mathbf{R}^{\infty(r)}$). Le transfert peut donc être interprété aussi comme l'application composée

$$QU \longrightarrow Q(V)^G \longrightarrow Q(V)^{hG}$$

Sous cette dernière forme, compte tenu du lemme 4.4, il suffit de faire opérer G sur V. Une première application du transfert est le théorème suivant.

---

[12] espace des points fixes homotopiques et quotient homotopique.

[13] On suppose ici que V est un CW-complexe de type fini.

4.13. THEOREME. *L'application puissance* $p^{\text{ième}}$ *"normalisée"en cohomotopie, soit la composition*

$$Q(X) \longrightarrow Q(X^{\wedge p}) \longrightarrow Q(X^{\wedge p}/X)$$

se factorise à travers $Q(CP_p^h(X))$. *De manière précise, on a le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccc} Q(X) & \longrightarrow & Q(X^{\wedge p}) & \longrightarrow & Q(X^{\wedge p}/X) \\ \wp^h \downarrow & & & & \downarrow \approx \\ Q(CP_p^h(X)) & & \xrightarrow{\tau'} & & Q(EC_p \times X^{\wedge p}/EC_p \times X) \end{array}$$

où τ' *désigne la projection* $Q(CP_p^h(X)) \longrightarrow Q(CP_p^h(X)/BC_p \times X)$, *composée par le transfert* $\tau : Q(CP_p^h(X)/BC_p \times X) = Q(EC_p \times_{C_p} X^{\wedge p}/EC_p \times_{C_p} X) \longrightarrow$ $Q(EC_p \times X^{\wedge p}/EC_p \times X)$.

Démonstration. Soit μ un plongement de X dans $\mathbf{R}^\infty$. D'après 4.9, l'application composée $\tau'.\wp^h$ associe à $x = \sum t_i x_i \in Q(X)$ l'expression complexe suivante

$$\sum_{(i_1, i_2, ..., i_p)} c(t_{i_1}, t_{i_2}, ..., t_{i_p}).\ t_{i_1}.\ t_{i_2}, ...\ t_{i_p} \mu(x_{i_1})\ \mu(x_{i_2}) \ldots \mu(x_{i_p})$$
$$[t_{i_1}.\ t_{i_2}, ...\ t_{i_p}, x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge ... \wedge x_{i_p}]$$

où les i_α ne sont pas tous égaux. Ce calcul est licite car l'action de C_p sur $X^{\wedge p}$ - X est libre. L'élément $(\tau'.\wp^h)(x)$ ainsi trouvé est canoniquement homotope (par une homotopie affine) à une somme analogue où on remplace l'expression compliquée $c(t_{i_1}, t_{i_2}, ..., t_{i_p})\ t_{i_1}.\ t_{i_2}, ...\ t_{i_p} \mu(x_{i_1})\ \mu(x_{i_2}) \ldots \mu(x_{i_p})$ simplement par $t_{i_1}\ t_{i_2} \ldots t_{i_p}$. Modulo X, nous pouvons aussi supposer que les indices i_α sont quelconques : on retrouve bien la puissance $p^{\text{ième}}$.

4.14. COROLLAIRE. *Si* p *est un nombre premier impair, on a un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} & & Q(S^q(BC_p/L_{q,p})) = Q(CP_p^h(S^q)) \\ & \nearrow & \\ Q(S^q) & & \downarrow \\ & \searrow & \\ & & Q(S^{pq}) \end{array}$$

où la flèche $\searrow$ *représente la puissance* $p^{\text{ième}}$. *Si* p = 2, *on a la factorisation suivante* :

$$\begin{array}{ccc} & & Q(S^q(RP_\infty/RP_{q-1})) = Q(CP_2^h(S^q)) \\ & \nearrow & \end{array}$$

$$Q(S^q) \qquad \downarrow$$
$$\searrow$$
$$Q(S^{2q})$$

Dans les deux diagrammes, la flèche verticale $Q(CP^h_p(S^q)) \longrightarrow Q(S^{pq})$ *est la composée*

$$Q(CP^h_p(S^q)) \longrightarrow Q(CP_p(S^q)) \longrightarrow Q(S^{pq})$$

où la deuxième application est induite par le "transfert" $\tau : Q(CP_p(S^q)) \longrightarrow Q(S^{pq})$

Démonstration. Sans restreindre la généralité, on peut quotienter $CP_p(S^q)$ et S^{pq} par S^q, ce qui revient à ajouter un facteur $Q(S^{q+1})$ à la formule (cf. 1.10). Le transfert n'est défini en toute rigueur que pour des actions libres, sauf au point base, ce qui explique les guillemets dans l'énoncé ci-dessus. En ajoutant le facteur $Q(S^{q+1})$, on se ramène au théorème précédent avec $X = S^q$.

Faisons maintenant le lien avec le travail de J. Lannes mentionné en 4.6 et 4.7.

