SUR LA K-THEORIE MULTIPLICATIVE

par Max Karoubi

Le but de cet article est de compléter le travail commencé en [6] et [13] § VII, en relation avec les résultats postérieurs de Weibel [23] et Hood-Jones [10]. Il peut donc être considéré comme une suite naturelle de [6], [13], [23] et [10] dont nous utiliserons largement les méthodes. De manière plus précise, soit A une algèbre de Fréchet[1] unitaire mais non nécessairement commutative. Soient $K_n(A)$ et $K_n^{top}(A)$ les groupes de **K-théorie algébrique et topologique** de A respectivement. Pour n > 0, on a donc $K_n(A) = \pi_n(BGL(A)^+)$, où $BGL(A)^+$ désigne la construction + de Quillen appliquée à l'espace classifiant $BGL(A)^\delta$, $GL(A)^\delta$ désignant le groupe GL(A) muni de la topologie <u>discrète</u> : $K_n(A)$ ne dépend que de l'anneau discret sous-jacent à A. De même, $K_n^{top}(A)$ est défini comme le groupe d'homotopie $\pi_n(BGL(A))$, où BGL(A) désigne l'espace classifiant du groupe <u>topologique</u> GL(A) (du moins si A est une algèbre de Banach réelle ou complexe ; le cas général nécessite des méthodes simpliciales). L'application évidente $BGL(A)^+ \longrightarrow BGL(A)$ induit, en considérant les groupes d'homotopie, un homomorphisme naturel $K_n(A) \longrightarrow K_n^{top}(A)$. Un des buts de cet article est de construire, à l'aide de l'homologie cyclique, une théorie intermédiaire $\mathcal{K}_n(A)$, plus accessible que la K-théorie algébrique, tel que l'homomorphisme précédent se factorise de la manière suivante

$$K_n(A) \longrightarrow \mathcal{K}_n(A) \longrightarrow K_n^{top}(A)$$

Plus précisément, ce groupe de "**K-théorie multiplicative**" $\mathcal{K}_n(A)$ s'insère dans un diagramme commutatif à seize termes (où n ≥ 1) :

$$\begin{array}{ccccccc}
K_n^{rel}(A) & \longrightarrow & K_n(A) & \longrightarrow & K_n^{top}(A) & \longrightarrow & K_{n-1}^{rel}(A) \\
\downarrow & & \downarrow & & \| & & \downarrow \\
HC_{n-1}(A) & \longrightarrow & \mathcal{K}_n(A) & \longrightarrow & K_n^{top}(A) & \longrightarrow & HC_{n-2}(A) \\
\| & & \downarrow & & \downarrow & & \| \\
HC_{n-1}(A) & \longrightarrow & HC_n^{-}(A) & \longrightarrow & HC_n^{per}(A) & \longrightarrow & HC_{n-2}(A) \\
\| & & \downarrow & & \downarrow & & \| \\
HC_{n-1}(A) & \longrightarrow & HH_n(A) & \longrightarrow & HC_n(A) & \longrightarrow & HC_{n-2}(A)
\end{array}$$

Le groupe $\mathcal{K}_n(A)$ est très voisin de celui proposé dans [13] § VII. La différence essentielle est

[1] Par exemple, l'algèbre des fonctions C^∞ sur une variété ou une algèbre de Banach.

la suivante : les groupes d'homologie cyclique considérés ici ne sont pas nécessairement séparés (en tant qu'espaces topologiques), contrairement aux hypothèses générales formulées dans [6] et [13]. En outre, les méthodes employées ici sont radicalement différentes, basées sur le théorème de Dold-Kan et une algèbre homologique "différentielle" (cf. [16] et un peu plus loin).

Détaillons un peu plus les éléments du diagramme précédent. Le groupe de "**K-théorie relative**" $K_n^{rel}(A)$ est le $n^{ième}$ groupe d'homotopie de $\mathfrak{F}$, fibre homotopique de l'application $BGL(A)^+ \longrightarrow BGL(A)$ considérée ci-dessus. La première suite exacte du diagramme est donc de nature tautologique. Les $HC_n(A)$, $HC_n^{--}(A)$, etc... sont les groupes d'**homologie cyclique** et ses variantes, dont la définition tient compte de la topologie de A (cf. le § 1). La dernière suite exacte a été démontrée par A. Connes [3]. Le lien entre celle-ci et la première est explicité dans [6] (avec des définitions légèrement différentes). Les morphismes

$$K_n(A) \longrightarrow \mathcal{K}_n(A) \longrightarrow HC_n^{--}(A) \longrightarrow HH_n(A)$$

déterminent les classes caractéristiques primaires et secondaires connues pour la K-théorie algébrique des algèbres de Fréchet. Il s'agit notamment du régulateur de Borel si A = **C**, du caractère de Chern et du caractère multiplicatif des modules de Fredholm en (co)homologie cyclique développés dans [3], [13], [6], [11], [10], [23], etc....

Le lecteur pourra comparer cet article avec celui de Weibel [23] dont les méthodes, partiellement inspirées de [11], sont sensiblement voisines. Une des différences est l'utilisation systématique de l'homologie de de Rham non commutative introduite dans [13]. Il est démontré dans [3] et [13] qu'elle n'est qu'une variante (différentielle) de l'homologie cyclique, mais commode pour montrer l'invariance homotopique de l'homologie cyclique périodique. Une autre différence est une construction de Dold-Kan explicite, utilisant les formes différentielles (cf. [16). Ce point de vue paraît indispensable pour traduire en termes d'algèbre homologique connexions et courbures. Nous pouvons ainsi montrer que la K-théorie multiplicative définie ici détermine les classes caractéristiques secondaires classiques (cf. [13] et [6] pour les détails).

Dans le cinquième paragraphe, nous adaptons les considérations précédentes aux algèbres de Banach ultramétriques : construction de "régulateurs" et relation plus étroite avec le travail de Weibel mentionné plus haut. En particulier, les algèbres discrètes rentrent dans ce cadre, les groupes $K_n^{top}(A)$ étant alors notés KV_n dans [23].

Enfin, dans le dernier paragraphe nous montrons très brièvement que les groupes $K_n(A)$, $HC_n(A)$, etc... sont en fait des groupes topologiques et que nos constructions respectent ces topologies. En particulier, le morphisme "régulateur" $R : K_n(A) \longrightarrow \mathcal{K}_n(A)$ est continu. Si le groupe $\mathcal{K}_n(A)$ est séparé, R se factorise donc par le groupe séparé associé à $K_n(A)$.

Table des matières

1. Rappels sur l'homologie cyclique ([3], [13], [8], [18] ...).

1.1. Soit A une algèbre de Fréchet. On désigne par HC_*, HC_*^{--}, HC_*^{per} les foncteurs usuels d'homologie cyclique ordinaire, négative ou périodique de A respectivement, dont la définition est presque identique à la définition algébrique : il convient d'y remplacer le produit tensoriel ordinaire $\otimes$ par le produit tensoriel projectif $\otimes_\pi$ de Grothendieck ([9], [18] p. 193). De manière plus précise, un double complexe est défini sur deux quadrants en posant, pour $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}$, $C_{p,q}(A) = A \otimes_\pi A \otimes_\pi \dots \otimes_\pi A$ (q+1 facteurs). La première différentielle $b : C_{p,q}(A) \longrightarrow C_{p,q-1}(A)$ est l'opérateur bord de Hochschild défini par la formule usuelle :

$$b(a_0, \dots, a_q) = \sum_{i=0}^{q-1} (-1)^i (a_0, \dots, a_i a_{i+1}, \dots, a_q) + (-1)^q (a_q a_0, a_1, \dots, a_{q-1})$$

La seconde différentielle $\partial : C_{p,q}(A) \longrightarrow C_{p-1,q}(A)$ est égale à 1-t si p est pair et à -N si p est impair. Ici, l'opérateur $t : C_{p,q}(A) \longrightarrow C_{p,q}(A)$ est défini par $t(a_0, \dots, a_q) =$
$(-1)^q (a_q, a_0, \dots, a_{q-1})$ et N est égal à la somme $1 + t + \dots + t^q$ sur $C_{p,q}(A)$.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\longleftarrow & & C_{-2,2} & \longleftarrow & C_{-1,2} & \longleftarrow & C_{0,2} & \longleftarrow & C_{1,2} & \longleftarrow & C_{1,2} & \longleftarrow \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\longleftarrow & & C_{-2,1} & \longleftarrow & C_{-1,1} & \longleftarrow & C_{0,1} & \longleftarrow & C_{1,1} & \longleftarrow & C_{1,1} & \longleftarrow \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\longleftarrow & & C_{-2,0} & \longleftarrow & C_{-1,0} & \longleftarrow & C_{0,0} & \longleftarrow & C_{1,0} & \longleftarrow & C_{1,0} & \longleftarrow
\end{array}$$