4.15. THEOREME. *On a le diagramme commutatif suivant* :

$$\begin{array}{ccc} Q(X) & \xrightarrow{g} & Q(X^{\wedge p}/X)^{hC_p} \\ || & & \uparrow\approx \\ Q(X) & \xrightarrow{\wp^{h+}} & Q(EC_p \times X^{\wedge p}/EC_p \times X)^{hC_p} \end{array}$$

où g *désigne la puissance* $p^{\text{ième}}$ *équivariante définie en* 4.5 *et où* $\wp^{h+}$ *désigne l'application composée* $Q(X) \xrightarrow{\wp^h} Q(EC_p \times_{C_p} X^{\wedge p}/EC_p \times_{C_p} *) \longrightarrow Q(EC_p \times_{C_p} X^{\wedge p}/EC_p \times_{C_p} X) \xrightarrow{\tau} Q(EC_p \times X^{\wedge p}/EC_p \times X)^{C_p} \longrightarrow Q(EC_p \times X^{\wedge p}/EC_p \times X)^{hC_p}$, τ *désignant le transfert.*

Démonstration. Il suffit de répéter la démonstration du théorème 4.13 en tenant compte du caractère équivariant de la puissance $p^{\text{ième}}$.

4.16. Analysons enfin $\wp^h(x^0 + x^1)$, où $x^0 = \sum t_i^0 x_i^0$ et $x^1 = \sum t_i^1 x_i^1$. D'après 4.9, nous pouvons écrire

$$\wp^h(x^0 + x^1) = \sum_{\substack{<i_1,i_2,\ldots,i_p> \\ (e_1,e_2,\ldots,e_p)}} c(t_{i_1}^{\varepsilon_1}, t_{i_2}^{\varepsilon_2}, \ldots, t_{ip}^{\varepsilon p}) [t_{i_1}^{\varepsilon_1} t_{i_2}^{\varepsilon_2} \ldots t_{ip}^{\varepsilon p}, x_{i_1}^{\varepsilon_1} \wedge x_{i_2}^{\varepsilon_2} \wedge \ldots \wedge x_{ip}^{\varepsilon p}]$$

avec $\varepsilon_\alpha = 0$ ou 1. Avec les notations de 2.1, nous pouvons définir de même une application $\varphi_p : Q(X) \times Q(X) \longrightarrow Q(EC_p \times X^{\wedge p}/EC_p)$ par la formule suivante (où les ε_α ne sont pas tous égaux) :

$$\varphi_p(x^0, x^1) = \sum_{\bar{u}, (i_1, .., i_p)} c(t_{i_1}^{\varepsilon_1}, t_{i_2}^{\varepsilon_2}, \ldots, t_{ip}^{\varepsilon p}) [t_{i_1}^{\varepsilon_1} t_{i_2}^{\varepsilon_2} \ldots t_{ip}^{\varepsilon p}, x_{i_1}^{\varepsilon_1} \wedge x_{i_2}^{\varepsilon_2} \wedge \ldots \wedge x_{ip}^{\varepsilon p}]$$

Comme en 2.1, il est clair que $\wp^h(x^0 + x^1) = \wp^h(x^0) + \wp^h(x^1) + \tau(\varphi_p(x^0, x^1))$, où

$$\tau : Q(EC_p \times X^{\wedge p}/EC_p) \longrightarrow Q(EC_p \times_{C_p} X^{\wedge p}/BC_p)$$

est l'application canonique. Puisque EC_p est contractile, on peut remplacer le premier espace par $Q(X^{\wedge p})$. On en déduit le théorème suivant, qui mesure le "degré d'additivité" de l'opération de Steenrod $\wp^h$.

4.17. THEOREME. *Soit* x^0 *et* x^1 *deux éléments de* $Q(X)$. *On a alors la formule suivante*

$$\wp^h(x^0 + x^1) = \wp^h(x^0) + \wp^h(x^1) + \tau(\varphi_p(x^0, x^1))$$

où $\tau : Q(X^{\wedge p}) \longrightarrow Q(EC_p \times_{C_p} X^{\wedge p}/BC_p)$ *est l'application canonique et où, avec les notations de 2.1,* $\varphi_p : Q(X) \times Q(X) \longrightarrow Q(X^{\wedge p})$ *est définie par l'expression*

$$\varphi_p(x^0, x^1) = \sum_{\bar{u}, (i_1, .., i_p)} c(t_{i_1}^{\varepsilon_1}, t_{i_2}^{\varepsilon_2}, \ldots, t_{ip}^{\varepsilon p})\, x_{i_1}^{\varepsilon_1} \wedge x_{i_2}^{\varepsilon_2} \wedge \ldots \wedge x_{ip}^{\varepsilon p}$$

En particulier, pour $p = 2$, φ_2 *est le cup-produit.*

Annexe A. Cohomologie bivariante et isomorphisme de Thom[14].

A.1. Dans cette annexe nous rassemblons quelques résultats sur la cohomologie bivariante et l'isomorphisme de Thom que nous n'avons pas trouvés dans la littérature sous cette forme. Rappelons (cf. 2.8) que si X et Y sont deux CW-complexes pointés, le groupe HH(X, Y) est défini comme l'ensemble des classes d'homotopie d'applications pointées de Y dans L(X). Ce groupe HH vérifie des propriétés analogues à celles de la KK-théorie de Kasparov. En particulier, un accouplement bilinéaire

$$HH(X, Y \wedge A) \times HH(A \wedge X', Y') \longrightarrow HH(X \wedge X', Y \wedge Y')$$

[14] La rédaction de cette annexe s'inspire en partie de l'article : "Formes topologiques non commutatives", à paraître aux Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure.

est défini de la manière suivante. A partir de $f' : Y' \longrightarrow L(A \wedge X')$, on déduit une application $Y \wedge Y' \longrightarrow Y \wedge L(A \wedge X') \longrightarrow L(Y \wedge A \wedge X')$. L'application $Y \wedge A \longrightarrow L(X)$ et la précédente se composent en

$$Y \wedge Y' \longrightarrow L(L(X) \wedge X') \longrightarrow L(L(X \wedge X')) \longrightarrow L(X \wedge X')$$

Elles définissent ainsi l'accouplement cherché.

A.2. Cas particuliers (ici H_n et H^n désignent respectivement l'homologie et la cohomologie réduites).

1. $A = S^0$, $Y = S^n$, $Y' = S^p$. On en déduit l'accouplement

$$H_n(X) \times H_p(X') \longrightarrow H_{n+p}(X \wedge X')$$

2. $A = S^0$, $X = S^n$, $X' = S^p$. On obtient alors l'accouplement

$$H^n(Y) \times H^p(Y') \longrightarrow H^{n+p}(Y \wedge Y')$$

Les flèches décrites en 1. et 2. représentent évidemment les cup-produits usuels en homologie et en cohomologie.

3. $A = Y$, $X' = S^0$, $X = S^n$, $Y' = S^p$. On obtient alors le “slant-produit”

$$H^n(Y \wedge Y) \times H_p(Y) \longrightarrow H^{n-p}(Y)$$

4. Enfin, un autre type de produit

$$HH(X, Y) \times HH(Y, Z) \longrightarrow HH(X \wedge Y, Z)$$

est défini comme la composition des flèches suivantes (la première étant induite par la diagonale de Y dans $Y \wedge Y$) :

$$HH(X, Y) \times HH(Y, Z) \longrightarrow HH(X, Y) \times HH(Y \wedge Y, Z) \longrightarrow HH(X \wedge Y, Z)$$

Si $X = S^n$ et si $Z = S^p$, on en déduit le “cap-produit” :

$$H^n(Y) \times H_p(Y) \longrightarrow H_{p-n}(Y)$$

Il est parfois commode de poser

$$HH^j(X, Y) = HH(X \wedge S^j, Y) \text{ pour } j \geq 0$$

$$HH^j(X, Y) = HH(X, S^{-j} \wedge Y) \text{ pour } j < 0$$

Les foncteurs $(X, Y) \mapsto HH^*(X, Y)$ sont alors des foncteurs homologiques en X et cohomologiques en Y respectivement.

A.3. On peut interpréter de manière légèrement différente ces définitions de la manière suivante. Fixons un entier $n \geq 0$ et considérons le bicomplexe $(p, q) \mapsto \Omega^{p,q}(X, Y) = \mathrm{Mor}(B^p \wedge Y, L(X \wedge B^{q+1}))$, où p est restreint aux entiers $\leq n$. Les différentielles de ce bicomplexe sont induites par les applications canoniques $B^n \longrightarrow B^{n+1}$ obtenues par la composition évidente $B^n \longrightarrow S^n \longrightarrow B^{n+1}$. En particulier, le sous-complexe $q \mapsto \Omega^{0,q}(S^0, Y) = \mathrm{Mor}(Y, L(B^{q+1}))$ est le complexe de de Rham des "formes topologiques non commutatives" considérées dans [2]. Le bicomplexe général s'écrit schématiquement ainsi

$$\begin{array}{ccccccc}
\Omega^{n,2} & \longrightarrow & \Omega^{n-1,2} & \longrightarrow & \Omega^{n-2,2} & \longrightarrow & \ldots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\Omega^{n,1} & \longrightarrow & \Omega^{n-1,1} & \longrightarrow & \Omega^{n-2,1} & \longrightarrow & \ldots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\Omega^{n,0} & \longrightarrow & \Omega^{n-1,0} & \longrightarrow & \Omega^{n-2,0} & \longrightarrow & \ldots
\end{array}$$

En fait, les lignes sont exactes car la suite

$$0 \longrightarrow \mathrm{Mor}(S^n \wedge Y, Z) \longrightarrow \mathrm{Mor}(B^n \wedge Y, Z) \longrightarrow \mathrm{Mor}(S^{n-1} \wedge Y , Z) \longrightarrow 0$$

est exacte si Z est un groupe topologique contractile. La cohomologie de ce bicomplexe est donc celle du complexe obtenu en considérant le noyau des premières flèches horizontales, soit

$$\mathrm{Mor}(S^n \wedge Y , L(X \wedge B^1)) \longrightarrow \mathrm{Mor}(S^n \wedge Y , L(X \wedge B^2))$$
$$\longrightarrow \mathrm{Mor}(S^n \wedge Y , L(X \wedge B^3)) \longrightarrow \ldots$$

dont la cohomologie en degré r est isomorphe à $HH(X \wedge S^r, Y \wedge S^n) \cong HH^{r-n}(X, Y)$.