1.2. Le complexe total associé est défini par le <u>produit</u> suivant :

$$C_n^{per}(A) = \prod_{p+q=n} C_{p,q}(A)$$

On note $HC_*^{per}(A)$ l'homologie (cyclique périodique) de ce complexe. La restriction du double complexe au premier quadrant définit un complexe simple $C_*(A)$) dont l'homologie $HC_*(A)$ est par définition l'homologie cyclique (topologique) de A. Sa restriction au deuxième quadrant (notée $C_*^{--}(A)$) fournit la définition de l'homologie cyclique négative $HC_*^{--}(A)$. On a une suite exacte (cf. [18] p. 160 par exemple) :

$$0 \longrightarrow \varprojlim_r{}^1 HC_{n+2r+1}(A) \longrightarrow HC_n^{per}(A) \longrightarrow \varprojlim_r HC_{n+2r}(A) \longrightarrow 0$$

les limites projectives d'ordre 0 ou 1 étant calculées en utilisant l'opérateur de périodicité S de Connes [3]. Notons que les homologies ainsi obtenues ne sont pas séparées en général pour la topologie induite par celle de A.

1.3. Pour des raisons techniques qui apparaîtront plus loin (correspondance de Dold-Kan : cf. [23] et [16]), il convient de tronquer les complexes $E_n = C_n^{per}$ ou C_n^{--} en les remplaçant par 0 si $n < 0$ et par $\mathrm{Ker}(E_0 \longrightarrow E_{-1})$ si $n = 0$, E_n n'étant pas altéré si $n > 0$. Pour $n \geq 0$, les groupes HC_n^{per} et HC_n^{--} sont inchangés par cette modification. Enfin, il convient de remarquer le diagramme commutatif suivant formé de deux suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
HC_{n-1}(A) & \longrightarrow & HC_n^{--}(A) & \longrightarrow & HC_n^{per}(A) & \longrightarrow & HC_{n-2}(A) \\
\| & & \downarrow & & \downarrow & & \| \\
HC_{n-1}(A) & \longrightarrow & HH_n(A) & \longrightarrow & HC_n(A) & \longrightarrow & HC_{n-2}(A)
\end{array}$$

1.4. Une autre façon de définir l'homologie cyclique est d'introduire le double complexe (B, b) de Connes (cf. [18] p. 56 par exemple). Il s'écrit sur trois quadrants :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & D_2 & \longleftarrow & D_1 & \xleftarrow{B} & D_0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow b & & \\
 & & D_2 & \longleftarrow & D_1 & \longleftarrow & D_0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
D_2 & \longleftarrow & D_1 & \longleftarrow & D_0 & & & &
\end{array}$$

où on pose de manière générale $D_q = C_{p,q} = A^{\otimes_\pi q+1}$. La troncature générale décrite en 1.3 permet de le restreindre aux deux premiers quadrants. Les flèches horizontales sont notées B et les flèches verticales notées b comme il est d'usage. Les bidegrés sont évidents (le D_0 de la deuxième ligne par exemple a comme bidegré (0, 0)). Ce bicomplexe est normalisé si on remplace D_q par $\Omega_q = \Omega_q(A) = A \otimes_\pi \overline{A} \otimes_\pi \ldots \otimes_\pi \overline{A}$ (q copies de $\overline{A} = A/\mathbf{C}.1$). Le bicomplexe

$$
\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d] & \Omega_2 \arrow[d] & \Omega_1 \arrow[l] \arrow[d, "b"] & \Omega_0 \arrow[l, "B"'] \\
 & \Omega_2 \arrow[d] & \Omega_1 \arrow[l] \arrow[d] & \Omega_0 \arrow[l] & \\
\Omega_2 & \Omega_1 \arrow[l] & \Omega_0 \arrow[l] & &
\end{tikzcd}
$$

permet de calculer l'homologie cyclique de A, ainsi que les variantes mentionnées plus haut (HC_*^{per}, HC_*^{--},...).

2. Homologie de de Rham non commutative.

2.1. Un autre résultat technique important est le calcul de l'homologie de de Rham non commutative grâce à l'homologie cyclique. Avec les définitions de [3] et [13] (cf. aussi [21] p. 328), on démontre que le noyau de $B : HC_n(A) \longrightarrow HH_{n+1}(A)$, s'interprète comme "l'homologie de de Rham non commutative" $H_*(\tilde{A})$ de l'algèbre $\tilde{A}$ obtenue à partir de A en ajoutant un élément unité. De manière précise, comme en 1.4, désignons par $\Omega_*(\tilde{A})$ l'algèbre des formes différentielles non commutatives sur $\tilde{A}$ (les degrés étant placés en indices) et par $\overline{\Omega}_n(\tilde{A})$ l'espace vectoriel quotient (<u>non séparé en général</u>) de $\Omega_n(\tilde{A})$ par le sous-espace vectoriel engendré par les commutateurs $\lambda\omega - \omega\lambda$, $\lambda \in \tilde{A}$, et leurs différentielles. Ainsi $\overline{\Omega}_n(\tilde{A})$ est le quotient de $\Omega_n(\tilde{A})$ par le sous-espace vectoriel engendré par l'image de b et celle de db ou, ce qui revient au même, par l'image de b et celle de l'opérateur $db + bd = 1 - \sigma$, σ étant défini dans [13], p. 29. Il est équivalent de quotienter l'algèbre $\Omega_*(\tilde{A})$ par le sous-espace vectoriel engendré par les commutateurs gradués. En effet, si ω_1 et ω_2 sont deux formes de degré n et p respectivement, on a la formule suivante qui montre qu'un commutateur gradué appartient à la somme des sous-espaces image de b et de $1 - \sigma$:

$$\omega_2.\omega_1 = (-1)^{np}\, \sigma^p(\omega_1.\omega_2) - (-1)^{n(p+1)} b((\sigma^p(\omega_1.d\omega_2))$$

La différentielle d (de degré +1) sur $\Omega_*(\tilde{A})$ induit une différentielle sur $\overline{\Omega}_*(\tilde{A})$. On démontre alors (cf. [3] ou [13] p. 31) que l'homologie $H_n(\tilde{A})$ du complexe $\overline{\Omega}_*(\tilde{A})$, est naturellement isomorphe au noyau du morphisme $B : HC_n(A) \longrightarrow HH_{n+1}(A)$ précédent[2] pour $n > 0$. Pour pouvoir exploiter pleinement cet isomorphisme, nous aurons besoin de démontrer l'invariance homotopique de l'homologie de de Rham non commutative. Celle-ci s'exprime par le théorème suivant.

---

[2] Si $n = 0$, ce noyau est isomorphe à l'homologie de de Rham non commutative <u>réduite</u> $H_0(\tilde{A})/k$, k étant l'anneau de base ici égal à **C**.

2.2. THEOREME. *Soit* $R = \tilde{A}$ *une algèbre de Fréchet augmentée et soit* $R_1 = C^\infty(\mathbf{R}) \otimes_\pi R$. *L'application naturelle* $R \longrightarrow R_1$ *induit alors un isomorphisme entre les homologies de de Rham non commutatives correspondantes*[3].

Début de la démonstration du théorème. Un homomorphisme (ou "opérateur d'homotopie") :

$$I : \Omega_n(R_1) \longrightarrow \Omega_{n-1}(R)$$

est défini de la manière suivante. Si $\omega = c_0\, dc_1 \ldots dc_n$ est une forme différentielle non commutative, avec c_i appartenant à $C^\infty(\mathbf{R}) \otimes_\pi R$ et de la forme $f_i(t) \otimes a_i$, on pose

$$I(\omega) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \left[\int_0^1 f_0(t) \ldots f_i'(t) \ldots f_n(t)\, dt\right] . a_0 . da_1 \ldots \hat{d}\, a_i \ldots da_n$$

(la notation $\hat{d}$ signifie qu'on omet la différentielle d et $f_i'(t)$ désigne la dérivée de $f_i(t)$). Il est clair que I définit une application multilinéaire continue sur les produits cartésiens des espaces fonctionnels et induit donc un morphisme au niveau des produits tensoriels complétés, en raison de la propriété universelle du produit tensoriel projectif $\otimes_\pi$. Les lemmes 2.3, 2.4 et 2.5 ci-dessous dégagent quelques propriétés importantes de l'opérateur I (noté aussi par le signe intégrale $\int$). La démonstration du théorème sera close en 2.6.