A.4. Venons en maintenant à l'isomorphisme de Thom que nous allons interpréter dans notre langage. Ici V désigne un fibré vectoriel orienté de rang n et de base X compacte (cette hypothèse n'est là que pour simplifier le raisonnement ; il est facile de généraliser). Soit B(V) (resp. S(V)) le fibré en boules (resp. en sphères) de V pour une métrique quelconque sur V. En particulier, V est homéomorphe à V' = B(V) - S(V).

La classe de Thom de V peut être représentée par une application continue $B(V) \longrightarrow L(S^n)$ égale à 0 sur S(V), grâce à un argument standard du type Mayer-Vietoris. Par ailleurs, l'application diagonale de V' dans V' x V' induit une application propre de V' dans B(V) x V'. En considérant les compactifiés d'Alexandrof, on en déduit les applications continues suivantes (où $\tau(V) = B(V)/S(V)$ désigne l'espace de Thom de V, interprété comme compactifié d'Alexandrof de V') :

$$\tau(V) \longrightarrow B(V)^+ \wedge \tau(V) \xrightarrow{\cong} X^+ \wedge \tau(V) \longrightarrow X^+ \wedge L(S^n)$$

A.5. THEOREME (Thom). *L'application composée précédente*

$$\tau(V) \longrightarrow X^+ \wedge L(S^n)$$

induit les isomorphismes suivants pour tout espace pointé Y :

$$HH^{-n}(Y, X^+) \longrightarrow HH(Y, \tau(V)) \quad et \quad HH(\tau(V), Y) \longrightarrow HH^n(X^+, Y)$$

En particulier, pour $Y = S^{p+n}$, *on en déduit des isomorphismes*

$$H^p(X^+) \longrightarrow H^{p+n}(\tau(V)) \quad et \quad H_p(\tau(V)) \longrightarrow H_{p-n}(X^+)$$

Démonstration. Elle résulte d'un argument standard de Mayer-Vietoris (on se ramène au cas où V est trivial).

Annexe B. Transfert et espaces lenticulaires.

Le but de cette annexe est de rassembler quelques résultats (sans doute bien connus) sur les espaces lenticulaires qui facilitent la compréhension des § 1 et 2 de cet article. Nous en donnons ici des démonstrations complètes.

B.1. THEOREME. *Soit* $\mathbf{C}^{n+1}$ *un espace vectoriel complexe euclidien muni d'une action linéaire du groupe* $G = C_p$, p *premier impair. On suppose que cette représentation est somme directe de représentations irréductibles non triviales. Soit* S^{2n+1} *la sphère de* $\mathbf{C}^{n+1}$. *Alors , si* $R = \mathbf{Z}$, *l'application de transfert détaillée dans le* § 1, *soit*

$$\alpha : L(S^{2n+1}/G) \longrightarrow L(S^{2n+1})^{hG}$$

est une équivalence d'homotopie.

Démonstration. Nous allons montrer que l'application α induit un isomorphisme sur tous les groupes d'homotopie π_i. Ceux-ci sont égaux à 0 pour i pair, à $\mathbf{Z}/p$ pour i impair $\neq 2n+1$ et à $\mathbf{Z}$ pour $i = 2n+1$. Pour le facteur $\mathbf{Z}$, remarquons d'abord qu'il est déterminé pour le premier groupe par le transfert $L(S^{2n+1}/G) \longrightarrow L(S^{2n+1})$ qui induit un isomorphisme sur les groupes π_{2n+1} (cf. 1.11 et 1.13). Par ailleurs, soit

$$\gamma : L(S^{2n+1}) \longrightarrow L(S^{2n+1}) \times \dots \times L(S^{2n+1}) = M,$$

où M comprend p facteurs $L(S^{2n+1})$, l'application définie par

$$\gamma(u) = (u , u^{\sigma}, \dots, u^{\sigma^{p-1}}) ,$$

σ étant le générateur du groupe cyclique C_p. Alors γ est équivariante pour l'action de C_p sur M consistant à permuter circulairement les facteurs. Soit $N = \pi_{2n+1}(M) \approx \mathbf{Z}^p$. Puisque $H^i(G ; N) = 0$ pour $i > 0$ et que $H^0(G ; N) = \mathbf{Z}$, γ induit une application

$L(S^{2n+1})^{hG} \longrightarrow (M)^{hG} = L(S^{2n+1})$ telle que le diagramme suivant commute (t étant le transfert) :

$$\begin{tikzcd} L(S^{2n+1}/G) \arrow[r] \arrow[dr, "t"'] & L(S^{2n+1})^{hG} \arrow[d] \\ & L(S^{2n+1}) \end{tikzcd}$$

L'application α induit donc un isomorphisme $\pi_{2n+1}(L(S^{2n+1}/G)) \approx \pi_{2n+1}(L(S^{2n+1})^{hG}) \approx \mathbf{Z}$. En particulier, si n = 0, on a $S^1 \approx (L(S^1/G)) \approx L(S^1)^{hG}$.

Nous allons démontrer le théorème général par récurrence sur n en supposant donc $L(S^{2n-1}/G) \approx L(S^{2n-1})^{hG}$. Pour cela, écrivons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} L(S^{2n-1}/G) \arrow[r] \arrow[d] & L(S^{2n+1}/G) \arrow[r, "t"] \arrow[d] & L(S^{2n+1}) \arrow[d, equal] \\ L(S^{2n-1})^{hG} \arrow[r] & L(S^{2n+1})^{hG} \arrow[r, "t"] & L(S^{2n+1}) \end{tikzcd}$$

En appliquant le foncteur π_i, $0 < i \leq 2n-1$, on obtient le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} H_i(S^{2n-1}/G) \arrow[r] \arrow[d] & H_i(S^{2n+1}/G) \arrow[d] \\ \pi_i(L(S^{2n-1})^{hG}) \arrow[r] & \pi_i(L(S^{2n+1})^{hG}) \end{tikzcd}$$

Pour i pair, tous les groupes sont nuls. Pour i impair, il est bien connu que la première flèche horizontale est un isomorphisme si $i \neq 2n-1$ et que c'est aussi un isomorphisme pour $i = 2n-1$ si on quotiente le premier groupe par p. Pour démontrer le théorème, il suffit donc de montrer la même propriété pour la deuxième flèche horizontale.

Pour accomplir ce programme, considérons la fibration vectorielle

$$V = S^{2n+1} - S^1 \longrightarrow S^{2n-1}$$

Plus précisément, écrivons $\mathbf{C}^{n+1} = L_0 \oplus L_1 \oplus ... \oplus L_n$ (somme de représentations irréductibles) ; S^{2n+1} est la sphère de $\mathbf{C}^{n+1}$; S^1 est vue comme la sphère de L_n. La structure vectorielle est déduite du diagramme cartésien classique suivant :

$$\begin{tikzcd} S^{2n+1} - S^1 \arrow[r] \arrow[d] & S^{2n-1} \arrow[d] \\ CP_n - \{\infty\} \arrow[r, "\theta"] & CP_{n-1} \end{tikzcd}$$

avec $\theta([x_0, x_1, ..., x_n]) = [x_0, x_1, ..., x_{n-1}]$, où la fibre au-dessus du "point" L s'identifie à $Hom(L, L_n)$. Si on munit ce fibré vectoriel d'une métrique invariante, l'espace de Thom V^+ s'identifie au quotient B(V)/S(V) du fibré en boules B(V) par le

fibré en sphères S(V), soit aussi S^{2n+1}/S^1. En quotientant par l'action de G, on a encore une fibration vectorielle

$$W = (S^{2n+1} - S^1)/G \longrightarrow S^{2n-1}/G$$

dont l'espace de Thom est $(S^{2n+1}/S^1)/G$. Soit τ la "classe de Thom" de cette fibration, vue comme application $W^+ \longrightarrow L(S^2)$. Elle induit la classe de Thom de V grâce à la composition $V^+ \longrightarrow W^+ \longrightarrow L(S^2)$ (car G opère librement sur la base). L'isomorphisme de Thom de V peut être ainsi réalisé au niveau du produit symétrique infini (cf. la fin de l'annexe précédente) par une application <u>équivariante</u> $\tau(V) \longrightarrow (S^{2n-1})^+ \wedge L(S^2)$ qui induit une flèche équivariante

$$\Omega^2(L(S^{2n+1}/S^1) \longrightarrow L(S^{2n-1})$$

On en déduit un isomorphisme

$$\pi_i(L(S^{2n-1})^{hG}) \longrightarrow \pi_{i-2}(L(S^{2n+1})^{hG})$$

et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H_i(S^{2n-1}/G) & \longrightarrow & H_i(S^{2n+1}/G) & \longrightarrow & H_{i-2}(S^{2n-1}/G) \\ \approx\downarrow & & \downarrow & & \approx\downarrow \\ \pi_i(L(S^{2n-1})^{hG}) & \longrightarrow & \pi_i(L(S^{2n+1})^{hG}) & \longrightarrow & \pi_{i-2}(L(S^{2n-1})^{hG}) \end{array}$$

L'application composée $H_i(S^{2n-1}/G) \longrightarrow H_{i-2}(S^{2n-1}/G)$ est un isomorphisme si $2 < i < 2n-1$ et est aussi un isomorphisme pour $i = 2n-1$ si on quotiente le premier groupe par p. Il en résulte que la même propriété vaut pour l'application composée $\pi_i(L(S^{2n-1})^{hG}) \longrightarrow \pi_{i-2}(L(S^{2n-1})^{hG})$. Donc $\alpha : H_i(S^{2n-1}/G) \longrightarrow \pi_i(L(S^{2n-1})^{hG})$ est aussi un isomorphisme.