2.3. LEMME. *On a l'identité suivante* :

$$d.I + I.d = J_1 - J_0$$

où J_0 *et* J_1 *représentent les homomorphismes induits par les restrictions en* $\{0\}$ *et* $\{1\}$ *(sur le facteur* $C^\infty(\mathbf{R})$*) des formes différentielles sur l'algèbre de Fréchet* $C^\infty(\mathbf{R}) \otimes_\pi R$.

Démonstration. Elle est standard pour les tenseurs décomposables : cf. [13], p. 124-125 par exemple. Le cas général s'en déduit par un argument de densité.

2.4. LEMME. *Soit* $I_n : \Omega_n(R_1) \longrightarrow \Omega_{n-1}(R)$ *l'homomorphisme défini par*

$$I_n(\omega) = (-1)^{n-1} \left[\int_0^1 f_0(t) \ldots f_i(t) \ldots f_n'(t)\, dt\right] . a_0 . da_1 \ldots da_i \ldots \hat{d}\, a_n$$

avec les notations précédentes. On a alors la formule

$$bI - Ib = bI_n$$

où b *désigne le bord de Hochschild usuel*.

[3] On peut énoncer un théorème analogue en remplaçant R_1 par l'algèbre $A_1 = C^\infty(R) \otimes_\pi A$ à laquelle on a ajouté un élément unité. La démonstration est la même.

Démonstration. Ecrivons de nouveau $c_i = f_i(t) \otimes a_i$. Il est clair que la différence $(bI - Ib)(\omega)$ se calcule en ne tenant compte que de la dérivée de la dernière variable par rapport à t, c'est-à-dire en remplaçant ω par $\theta = [f_0(t)...f_{n-1}(t)\otimes a_0].da_1....da_{n-1}.a_n.d(f_n(t))$. On a alors de manière évidente $(Ib)(\theta) = 0$ et $(bI)(\theta) = b(I_n(\omega))$, ce qui démontre la formule.

2.5. LEMME. *L'homomorphisme* I *passe au quotient et induit un morphisme*

$$\overline{\Omega}_n(R_1) \longrightarrow \overline{\Omega}_{n-1}(R)$$

Enfin, le lemme 2.3 *est aussi valable pour les espaces vectoriels* $\overline{\Omega}_*$.

Démonstration. Si $\omega = b\theta$, $I(\omega) = (Ib)(\theta) = b(I(\theta)) - b(I_n(\theta))$ appartient aussi à l'image de b. De même, si $\omega = (db)(\theta)$, $I(\omega) = Idb(\theta) = dIb(\theta) + (J_1 - J_0)(b\theta) = d(bI - bI_n)(\theta) +$
$b(J_1 - J_0)(\theta)$, donc appartient à Im(b) + Im(db). Le reste de la démonstration est évident.

2.6. *Fin de la démonstration du théorème* 2.2. Elle est aussi classique, compte tenu du lemme 2.5 : cf. [13] p. 124 de nouveau.

Une conséquence importante du théorème 2.2 est le théorème suivant (comparer avec [23]) :

2.7. THEOREME. *Soit* A_r *l'algèbre des fonctions* C^∞ *sur le simplexe*[4] *type* Δ_r *à valeurs dans* A, *interprétée comme le produit tensoriel complété*[5] $C^\infty(\Delta_r) \otimes_\pi A$. *L'application évidente* $A \longrightarrow A_r$ *induit alors un isomorphisme* $HC_n^{per}(A) \approx HC_n^{per}(A_r)$.

Démonstration. En termes de l'homologie de de Rham non commutative vue plus haut, ce théorème est conséquence de son invariance homotopique en tant que noyau de B : $HC_n(A) \longrightarrow HH_{n+1}(A)$. Ce noyau s'identifie à l'image de l'opérateur de périodicité S : $HC_{n+2}(A) \longrightarrow HC_n(A)$ de Connes. Il ne change pas si on remplace l'algèbre A par le produit tensoriel $C^\infty(\mathbf{R}) \otimes_\pi A$ ou, plus généralement, par $C^\infty(\Delta_r) \otimes_\pi A$ d'après 2.2. Nous pouvons donc écrire un diagramme commutatif

$$0 \longrightarrow \varprojlim_r{}^1 HC_{n+2r+1}(A) \longrightarrow HC_n^{per}(A) \longrightarrow \varprojlim_r HC_{n+2r}(A) \longrightarrow 0$$

[4] On peut éviter les "problèmes d'angle" en définissant Δ_r comme l'<u>espace affine</u> des points de coordonnées $(t_0, t_1, ..., t_r)$ dans $\mathbf{R}^{r+1}$ vérifiant la relation $t_0 + t_1 + ... + t_r = 1$ (on ne suppose plus que les t_i sont ≥ 0). Les opérations face et dégénérescence permettant de définir l'anneau simplicial $C^\infty(\Delta_r)$ sont induites par la nullité ou la répétition d'une variable t_i (cf. [19] p. 55). D'une manière générale, si A est une algèbre de Banach et X une variété, $C^\infty(X) \otimes_\pi A$ s'identifie à l'algèbre des fonctions de classe C^∞ sur X à valeurs dans A.

[5] Si A est une algèbre de Banach, ce produit tensoriel complété s'identifie à l'algèbre des fonctions C^∞ sur Δ_r à valeurs dans A.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \varprojlim_r{}^1 HC_{n+2r+1}(A_r) & \longrightarrow & HC_n^{per}(A_r) & \longrightarrow & \varprojlim_r HC_{n+2r}(A_r) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où les flèches verticales extrêmes sont des isomorphismes. Par conséquent, $HC_n^{per}(A) \cong HC_n^{per}(A_r)$.

2.8. *Remarque*. Ce qui précède montre que le caractère de Chern classique sur $K_1(A)$, soit

$$K_1(A) \longrightarrow HC_{2n-1}(A)$$

passe au quotient par la K-théorie topologique : on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} K_1(A) & \longrightarrow & HC_{2n-1}(A) \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & K_1^{top}(A) & \end{array}$$

ce qui est essentiellement le résultat énoncé dans [3] et [13]. Notons cependant que dans les définitions présentes le groupe $HC_{2n-1}(A)$ n'est plus nécessairement séparé.

2.9. Nous allons conclure ce paragraphe en précisant mieux la relation entre les considérations développées longuement dans [13] et celles de cet article. L'idée consiste à remplacer dans le double complexe (B, b) de Connes détaillé en 1.4 et appliqué à l'algèbre $\tilde{A}$, les espaces vectoriels $\Omega_n(\tilde{A})$ par leur quotient $\overline{\Omega}_n(\tilde{A})$ suivant l'image de b et celle de $db + bd = 1 - \sigma$. Les flèches verticales deviennent alors nulles. En recopiant la définition des diverses variantes de l'homologie cyclique, on introduit de nouveaux groupes d'homologie, désignés génériquement par le symbole $H\Pi C$ (la lettre Π pour “produit”, ce qui sera justifié par le théorème suivant). Des morphismes de $HC_n(A)$ dans $H\Pi C_n(A)$, de $HC_n^{per}(A)$ dans $H\Pi C_n^{per}(A)$, etc... sont définis de manière évidente (en plongeant A dans $\tilde{A}$ au préalable).

2.10. THEOREME. *On a des isomorphismes*

$$H\Pi C_n(A) \cong \overline{\Omega}_n(\tilde{A})/d(\overline{\Omega}_{n-1}(\tilde{A})) \oplus H_{n-2}(\tilde{A}) \oplus H_{n-4}(\tilde{A}) \oplus \dots$$
$$H\Pi C_n^{per}(A) \cong \prod_{k\in \mathbf{Z}} H_{n+2k}(\tilde{A})$$
$$H\Pi C_n^{--}(A) \cong \overline{Z}^n(\tilde{A}) \oplus \prod_{k>O} H_{n+2k}(\tilde{A})$$

Dans ces isomorphismes H *désigne l'homologie de de Rham non commutative et* $\overline{Z}$ *l'espace vectoriel des formes fermées pour la différentielle* $d : \overline{\Omega}_* \longrightarrow \overline{\Omega}_{*+1}$. *Les composantes du morphisme canonique*

$$HC_n(A) \longrightarrow H\Pi C_n(A)$$

sont les suivantes. L'application $HC_n(A) \longrightarrow \overline{\Omega}^n(\tilde{A})/d(\overline{\Omega}^{n-1}(\tilde{A})) \cong C^\lambda_n(A)/b(C^\lambda_{n+1}(A)$ *est l'inclusion canonique, compte tenu de l'isomorphisme entre* $HC_*(A)$ *et l'homologie du complexe* $(C^\lambda_*(A), b)$ [C]. *Les autres applications sont induites par itération de l'opérateur de périodicité de* Connes $S : HC_n(A) \longrightarrow HC_{n-2}(A)$, *dont l'image est le sous-groupe* $H_{n-2}(\tilde{A})$.

Démonstration. Elle est conséquence immédiate des définitions et du théorème 2.15 de [13]. Les morphismes $HC^{per}_n(A) \longrightarrow H\Pi C^{per}_n(A)$ et $HC^{--}_n(A) \longrightarrow H\Pi C^{--}_n(A)$ s'explicitent de la même manière.

3. Le caractère de Chern en K-théorie algébrique et topologique.

3.1. Nous allons passer en revue rapidement les considérations de [3], [13], [23], [10], etc... pour les adapter à notre contexte. Soit donc G un groupe discret et soit $\tilde{C}_{**}(G)$ le bicomplexe considéré dans [13] p. 35 et dans [11]. Soit $C_{**}(G) = G\backslash\tilde{C}_{**}(G)$ le quotient de $\tilde{C}_{**}(G)$ par l'action à gauche de G. Comme dans le § 1, les doubles indices (p,q) figurant dans $C_{p,q}(G)$ varient dans les domaines $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}$. En suivant [13] et le § 1, on pose de même

$$C^{per}_n(G) = \prod_{p+q=n} C_{p,q}(G) \text{ pour } n > 0 \text{ et } C^{per}_0(G) = \mathrm{Ker}\Big[\prod_{p+q=0} C_{p,q}(G) \longrightarrow \prod_{p+q=-1} C_{p,q}(G)\Big],$$

avec des définitions analogues pour $C^{--}_n(G)$ si $n \geq 0$. En particulier, d'après [11], $HC_*(G)$ est défini comme l'homologie du complexe total associé au double complexe précédent restreint au premier quadrant[6].

3.2. On peut considérer d'autres bicomplexes, plus triviaux, en remplaçant les colonnes impaires de $C_{**}(G)$ par 0. On obtient ainsi des bicomplexes et des complexes simples associés, notés respectivement $TC_{**}(G)$, $TC^{per}_*(G)$, $TC^{--}_*(G)$, etc.... La lettre T est la première du mot "trivial", car les homologies associées sont de manière triviale somme directe de groupes d'homologie classiques. Un des résultats principaux de [11] (voir aussi [10] et [24]) est que les complexes $C^{--}_*(G)$ et $TC^{--}_*(G)$ sont quasi-isomorphes de manière naturelle dans la catégorie dérivée. De manière plus explicite, on peut définir des quasi-isomorphismes

$$TC^{--}_*(G) \longleftarrow B^{--}_*(G) \longrightarrow C^{--}_*(G)$$

où le complexe $B^{--}_*(G)$ est construit à l'aide des opérateurs classiques B et b (cf. [18] p. 57 et exercice E.7.4.8 p. 252 par exemple, ou bien [24], p. 339). Soit par ailleurs $C_*(G)$ le complexe classique définissant l'homologie d'Eilenberg-Mac Lane du groupe G. Il existe une flèche évidente de ce complexe dans $TC^{--}_*(G)$ (considérer l'inclusion de la colonne 0 dans le

[6] On démontre (cf. [11]) que $HC_*(G)$ est facteur direct de $HC_*(\mathbf{Z}[G])$.

bicomplexe $TC^{--}_{**}(G)$ dont le complexe total est $TC^{--}_{*}(G)$: ce morphisme est bien défini car la colonne de degré -1 de $TC^{--}_{**}(G)$ est réduite à 0). Il en résulte une injection scindée de l'homologie du groupe $H*(G)$ dans $HC^{--}_{*}(G)$ qui peut être choisie naturelle en G. Ceci est le point clé de la construction des classes caractéristiques construites dans [12] et généralisées dans [10] et [23].

Plus précisément, on a le théorème suivant [10][23] :

3.3. THEOREME. *Le caractère de* Chern *en K-théorie algébrique*

$$K_n(A) \longrightarrow HC^{--}_n(A)$$

composé avec les flèches canoniques de $HC^{--}_n(A)$ *dans* $HH_n(A)$ *et* $HC_{n+2r}(A)$, *donne l'homomorphisme de* Dennis *et les classes caractéristiques définies dans* [11].

3.4. En suivant la méthode de Weibel [23], nous allons maintenant utiliser de manière plus fine la correspondance de Dold-Kan entre complexes de chaînes et groupes abéliens simpliciaux pour interpréter le caractère de Chern en K-théorie <u>topologique</u>. Rappelons (cf. [16]) qu'on peut associer à un complexe de chaînes D_* un groupe abélien simplicial, noté $|D_*|$, dont le complexe des chaînes est quasi-isomorphe canoniquement à D_*. De manière plus concrète, soient A une algèbre de Fréchet, A_* l'anneau simplicial associé et G_* le groupe simplicial (non abélien) défini par $GL(A_*)$. Les considérations développées dans [16], de par leur caractère explicite, s'étendent sans problème aux groupes simpliciaux et fournissent une application simpliciale $BG_* \longrightarrow |C_*(BG_*)|$. En composant avec les morphismes explicités en [16] et étendus aux groupes bisimplicaux, on trouve le diagramme suivant :

$$BG_* \longrightarrow |C_*(BG_*)| \longrightarrow |TC^{-}_*(G_*)| \longleftarrow |B^{--}_*(G_*)| \longrightarrow |C^{--}_*(G_*)|$$
$$\longrightarrow |C^{per}_*(G_*)| \longrightarrow |C^{per}_*(A_*)|$$

Ici la dernière flèche est induite par l'inclusion du groupe linéaire dans l'algèbre des matrices (cf. [K], p. 37 et [L] p. 267 pour les détails). Si on note $B'G_*$ le produit fibré homotopique de BG_* et de $|B^{-}_*(G_*)|$ au-dessus de $|TC^{-}_*(G_*)|$, on obtient un ensemble simplicial homotopiquement équivalent à BG_* : considérer le diagramme

$$\begin{tikzcd}
& B'G_* \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
BG^* \arrow[dr] & & |B^{-}_*(G_*)| \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
& |TC^{-}_*(G_*)| & & |C^{per}_*(A_*)|
\end{tikzcd}$$

3.5. *Remarque*. Supposons que **Q** soit inclus dans l'anneau de base R. Les considérations précédentes peuvent être alors considérablement simplifiées de la manière suivante. Nous remplaçons d'abord le bicomplexe $\tilde{C}_{**}(G)$ associé à l'objet cyclique évident par le bicomplexe de Connes (B, b) explicité en 1.4 dans un contexte voisin. Ce bicomplexe est quasi-isomorphe au bicomplexe $\tilde{C}^{a}_{**}(G)$ obtenu en remplaçant les colonnes par les groupes formés des chaînes antisymétriques normalisées[7]. Dans ce cadre, l'opérateur B de Connes est égal à (1 - t)sN avec les notations de [13] p. 25 par exemple. Puisque s = 0, ce bicomplexe est quasi-isomorphe de manière équivariante à la somme directe de ses colonnes. On en déduit les morphismes suivants (en quotientant les précédents par l'action de G)[8], la dernière flèche étant un quasi-isomorphisme :

$$BG \longrightarrow \left|C^{a}_{*}(G)\right| \longrightarrow \left|C^{a--}_{**}(G)\right| \longleftarrow \left|C^{--}_{**}(G)\right|$$

où l'exposant ^{a} signifie qu'on considère les chaînes antisymétriques normalisées. En particulier, si G = GL(A), il existe un morphisme canonique $\left|C^{--}_{**}(G)\right| \longrightarrow \left|C^{--}_{**}(\tilde{A})\right|$. En appliquant la construction + de Quillen, on en déduit une application bien définie à homotopie près $BGL(A)^{+} \longrightarrow \left|C^{--}_{**}(\tilde{A})\right| \longrightarrow \left|C^{--}_{**}(A)\right|$, d'où un homomorphisme $K_n(A) \longrightarrow HC^{--}_{n}(A)$.

Les considérations précédentes sont à la charnière de la construction des classes caractéristiques construites dans [13] et généralisées dans [10] et [23]. Plus précisément, nous avons le théorème suivant :

3.6. THEOREME [10]. *Le caractère de* Chern *en K-théorie algébrique*

$$K_n(A) \longrightarrow HC^{--}_{n}(A) ,$$

composé avec la flèche canonique de $HC^{--}_{n}(A)$ *dans* $HH_n(A)$ *redéfinit l'homorphisme de* Dennis. *Le même caractère composé avec la flèche de* $HC^{--}_{n}(A)$ *dans* $HC_{n+2r}(A)$ *permet de retrouver les classes caractéristiques définies dans* [11].