B.2. THEOREME. *Soit* $\mathbf{R}^m = \mathbf{C}^n \oplus \mathbf{R}^q$ *, où* $\mathbf{C}^n$ (*resp.*$\mathbf{R}^q$) *est somme de représentations irréductibles du groupe cyclique* C_p (*resp. est un* C_p*-module trivial). Alors l'application canonique*

$$\alpha : L(S^{m-1}/G) \longrightarrow L(S^{m-1})^{hG}$$

induit un isomorphisme sur les groupes d'homotopie π_i *pour* $i \geq q$. *Si on remplace le foncteur* L *par* $L \otimes \mathbf{Z}/p$, *la même conclusion vaut pour* $i > q$.

Démonstration. Il est plus commode de considérer S^m comme le compactifié d'Alexandrof de $\mathbf{R}^m$ qui s'identifie à la suspension (non réduite) de S^{m-1} en tant que G-espace. Nous pouvons ainsi écrire $S^{2n+q} = S^{2n} \wedge S^q$ et $S^{2n+q}/G = S^{2n}/G \wedge S^q$. De manière générale, notons S'Y la suspension non réduite d'un espace Y. On a alors les équivalences d'homotopie suivantes $\Omega(L(S^{2n+q}/G)) \approx \Omega(L(S'(S^{2n+q-1}/G)) \approx L(S^{2n+q-1}/G)$ et $\Omega(L(S^{2n+q})^{hG}) \approx \Omega(L(S'(S^{2m+q-1})^{hG}) \approx L(S^{2n+q-1})^{hG}$. De même, nous avons $\Omega^{q+1}(L(S^{2n+q}/G)) \approx \Omega^{q+1}(L(S'^{q+1}(S^{2n-1}/G))) \approx L(S^{2n-1}/G)$ et $\Omega^{q+1}(L(S^{2n+q})^{hG}) \approx \Omega^{q+1}(L(S'^{q+1}(S^{2n-1})^{hG})) \approx L(S^{2n-1})^{hG}$. La première partie du théorème se déduit ainsi du théorème précédent, en appliquant le foncteur π_i aux isomorphismes ci-dessus pour $i \geq q$. La deuxième partie s'en déduit aussitôt en écrivant les suites exactes d'homotopie reliant $\pi_i(L(X))$ et $\pi_i(L(X)\otimes \mathbf{Z}/p)$.

B.3. Nous nous proposons d'étendre les résultats précédents en homologie mod. 2, c'est-à-dire en supposant $R = \mathbf{Z}/2$. Pour éviter toute confusion, nous noterons ici $\overline{L}$ le foncteur L pour $R = \mathbf{Z}/2$, en conservant la notation première L dans le cas où $R = \mathbf{Z}$. Si X est un G-espace (avec $G = C_2$), nous noterons X_0 le quotient de X par le sous-espace des points fixes X^G. Il est clair que le transfert usuel induit en fait une application (notée encore t)

$$\overline{L}(X_0/G) \longrightarrow \overline{L}(X)^{hG}$$

(car le transfert usuel s'annule sur $\overline{L}(X^G)$; cf. 1.3).

B.4. THEOREME. *Soit* $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^m \oplus \mathbf{R}^q$ *un espace euclidien où le groupe* $G = C_2$ *opère par involution antipodique sur* $\mathbf{R}^m$ *et par l'identité sur* $\mathbf{R}^q$ (*avec* $q \geq 1$). *Le groupe* G *opère donc sur la sphère correspondante* S^n (*vue comme compactifiée d'Alexandrof de* $\mathbf{R}^n$), *l'espace des points fixes* $(S^n)^G$ *s'identifiant à* S^q. *On pose* $S^n_0 = S^n/(S^n)^G$. *Alors l'application de transfert sur la sphère, soit*

$$\alpha : \overline{L}(S^n_0/C_2) \longrightarrow \overline{L}(S^n)^{hC_2}$$

(*où* $\overline{L} = L \otimes \mathbf{Z}/2$) *induit un isomorphisme sur les groupes d'homotopie* π_i *pour* $i \geq q$.