3.7. En suivant la méthode de Weibel [23], nous allons maintenant utiliser de manière plus fine la correspondance de Dold-Kan explicitée dans [16] entre complexes de chaînes et groupes abéliens simpliciaux pour interpréter le caractère de Chern en K-théorie topologique. De manière plus concrète, soient A une algèbre de Fréchet, A_* l'anneau simplicial associé et G_* le groupe simplicial (non abélien) défini par $GL(A_*)$. Les considérations développées en 3.? de manière explicite s'étendent sans problème aux groupes simpliciaux. On trouve ainsi le diagramme suivant d'ensembles simpliciaux (où j est une équivalence d'homotopie) :

[7] C'est là que nous utilisons l'hypothèse $\mathbf{Q} \subset R$ par une technique de moyenne classique.

[8] Par abus d'écriture, on note encore $|?|$ la construction de Dold-Kan appliqué au complexe simple associé à un bicomplexe, complexe qu'il convient de tronquer comme explicité en [23] : cf. aussi [16].

$$BG_* \longrightarrow \left|C^a_*(G_*)\right| \longrightarrow \left|C^{a--}_{**}(G_*)\right| \xleftarrow{j} \left|C^{--}_{**}(G_*)\right| \longrightarrow \left|C^{--}_{**}(A_*)\right|$$

$$\longrightarrow \left|C^{per}_{**}(A_*)\right|$$

Si on note $B'G_*$ le produit fibré de BG_* et de $\left|C^{--}_{**}(G_*)\right|$ au-dessus de $\left|C^{a--}_{**}(G_*)\right|$, on obtient un ensemble simplicial homotopiquement équivalent à BG_*.

3.8. DEFINITION (essentiellement contenue dans [23]). *Le caractère de* Chern *en K-théorie topologique*

$$K^{top}_n(A) \longrightarrow HC^{per}_n(A)$$

est obtenu en appliquant le foncteur π_n *au morphisme* $B'G_* \longrightarrow \left|C^{per}_*(A_*)\right| \approx \left|C^{per}_*(A)\right|$ *défini précédemment .*

[La dernière équivalence d'homotopie est conséquence du théorème 2.2 ; on note C^{per}_* le complexe simple déduit du double complexe C^{per}_{**}].

3.9. En suivant la méthode de [13], inspirée par la géométrie différentielle classique, nous allons maintenant définir un autre morphisme fondamental

$$\phi : BG_* \longrightarrow \left|\Pi C^{per}_*(A_*)\right|$$

où le complexe ΠC^{per}_* est défini de manière générale en 2.9. De manière précise, si $(g_0, g_1, ..., g_n)$ est un élément "homogène" de EG_*, on lui associe les formes différentielles induites par les "formes de Chern simpliciales" explicitées dans [13], soit

$$\frac{1}{p!}\,\mathrm{Trace}(R^p)$$

où R représente la "courbure" $d\Gamma_i + (\Gamma_i)^2$ avec $\Gamma_i = \sum_{k=0}^{n} x_k g^{-1}_{ki} .dg_{ki}$, et $g_{ki} = g_k g_i^{-1}$, les x_k étant les coordonnées barycentriques sur un simplexe standard et la trace étant indépendante de i (cf. [13] § 5 et A.3.5 pour les détails). En fait, un calcul simple montre qu'on peut remplacer Γ_i par $\Gamma = \sum_{k=0}^{n} x_k g_k^{-1}.dg_k$. Une remarque fondamentale s'impose à ce niveau : si l'on exprime les formes de Chern en termes de formes différentielles non commutatives, on trouve une combinaison linéaire de tenseurs de la forme $h_0\, dh_1 ... dh_q$, où les h_i appartiennent à G de produit égal à 1 (cf. [13], p. 36-37).

En faisant varier p, on définit ainsi un cycle du <u>tricomplexe</u> suivant :

$$\overline{\Omega}_2(\tilde{A}_*) \longleftarrow \overline{\Omega}_1(\tilde{A}_*) \longleftarrow \overline{\Omega}_0(\tilde{A}_*)$$

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \overline{\Omega}_2(\tilde{A}_*) & \longleftarrow & \overline{\Omega}_1(\tilde{A}_*) & \longleftarrow & \overline{\Omega}_0(\tilde{A}_*) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\overline{\Omega}_2(\tilde{A}_*) & \longleftarrow & \overline{\Omega}_1(\tilde{A}_*) & \longleftarrow & \overline{\Omega}_0(\tilde{A}_*) & &
\end{array}
$$

Celui-ci est analogue au bicomplexe considéré en 1.4, mais avec des flèches verticales égales à 0, les horizontales étant égales à B (c'est-à-dire en fait à un multiple de la différentielle usuelle d sur $\overline{\Omega}$), ou aux différentielles induites par la structure simpliciale de A_*. Nous nous référons à 2.1 pour la définition de $\overline{\Omega}$. Puisque le complexe simple associé au bicomplexe $(\overline{\Omega}_*(\tilde{A}_*), d)$ a le type d'homotopie du complexe $(\overline{\Omega}_*(\tilde{A}), d)$ d'après le théorème 2.2, on peut remplacer le tricomplexe précédent par le bicomplexe obtenu grâce à la substitution $\tilde{A}_* \mapsto \tilde{A}$. Les méthodes précédentes de géométrie différentielle permettent de définir ainsi un autre morphisme

$$\phi : K_n^{top}(A) \longrightarrow H\Pi C_n^{per}(A)$$

où $H\Pi C_n^{per}(A)$ est le produit des groupes d'homologie $H_{n-2r}(\tilde{A})$, $r \in \mathbf{Z}$, d'après 2.10.

3.10. THEOREME. *Le morphisme* $K_n^{top}(A) \longrightarrow H\Pi C_n^{per}(A)$ *défini ci-dessus coïncide (à une normalisation près) avec l'application composée* $K_n^{top}(A) \longrightarrow HC_n^{per}(A) \longrightarrow H\Pi C_n^{per}(A)$, *les éléments de cette composition étant définis en 2.10 et 4.4.*

Démonstration. Nous allons de nouveau suivre la démonstration détaillée en [13] § V. Le point essentiel, aussi bien pour la définition précédente de ϕ que pour celle de 4.3-4, est l'analyse du morphisme composé suivant (avec des notations évidentes) :

$$B'G \longrightarrow |C_*^{per}(\mathbf{C}[G])| \longrightarrow |\Pi C_*^{per}(\mathbf{C}[G])|$$

G étant un groupe discret quelconque (B'G , variante mineure de BG, est l'ensemble simplicial explicité en 3.?). Dans ces réalisations simpliciales du type de Dold-Kan et écrites sous la forme $|?|$, nous utilisons pour les deux morphismes le langage des formes différentielles à la Sullivan, détaillé [16]. Ceci est clair pour ϕ par exemple car, dans l'expression de la puissance de la courbure R explicitée plus haut, interviennent les différentielles des coordonnées barycentriques x_k. Le fait que $\frac{1}{p!}\mathrm{Trace}(R^p)$ soit une forme fermée est bien connu. Il a été exploité largement dans [13] § V. Un argument général d'algèbre homologique, utilisant essentiellement le théorème de Kan-Thurston, montre que les deux morphismes conduisent à des applications homotopes, du moins à une normalisation près (cf. [13], § 5.17 à 5.29 pour les détails). Cette homotopie étant naturelle (car G est quotient d'un groupe libre), elle s'étend aux groupes simpliciaux, ce qui conduit au théorème annoncé.

4. K-théories multiplicative et relative.

4.1. THEOREME-DEFINITION. *Soit* $\mathcal{K}(A)$ *la fibre homotopique de l'application composée*

$$B'G_* \longrightarrow \left|C_*^{per}(A_*)\right| \longrightarrow \left|C_*^{per}(A_*)\right| \big/ \left|C_*^{--}(A)\right|$$

où G_* *est le groupe simplicial* $GL(A_*)$ *et où* $B'G_*$, *homotopiquement équivalent à* BG_*, *est défini en 3.?. Pour* $n > 0$, *les groupes de "*K*-théorie multiplicative"* $\mathcal{K}_n(A)$ *sont alors définis*[9] *comme les groupes d'homotopie de* $\mathcal{K}(A)$. *Ils s'insèrent dans une suite exacte*

$$K_{n+1}^{top}(A) \longrightarrow HC_{n-1}(A) \longrightarrow \mathcal{K}_n(A) \longrightarrow K_n^{top}(A) \longrightarrow HC_{n-2}(A)$$

Ici, les $K_n^{top}(A) = \pi_n(BGL(A_*))$ *désignent les groupes de* K*-théorie topologique de* A *(ce sont les groupes usuels si* A *est une algèbre de Banach ; ils sont alors périodiques de période* 2 *ou* 8 *d'après* Bott).

Démonstration. Le seul point non trivial dans ce théorème consiste à remarquer que $\left|C_*^{per}(A_*)\right|$ est homotopiquement équivalent à $\left|C_*^{per}(A)\right|$, ce qui résulte du théorème 2.2. En effet, le groupe simplicial quotient $\left|C_*^{per}(A_*)\right| \big/ \left|C_*^{--}(A)\right|$ s'identifie alors à $\left|C_*^{per}(A)\right| \big/ \left|C_*^{--}(A)\right|$ qui est homotopiquement équivalent à $\left|C_{*-2}(A)\right|$.

4.2. Par ailleurs, il est immédiat que l'application composée $BGL(A)^{\delta} \longrightarrow BGL(A_*) \longrightarrow \left|C_*^{per}(A_*)\right|$ se factorise par $\left|C_*^{--}(A)\right|$. On en déduit une application canonique de $BGL(A)^{\delta}$ dans $\mathcal{K}(A)$. De même, si on note $\mathcal{G}$ la fibre homotopique de l'application

$$B'GL(A) \longrightarrow B'GL(A_*)$$

on en déduit une application canonique de $\mathcal{G}$ dans $\left|C_{*-1}(A)\right|$. Grâce à la construction + de Quillen, nous pouvons écrire le diagramme suivant de fibrations homotopiques qui est commutatif à homotopie près (avec $\mathcal{F} = \mathcal{G}^+$) :

[9] Ces groupes diffèrent en général des groupes de K-théorie multiplicative définis dans [13] et notés $MK_*(A)$; en particulier, les groupes d'homologie cyclique considérés dans le présent article ne sont pas nécessairement séparés.

$$\begin{array}{ccccccc}
\Omega BGL(A_*) & \longrightarrow & \mathfrak{F} & \longrightarrow & BGL(A)^+ & \longrightarrow & BGL(A_*) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\Omega BGL(A_*) & \longrightarrow & \Omega\left|C_{*-2}(A)\right| & \longrightarrow & \mathcal{K}(A) & \longrightarrow & BGL(A_*)
\end{array}$$

En appliquant le foncteur π_n, on trouve une partie du diagramme commutatif de l'introduction

$$\begin{array}{ccccccc}
K_n^{rel}(A) & \longrightarrow & K_n(A) & \longrightarrow & K_n^{top}(A) & \longrightarrow & K_{n-1}^{rel}(A) \\
\downarrow & & \downarrow & & \| & & \downarrow \\
HC_{n-1}(A) & \longrightarrow & \mathcal{K}_n(A) & \longrightarrow & K_n^{top}(A) & \longrightarrow & HC_{n-2}(A)
\end{array}$$

[Nous montrerons un peu plus loin en 4.5 que l'homomorphisme composé $K_n^{rel}(A) \longrightarrow HC_{n-1}(A) \longrightarrow HC_{n-1}^{sep}(A)$, où $HC_{n-1}^{sep}(A)$ désigne le groupe séparé associé à $HC_{n-1}(A)$, est le caractère de Chern relatif construit en [6]].

4.3. La commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
HC_{n-1}(A) & \longrightarrow & \mathcal{K}_n(A) & \longrightarrow & K_n^{top}(A) & \longrightarrow & HC_{n-2}(A) \\
\| & & \downarrow & & \downarrow & & \| \\
HC_{n-1}(A) & \longrightarrow & HC_n^{--}(A) & \longrightarrow & HC_n^{per}(A) & \longrightarrow & HC_{n-2}(A)
\end{array}$$

résulte des fibrations homotopiques

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{K}_n(A) & \longrightarrow & BGL(A_*) & \longrightarrow & \left|C_*^{per}(A)\right| / \left|C_*^{--}(A)\right| \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\left|C_*^{--}(A)\right| & \longrightarrow & \left|C_*^{per}(A)\right| & \longrightarrow & \left|C_*^{per}(A)\right| / \left|C_*^{--}(A)\right|
\end{array}$$

Enfin, la commutativité du dernier diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
HC_{n-1}(A) & \longrightarrow & HC_n^{--}(A) & \longrightarrow & HC_n^{per}(A) & \longrightarrow & HC_{n-2}(A) \\
\| & & \downarrow & & \downarrow & & \| \\
HC_{n-1}(A) & \longrightarrow & HH_n(A) & \longrightarrow & HC_n(A) & \longrightarrow & HC_{n-2}(A)
\end{array}$$

résulte des définitions classiques (cf. [18], p. 158 par exemple).

4.4.THEOREME. *Le morphisme* $K_n^{rel}(A) \longrightarrow HC_{n-1}(A)$ *défini en 4.2 coïncide (à une normalisation près) avec le caractère de* Chern *relatif défini en* [6][10].

Démonstration. Le caractère de Chern en K-théorie algébrique, défini à l'aide de connexions et de courbures dans [6], s'interprète comme un morphisme simplicial

$$BGL(A)^{\delta} \longrightarrow |\Pi C_*^{--}(A)|$$

où $\Pi C_*^{--}(A)$ est le complexe total (tronqué comme dans 1.1) associé au bicomplexe suivant introduit essentiellement en 1.4 et 2.9, les flèches verticales étant triviales :

$$\begin{array}{ccccc}
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\overline{\Omega}_4 & \longleftarrow & \overline{\Omega}_3 & \longleftarrow & \overline{\Omega}_2 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \overline{\Omega}_2 & \longleftarrow & \overline{\Omega}_1 \\
 & & & & \downarrow \\
 & & & & \overline{\Omega}_0
\end{array}$$

(la réalisation géométrique à la Dold-Kan est interprétée à l'aide du complexe de de Rham usuel : cf. [16]). De même, le caractère de Chern en K-théorie topologique peut s'interpréter comme la composition $BGL(A_*) \longrightarrow |\Pi C_*^{--}(A_*)| \longrightarrow |\Pi C_*^{per}(A_*)| \approx |\Pi C_*^{per}(A)|$. On a donc un diagramme commutatif, où les flèches horizontales sont injectives :

$$\begin{array}{ccc}
BGL(A)^{\delta} & \xrightarrow{\theta} & BGL(A) \\
\downarrow & & \downarrow \\
|\Pi C_*^{--}(A)| & \xrightarrow{\Gamma} & |\Pi C_*^{per}(A_*)| \approx |\Pi C_*^{per}(A)|
\end{array}$$

Le caractère de Chern relatif tel qu'il est défini dans [13] consiste à raisonner au niveau des fibres homotopiques de θ et Γ. De manière précise, la fibre homotopique de θ en tant qu'ensemble simplicial peut s'écrire en dimension n comme l'ensemble des couples (g, h), où $g = (g_1, ..., g_n)$ un élément "non homogène" de BG, G = GL(A), et où $h = (h_1, ..., h_n)$ est une suite d'éléments de $GL(EA_n)$, EA_n s'identifiant à l'anneau des polynômes $P(t) \in A_n[t]$ sans terme constant, avec la condition $h_i(1) = g_i$. Les formes de Chern définissent un élément $\omega(t)$ de $\Pi C_*^{per}(EA_*)$ tel que $\omega(0) = 0$ et $\omega(1) \in \mathrm{Im}\ \gamma : \Pi C_*^{--}(A) \longrightarrow \Pi C_*^{per}(A_*)$. Par intégration par rapport au paramètre t, $\omega(t)$ définit ainsi un élément de $|C(\Gamma)|$, où $C(\Gamma)$ est le cône à gauche du morphisme de complexes $\Pi C_*^{--}(A) \longrightarrow \Pi C_*^{per}(A_*)$. On reconnaît là très exactement une des définitions équivalentes du caractère de Chern relatif détaillée dans [13], p. 99, comme flèche de $GL(A_*)/GL(A)$ dans $|\Pi C_*^{per}(A_*)| \,/\, |\Pi C_*^{--}(A)|$ (aux notations près). En appliquant la construction + de Quillen à l'ensemble simplicial $GL(A_*)/GL(A)$ et en considérant le groupe d'homotopie π_n, on aboutit à la classe caractéristique secondaire

[10] à condition de remplacer le groupe topologique $HC_{n-1}(A)$ par le groupe séparé associé.

$$K_n^{rel}(A) \longrightarrow \overline{\Omega}_{n-1}(\tilde{A})/d(\overline{\Omega}_{n-2}(\tilde{A}))$$

définie dans [13] p. 101. Si on intercale les groupes abéliens simpliciaux $\left|C_*^{per}(A_*)\right|$ et $\left|C_*^{--}(A)\right|$, on construit par ailleurs un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
[GL(A_*)/GL(A)]^+ & \longrightarrow & [BGL(A)^\delta]^+ & \longrightarrow & BGL(A_*) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\Omega(\left|C_*^{per}(A_*)\right| / \left|C_*^{--}(A)\right|) & \longrightarrow & \left|C_*^{--}(A)\right| & \longrightarrow & \left|C_*^{per}(A_*)\right| \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\Omega(\left|\Pi C_*^{per}(A_*)\right| / \left|\Pi C_*^{--}(A)\right|) & \longrightarrow & \left|\Pi C_*^{--}(A)\right| & \longrightarrow & \left|\Pi C_*^{per}(A_*)\right|
\end{array}$$

ce qui montre que le caractère de Chern relatif défini en [13] se factorise bien à travers le groupe d'homologie cyclique $HC_{n-1}(A)$ et définit le morphisme

$$K_n^{rel}(A) \longrightarrow HC_{n-1}(A)$$

défini plus haut en 4.2 (en rendant séparé ce dernier groupe, hypothèse générale formulée dans [13] pour faire les calculs).