Démonstration. Elle se divise en deux parties :

1. Supposons d'abord $i \geq q+2$. Nous avons alors le diagramme commutatif suivant de fibrations (avec $G = C_2$)

$$\begin{array}{ccccc}
\Omega(\overline{L}(S^{m+q}/G)) & \longrightarrow & L(S^{m+q}/G) & \xrightarrow{.2} & L(S^{m+q}/G) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\Omega(\overline{L}(S^{m+q})^{hG}) & \longrightarrow & L(S^{m+q})^{hG} & \xrightarrow{.2} & L(S^{m+q})^{hG}
\end{array}$$

En écrivant les deux suites d'homotopie correspondantes, ainsi qu'en appliquant les théorèmes B.1 et B.2 (adaptés au cas réel et appliqués en homologie mod. 2), on en déduit que $\pi_i(\overline{L}(S^{m+q}/G)) \approx \pi_i(\overline{L}(S^{m+q})^{hG})$ pour $i \geq q+2$. Par ailleurs, l'espace des points fixes de S^{m+q} par l'action de G s'identifie à S^q et l'application $S^q \longrightarrow$

S^{m+q}/G est homotopiquement triviale. Par conséquent, $\bar{L}(S_0^n/G) \approx \bar{L}(S^{m+q}/G) \oplus \bar{L}(S^{q+1})$ et le théorème est bien démontré pour $i \geq q+2$.

2. Supposons maintenant que i soit égal à q+1. Dans ce cas, l'homomorphisme

$$\alpha_{q+1} : \mathbf{Z}/2 \approx \pi_{q+1}(\bar{L}(S_0^n/G)) \longrightarrow \pi_{q+1}(\bar{L}(S^{m+q})^{hG}) \approx \mathbf{Z}/2$$

est égal à 0 ou est un isomorphisme pour tous q et n. En effet, il suffit de répéter l'argument exposé dans la démonstration du théorème B.1 (en remplaçant l'homologie entière par l'homologie mod. 2). La non-trivialité de α_{q+1} résultera donc d'un exemple approprié. De manière plus précise, considérons le transfert introduit en 1.3 (avec p = 2) :

$$\gamma : \Delta_2^+(S^q) \longrightarrow L(S^{2q})^{hG}$$

On doit montrer que γ induit un isomorphisme sur les groupes d'homotopie $\pi_{q+1} \cong \mathbf{Z}/2$. Pour cela, considérons la première opération cohomologique $K(\mathbf{Z}/2, q) \longrightarrow K(\mathbf{Z}/2, q+1)$ induite par la puissance $2^{\text{ième}}$ et qui résulte de la décomposition de $\bar{L}(S^{2q})^{hG}$ en produit d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane (annexe C). Cette opération se factorise à travers $\Delta_2^+(S^q)$ par la puissance réduite (cf. 1.10). Il suffit donc de montrer que l'application $K(\mathbf{Z}/2, q) \longrightarrow K(\mathbf{Z}/2, q+1)$ n'est pas nulle : en fait c'est l'homomorphisme de Bockstein d'après [3]. Mais cet homomorphisme n'est pas nul (considérer des produits d'espaces projectifs par exemple). Ceci achève la démonstration du théorème B.4.

Annexe C. Type d'homotopie des groupes abéliens simpliciaux.

C.1. Il est bien connu qu'un groupe abélien topologique X a le type d'homotopie d'un produit d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane (cf. [8]). Comme me l'a signalé R. Jardine (communication privée), cette décomposition en produit n'est pas canonique. Cependant, nous allons voir que cette décomposition peut être rendue "canonique" si $\pi_n(X)$ est un groupe abélien de type fini, nul si n est assez grand, avec les choix supplementaires suivants (ceci est un cas particulier de résultats plus généraux de R. Jardine à paraître) :

1) Choix des générateurs des facteurs cycliques libres de $\pi_n(X)$.

2) Pour chaque facteur cyclique $\mathbf{Z}/r$ de $\pi_n(X)$, choix d'un élément de $\pi_{n-1}(X ; \mathbf{Z}/r))$ dont l'image dans $\pi_n(X)$ par l'homomorphisme canonique

$$\pi_{n-1}(X ; \mathbf{Z}/r) \longrightarrow \pi_n(X)$$

est un générateur de ce facteur cyclique.

Plus précisément, soient G_n^i les facteurs cycliques de $\pi_n(X)$ et soient x_n^i les générateurs correspondants. Nous définissons une application de l'espace d'Eilenberg-Mac Lane $K(G_n^i, n)$ dans X de la manière suivante.

Premier cas. $G_n^i \cong \mathbf{Z}$. Choisissons comme modèle de $K(G_n^i, n)$ le produit symétrique[15] infini $SP^\infty(S^n)$ de la sphère S^n (cf. 2.2). Le générateur x_n^i définit une application essentielle $\alpha_n^i : S^n \longrightarrow X$ qui s'étend en $\beta_n^i : SP^\infty(S^n) \longrightarrow X$ par la formule

$$\beta_n^i\ (x_1, x_2, ..., x_r, ...) = \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_n^i(x_r)$$

Bien entendu, la structure de groupe abélien de X intervient ici de manière esssentielle.

Deuxième cas. $G_n^i \cong \mathbf{Z}/r\mathbf{Z}$. On procède de manière analogue en choisissant comme modèle de $K(G_n^i, n)$ le groupe abélien $SP^\infty(S^n)/rSP^\infty(S^n)$. Cependant, une difficulté technique apparaît ici : les β_n^i, multipliés par r, ne sont pas égaux à 0, mais homotopes à 0. Choisissons alors un relèvement $\tilde{\alpha}_n^i$ de α_n^i dans le groupe d'homotopie $\pi_{n-1}(X ; \mathbf{Z}/r)$ par l'homomorphisme canonique $\pi_{n-1}(X ; \mathbf{Z}/r) \longrightarrow \pi_n(X)$. Alors $\tilde{\alpha}_n^i$ définit une classe d'homotopie d'application de l'espace de Moore S_r^n dans X (S_r^n est le cône de l'application de degré r de S^n dans S^n). Le produit symétrique infini de S_r^n ayant le type d'homotopie de $SP^\infty(S^n)/rSP^\infty(S^n) = K(G_n^i, n)$, on peut définir β_n^i comme dans le premier cas, grâce au choix de ce relevé $\tilde{\alpha}_n^i$.

En faisant la somme de tous ces β_n^i, on en déduit une application du produit des $K(G_n^i, n)$ dans X qui est une équivalence d'homotopie d'après le théorème de Whitehead.

C.2. Supposons que X soit un R-module simplicial, les groupes d'homotopie étant des R-modules libres. Dans ce cas, le choix d'une base des groupes d'homotopie définit des applications[16] $L(S^n) \longrightarrow X$. On en déduit directement une application d'un produits des $L(S^n)$ dans X qui est une équivalence d'homotopie, sans le détour des espaces de Moore.

C.3. Supposons maintenant que R = **Z** et considérons un groupe abélien simplicial libre homotopiquement équivalent à un espace d'Eilenberg-Mac Lane $K(\mathbf{Z}/r, n)$. Alors $X/r = X \otimes \mathbf{Z}/r$ est homotopiquement équivalent à $K(\mathbf{Z}/r, n) \times K(\mathbf{Z}/r, n + 1)$, comme on le voit en écrivant la suite exacte d'homotopie associée à la suite exacte de groupes simpliciaux

[15] On peut aussi choisir le groupe abélien libre de base un modèle simplicial de S^n.

[16] $L(S^n)$ désignant le R-module simplicial libre de base S^n.

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{.r} X \longrightarrow X/r \longrightarrow 0$$

Le résultat suivant est utilisé en 2.11.

C.4. PROPOSITION. *Avec les hypothèses précédentes, l'application canonique*

$$X = K(\mathbf{Z}/r, n) \longrightarrow X/r \approx K(\mathbf{Z}/r, n) \times K(\mathbf{Z}/r, n+1)$$

s'identifie au produit de l'application identique par l'homomorphisme de Bockstein.

Démonstration. D'après ce qui précède, il existe une application $L(S^n_r) \longrightarrow X$ qui est une équivalence d'homotopie, S^n_r étant un espace de Moore. Sans restreindre la généralité, on peut donc supposer que X est un espace de Moore. Par ailleurs, on peut écrire le diagramme commutatif à homotopie près suivant (f étant une application de degré r) :

$$\begin{tikzcd}
 & L(S^n) \arrow[r, "L(f)"] \arrow[d] & L(S^n) \arrow[r] \arrow[d] & L(S^n_r) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & L(S^n) \arrow[r, ".r"] & L(S^n) \arrow[r] & L(S^n)/r \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, les flèches horizontales sont des fibrations homotopiques et l'application "bord" $L(S^n_r) \longrightarrow \Omega^{-1}(L(S^n)) \cong L(S^{n+1})$ (suite de Puppe) se factorise donc en $L(S^n_r) \xrightarrow{\approx} L(S^n)/r \longrightarrow \Omega^{-1}(L(S^n)) \cong L(S^{n+1})$, c'est-à-dire essentiellement par l'homomorphisme de Bockstein. La proposition s'en déduit en réduisant $\Omega^{-1}(L(S^n))$ mod. r.

REFERENCES

[1] A. DOLD et R. THOM. A. DOLD et R. THOM. Quasifaserungen und unendliche symmetrische produkte. Annals of Math, vol. 67, N° 2 (1958), 239-281. Voir aussi : une généralisation de la notion d'espace fibré. Application aux produits symétriques infinis. C.R. Acad. Sci. Paris 242 (1956), 1680-1682.

[2] M. KAROUBI. Formes différentielles non commutatives et cohomologie à coefficients arbitraires (à paraître aux Transactions of the American Mathematical Society). Voir également Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, t. 316, p.833-836 (1993), ainsi que l'article "Formes topologiques non commutatives", à paraître aux Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure.

[3] M. KAROUBI. Formes différentielles non commutatives et opérations de Steenrod (à paraître dans "Topology"). Voir aussi Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, t. 316, p. 917-920 (1993).

[4] J. LANNES (communication privée).

[5] N. STEENROD ET D. EPSTEIN. Cohomology operations. Annals of Math. Studies, Nr. 50. Princeton University Press (1962).

[6] P. VOGEL. Cobordisme d'immersions. Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure (1974), p. 317-358.