5. Extension aux algèbres de Banach ultramétriques.

5.1. Une algèbre de Banach ultramétrique est un **Z**-module A muni d'une “quasi-norme” $p : A \longrightarrow \mathbf{R}^+$ vérifiant les propriétés suivantes :

1) $p(x + y) \leq \mathrm{Sup}(p(x), p(y))$
2) $p(x) = 0 \Leftrightarrow p(x) = 0$
3) $p(-x) = p(x)$
4) $p(xy) \leq p(x)p(y)$

On suppose en outre que A est complet pour la distance définie par $d(x, y) = p(y-x)$.

Nous sommes intéressés par trois types d'exemples :

a) Les algèbres <u>discrètes</u> A pour lesquelles on pose $p(x) = 1$ si $x \neq 0$.

b) Soit B un anneau quelconque et soit I un idéal bilatère tel que $\bigcap_n I^n = 0$. Choisissons un nombre réel λ tel que $0 < \lambda < 1$. On définit alors sur B une quasi-norme en posant $p(x) = \lambda^n$ si $x \in I^n$ et $x \notin I^{n+1}$ (pour $x \neq 0$). Le complété de B pour cette quasi-norme est alors une algèbre de Banach ultramétrique qui s'identifie à la limite projective $A = \hat{B} = \varprojlim B/I^n$.

c) Dans l'exemple ci-dessus, supposons que B soit commutative et soit R une B-algèbre. On définit de même sur R une quasi-norme en posant $p(a) = \lambda^n$ si $a \in I^n R$ et $a \notin I^{n+1} R$ (si n n'existe pas, on pose $n = \infty$). Le séparé complété $\hat{R}$ de R pour cette quasi-norme est aussi une algèbre de Banach ultramétrique isomorphe à la limite projective $\varprojlim R/I^n R$.

5.2. Pour définir la K-théorie topologique d'une algèbre de Banach ultramétrique A, on peut se servir de la méthode décrite dans [17]. L'algèbre des séries convergentes $A<x_0, ..., x_n>$ à n+1 variables et à coefficients dans A est l'algèbre des séries formelles $\sum_I a_I x^I$ telles que le terme général a_I tende vers 0 (I est un multi-indice). Le quotient de cette algèbre par l'idéal $(x_0 + ...+ x_n - 1)$ est désigné par A_n. Puisque A est ultramétrique, A_n s'identifie à une algèbre de séries convergentes $A<t_1, ..., t_n>$ obtenue en remplaçant une des variables x_i par $1 - \sum_{j \neq i} x_j$. Il est clair que la correspondance $[n] \mapsto A_n$ définit une algèbre simpliciale.

5.3. DEFINITION. *La K-théorie topologique de l'algèbre de Banach ultramétrique* A *est définie par la formule suivante (pour n > 0) :*

$$K_n^{top}(A) = \pi_n(BGL(A_*))$$

où $GL(A_*)$ *est le groupe simplicial associé à l'anneau simplicial* A_* *défini plus haut.*

5.4. *Commentaires et exemples*. Il est montré dans [1] que cette définition coïncide avec celle de [17]. Si A est un anneau noethérien régulier <u>discret</u>, Quillen a montré qu'elle coïncide avec la définition classique, c'est-à-dire avec le groupe d'homotopie $\pi_n(BGL(A)^+)$ [20]. Dans ce cadre, Weibel a montré que les théorèmes généraux en K-théorie algébrique s'étendent en partie à ce type de K-théorie topologique (cf. [23]). D'une manière générale, si I est un idéal bilatère de B comme en 5.1, on montre que $K_n^{top}(\hat{B}) \approx K_n^{top}(B/I)$, B/I étant considéré comme anneau ultramétrique discret. Si F est un corps de nombres, $\mathfrak{O}$ son anneau d'entiers et $\mathfrak{P}$ un idéal maximal, on désigne par $F_{\mathfrak{P}}$ le corps des fractions de $A_{\mathfrak{P}} = \varprojlim A/\mathfrak{P}^n$. Alors $F_{\mathfrak{P}}$ est un anneau ultramétrique et on a une suite exacte (de localisation) :

$$0 \longrightarrow K_n(A/\mathfrak{P}) \longrightarrow K_n^{top}(F_{\mathfrak{P}}) \longrightarrow K_{n-1}(A/\mathfrak{P}) \longrightarrow 0$$

démontrée par A. Calvo [1]. Ce dernier résultat montre que, d'une certaine façon, le calcul de la K-théorie topologique de $F_{\mathfrak{P}}$ se ramène à celui de la K-théorie algébrique des corps finis, calcul dû à Quillen. En particulier, $K_n^{top}(F_{\mathfrak{P}})$ est fini pour n > 1.

5.5. Si E et F sont deux espaces de Banach ultramétriques (définition évidente), on peut définir leur produit tensoriel[11] projectif $E \otimes_\pi F$ par une formule analogue à celle définissant le produit tensoriel complété usuel d'espaces de Banach. En effet, si z est un élément de $E \otimes_{\mathbf{Z}} F$ s'exprimant sous la forme (S) suivante : $z = \sum_i a_i \otimes b_i$, on pose $p(z) = \operatorname{Inf}_S \operatorname{Sup}\{p(a_i)\, p(b_i)\}$ suivant toutes les écritures (S) possibles. Le séparé complété de $E \otimes_{\mathbf{Z}} F$ pour cette quasi-norme est par définition le produit tensoriel projectif $E \otimes_{\pi} F$. Il vérifie la propriété universelle usuelle pour les applications **Z**-bilinéaires continues. En particulier, si A est une algèbre de Banach ultramétrique, on peut définir l'homologie cyclique (topologique) de A par la même méthode que celle décrite dans le § 1.

5.6. *Exemples*. Si $A = \mathbf{Q}_p$ est le corps des nombres p-adiques, on vérifie sans peine que le produit tensoriel complété de A par lui-même (en tant que **Z**-algèbre) est isomorphe à A par la multiplication. L'homologie cyclique topologique de $\mathbf{Q}_p$ coïncide donc avec son homologie cyclique algébrique en tant que $\mathbf{Q}_p$-algèbre. Plus généralement, soit R une algèbre commutative et soit I un idéal de R. Si Λ est une R-algèbre, l'homologie cyclique topologique de son séparé complété $\hat{\Lambda}$ coïncide alors à son homologie cyclique algébrique (en tant que R-algèbre).

5.7. Il nous faut maintenant trouver l'analogue ultramétrique des fonctions C^{∞} sur un simplexe afin de pouvoir utiliser les techniques du § 2. La définition appropriée semble être la suivante : avec les notations de 5.2, on dira qu'une série formelle $\sum_I a_I x^I$ est "*indéfiniment intégrable*" ssi quel que soit r, la suite $|I|^r\, p(a_I)$ tend vers 0 lorsque I tend vers l'infini. On peut alors montrer [1] que la K-théorie topologique ne change pas si on remplace l'anneau simplicial A_* de 5.2 par l'anneau plus petit construit avec des séries indéfiniment intégrables, anneau que nous noterons A_r^{∞}. L'anneau A_r^{∞} n'est pas une algèbre de Banach en général (de même d'ailleurs que celui des fonctions C^{∞} sur un simplexe), mais c'est une "algèbre de Fréchet", i.e. définie par une famille dénombrable de quasi-normes, l'espace métrique sous-jacent étant complet. Toutes les définitions précédentes s'étendent sans peine aux algèbres de Fréchet ultramétriques, y compris la définition de l'homologie cyclique.

5.8. DEFINITION. *Soit* A *une algèbre de Banach ultramétrique qui est une* **Q**-*algèbre. On dit que* A *est "commensurable" s'il existe* λ *et* μ *tel que* $p(\frac{1}{n}) \leq \lambda n^{\mu}$.

Avec les méthodes de [1], on peut alors démontrer l'analogue suivant du théorème 2.7 :

5.9. THEOREME. *Soit* A_r^{∞} *l'anneau des fonctions indéfiniment intégrables sur le simplexe* Δ_r *à valeurs dans* A, *où* A *est une algèbre de Banach ultramétrique commensurable sur le corps* **Q**. *L'application évidente* $A \longrightarrow A_r^{\infty}$ *induit alors un isomorphisme* $HC_n^{per}(A) \approx HC_n^{per}(A_r^{\infty})$.

Démonstration. Il suffit de copier celle du § 2. Le point essentiel est la définition de l'opérateur d'homotopie

$$I : \Omega_n(R_1) \longrightarrow \Omega_{n-1}(R)$$

[11] E et F étant considérés comme **Z**-module.

(cf. 2.2). C'est dans cette définition que sont utilisées les hypothèses : caractéristique 0 pour intégrer les polynômes, décroissance rapide sur les coefficients pour assurer la convergence des séries intégrées.

5.10. Ces bases étant assurées, les paragraphes précédents se réécrivent aisément dans le cadre ultramétrique. En particulier, il existe un caractère de Chern topologique

$$K_n^{top}(A) \longrightarrow HC_n^{per}(A)$$

Si A est un anneau de Banach ultramétrique discret, on retrouve le caractère de Chern défini par Weibel [23], où $K_n^{top}(A)$ est noté $KV_n(A)$). Voici un autre exemple : soit A l'anneau des séries laurentiennes $\mathbf{Q}_p<x, x^{-1}>$. On montre que $K_1^{top}(\mathbf{Q}_p<x, x^{-1}>) \approx \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus (\mathbf{Z}/p)^*$ et que les deux facteurs $\mathbf{Z}$ sont déterminés par le caractère de Chern topologique (analogue d'un logarithme p-adique), car $HC_n^{per}(\mathbf{Q}_p) \approx \mathbf{Q}_p$ pour n = 0.

On pourrait définit de même une K-théorie multiplicative ultramétrique. En particulier, si F est un corps de nombres, il serait intéressant de savoir si l'application canonique

$$R : K_n(F) \longrightarrow \prod_v \mathcal{K}_n(F_v)$$

est injective. Ici v parcourt toutes les places de F et F_v désigne la complétion de F à la place v. La K-théorie multiplicative $\mathcal{K}_n(F_v)$ doit être interprétée comme celle de l'algèbre de Banach transcendante F_v si v est infinie et celle de l'algèbre de Banach ultramétrique associée à un idéal premier si v est une place finie. L'homomorphisme R est l'analogue d'un "régulateur" généralisé (c'est bien ce qui se passe pour une place à l'infini comme il est montré dans [13], p. 103). Ce régulateur figure déjà de manière implicite dans [12] p. 560.

6. Compléments.

6.1. Les groupes $K_n(A)$, $HC_n(A)$, etc... sont naturellement munis d'une topologie. En effet, comme l'a remarqué G. Segal [22], si G est un groupe topologique, l'espace classifiant BG^δ, où G^δ désigne G muni de la topologie discrète, est un espace muni de deux topologies. Cette remarque s'applique d'ailleurs plus généralement à un espace simplicial arbitraire. En effet, si (X_*) est un tel espace, la réalisation géométrique $|X^\delta|$ de l'ensemble discret sous-jacent est la réunion disjointe $\coprod_n X_n \times \Delta_n$, quotientée par la relation d'équivalence usuelle. La topologie des X_n définit alors la 2^e topologie sur $|X^\delta|$.

Les espaces avec deux topologies sont les objets d'une catégorie intéressante. En particulier, si G = GL(A), la construction + de Quillen appliquée à l'espace $BGL(A)^\delta$ et obtenue en ajoutant une 2-cellule et une 3-cellule est aussi un espace muni de deux topologies. La 2^{e} topologie sur $BGL(A)^{+}$ induit une topologie sur les groupes $K_n(A)$, dont il est facile de montrer qu'elle coïncide avec celle définie dans [13], p. 121.

Enfin, les réalisations de Dold-Kan définies dans les paragraphes précédents sont également des espaces munis de deux topologies, car ils sont associés à des groupes simpliciaux topologiques. Il en est donc de même des fibres homotopiques $\mathcal{K}(A)$ et $\mathbb{K}^{rel}(A)$ des applications continues suivantes (pour les deux topologies)

$$BGL(A_*) \longrightarrow \left|C_*^{per}(A_*)\right| / \left|C_*^{--}(A)\right| \quad \text{et} \quad BGL(A)^{\delta +} \longrightarrow BGL(A_*)$$

On en déduit le théorème suivant :

6.2. THEOREME. *Les applications “régulateurs”*

$$K_n(A) \longrightarrow \mathcal{K}_n(A) \quad \text{et} \quad K_n^{rel}(A) \longrightarrow HC_{n-1}(A)$$

sont des applications continues pour les topologies définies ci-dessus.

REFERENCES

[1] **A. CALVO.** K-théorie des anneaux ultramétriques. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 300, Série I, N° 14, 459-462 (1985).

[2] **H. CARTAN.** Théorie cohomologiques. Invent. Math. 35, 261-271 (1976).

[3] **A. CONNES.** Noncommutative differential geometry. Publ. Math. IHES 62, 257-360 (1985).

[4] **A. CONNES.** Cohomologie cyclique et foncteurs Ext^n. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris Sér. A-B 296, 953-958 (1983).

[5] **A. CONNES.** Noncommutative Geometry. Academic Press (1994).

[6] **A. CONNES et M. KAROUBI.** Caractère multiplicatif d'un module de Fredholm. C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 299, 963-968 (1984) et K-theory 2, 431-463 (1988).

[7] **J. CUNTZ et D. QUILLEN.** Operations on noncommutative differential forms (à paraître au Journal of Differential Geometry).

[8] **T.G. GOODWILLIE.** Cyclic homology, derivations and the free loop space. Topology 24, 187-215 (1985).

[9] **A. GROTHENDIECK.** Produits tensoriels topologiques. Memoirs of the American Math. Society N° 16 (1955).

[10] **C. HOOD et J.D.S. JONES.** Some algebraic properties of cyclic homology groups. K-theory 1, 361-384 (1987).

[11] **M. KAROUBI.** Homologie cyclique et K-théorie algébrique I et II. C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A-B 303, 447-450 et 513-516 (1983).

[12] **M. KAROUBI.** Homologie cyclique et régulateurs en K-théorie algébrique. C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A-B 303, 557-560(1983).

[13] **M. KAROUBI.** Homologie cyclique et K-théorie. Astérisque 149. Société Mathématique de France (1987).

[14] **M. KAROUBI**. Formes différentielles non commutatives et cohomologie à coefficients arbitraires. Transactions of the AMS 347, 4277-4299 (1995).

[15] **M. KAROUBI.** Formes différentielles non commutatives et opérations de Steenrod. Topology 34, 699-715 (1995).

[16] **M. KAROUBI**. Correspondance de Dold-Kan et formes différentielles (soumis pour publication).

[17] **M. KAROUBI et O. VILLAMAYOR.** K-théorie algébrique et K-théorie topologique I. Math. Scand. 28, 265-307 (1971).

[18] **J.-L. LODAY.** Cyclic homology. Grundlehren der mathematiscen Wissenschaften. N° 301. Springer-Verlag (1992).

[19] **S. MAC LANE.** Homology. Springer-Verlag (1975).

[20] **D. QUILLEN.** HigherAalgebraic K-theory. Springer Lecture Notes in Maths. N° 341, 85-147 (1973).

[21] **J. ROSENBERG.** Algebraic K-theory and its applications. Graduate Texts in Math N° 147. Springer-Verlag (1994).

[22] **G. SEGAL.** Manuscrit non publié.

[23] **C. WEIBEL.** Nil K-theory maps to cyclic homology. Trans. AMS 303, 541-558 (1987).

[24] **C. WEIBEL.** An introduction to homological algebra. Cambridge University Press (1994).

Max KAROUBI
Université Paris 7-Mathématiques
UMR 9994 du CNRS
2, place Jussieu
75251 Paris Cedex 05
FRANCE
e.mail : karoubi@math.jussieu.fr