JOURNAL OF ALGEBRA **198,** 618–626 (1997)
ARTICLE NO. JA977168

Correspondance de Dold–Kan et formes differentielles

Max Karoubi*

Mathématiques, Université Paris 7, UMR 9994 du CNRS, 2, Place Jussieu, 75251, Paris, Cedex 05, France

Communicated by Wilberd van der Kallen

Received September 3, 1996

La correspondance de Dold–Kan classique (cf. [7, Sect. 8.4] par exemple) est une équivalence entre la catégorie des complexes de chaînes (gradués positivement), notée $\mathcal{C}$ dans cet article, et celle des groupes abéliens simpliciaux, notée $\mathcal{S}$. Plus précisément, l'équivalence est définie par le foncteur

$$F : \mathcal{S} \to \mathcal{C}$$

qui associe à un groupe abélien simplicial S_*, le complexe de *chaînes* C_* défini par[1]

$$C_n = \bigcap_{i>0} \operatorname{Ker}(\partial_i : S_n \to S_{n-1}).$$

Ici, les ∂_i, $i \geq 0$, sont les opérateurs face classiques et la différentielle $C_n \to C_{n-1}$ est induite par le premier opérateur face ∂_0. On trouvera dans [7] une démonstration de ce théorème ainsi qu'une description combinatoire d'un foncteur $E : \mathcal{C} \to \mathcal{S}$ en sens inverse.

Un exemple typique de cette correspondance est la construction d'un modèle "minimal" d'espace d'Eilenberg–Mac Lane $K(U, n)$, U étant un groupe abélien quelconque. Celui-ci est associé au complexe qui est trivial en chaque degré, sauf en degré n, où il est égal à U.

* E-mail address: karoubi@math.jussieu.fr.

[1] Il revient au même de considérer le quotient de S_* par la somme des images des opérateurs de dégénérescence, la différentielle étant alors égale à la somme alternée des opérateurs face (cf. [7, p. 266]).

0021-8693/97 $25.00

Cependant, dans un article précédent qui utilise notamment la théorie des formes différentielles non commutatives [4], nous avons montré que ce modèle minimal était insuffisant pour décrire la structure multiplicative de la cohomologie et les opérations de Steenrod, définies à l'aide de modèles où opèrent divers groupes symétriques.

Le but de cet article est de construire, dans le cadre des formes différentielles, d'autres foncteurs entre les catégories $\mathcal{S}$ et $\mathcal{C}$ qui ont le mérite de décrire de manière plus conceptuelle le foncteur E et des foncteurs analogues qui tiennent compte des structures supplémentaires définies par les opérations cohomologiques. Il complète sur de nombreux points les considérations de [2, 4] dont il s'inspire en partie. Enfin, les résultats de cet article nous permettent de relier les classes caractéristiques en K-théorie algébrique [3, 6] et le régulateur de Borel [1], défini dans un contexte de géométrie différentielle.

1. MODÈLES SIMPLICIAUX DES ESPACES D'EILENBERG–MAC LANE

1.1. Reprenons brièvement les considérations développées dans [4, Sects. 1 et 2]. Si R est un anneau commutatif quelconque et A une R-algèbre (unitaire, mais non nécessairement commutative), on peut définir l'algèbre différentielle graduée $\Omega^*(A)$ des formes différentielles non commutatives sur A, ainsi que le sous-complexe $\Lambda^*(A)$ des formes diffférentielles antisymétriques. Si A est commutative, l'algèbre des formes différentielles *commutatives*, analogues aux formes de de Rham, est notée $\Omega^*_{dR}(A)$ et se définit de manière parallèle. En particulier, $\Omega^*_{dR}(A) = A$ et $\Omega^n_{dR}(A)$ est la nième puissance extérieure de $\Omega^1_{dR}(A)$ en tant que A-module. Notons que $\Omega^1_{dR}(A)$ s'identifie au premier groupe d'homologie de Hochschild de A à coefficients dans A.

Dans cet article, nous nous intéressons plus particulièrement au cas où A est l'algèbre quotient $R[x_0, \dots, x_r]/I$, I étant l'idéal principal engendré par $x_0 + \cdots + x_r - 1$, algèbre que nous noterons A_r, ainsi qu'à l'algèbre R^{r+1} (fonctions définies sur le r-simplexe standard à valeurs dans R) et que nous noterons $\overline{A}_r$. Cette dernière est isomorphe au quotient de A_r par l'idéal engendré par les $(x_i)^2 - x_i$ et $x_i x_j$ pour $i \neq j$. L'algèbre des formes différentielles non commutatives sur l'anneau $\overline{A}_r = R^{r+1}$ s'identifie donc à celle des cochaînes normalisées standard.

En fait, les correspondances $[r] \mapsto A_r$ et $[r] \mapsto \overline{A}_r$ définissent des algèbres simpliciales auxquelles nous pouvons appliquer les foncteurs Ω^*, Λ^* ou Ω^*_{dR} pour obtenir des complexes simpliciaux. En particulier, les *cocycles* de degré n des complexes $\Omega^*(A_r)$, $\Omega^*(\overline{A}_r)$ et $\Lambda^*(\overline{A}_r)$ (que nous noterons aussi $\Omega^*(\Delta_r)$, $C^*(\Delta_r)$ et $\Lambda^*(\Delta_r)$ respectivement) définissent trois modèles de l'espace d'Eilenberg–Mac Lane $K(R, n)$, comme cela est montré dans [4].[2] Le modèle minimal de $K(R, n)$ de l'introduction (pour $U = R$) est associé au *troisième modèle* $[r] \mapsto \Lambda^*(\Delta_r)$. Plus précisément, $K(R, n)$ s'identifie au groupe des cocycles de degré n du complexe $\Lambda^*(\overline{A}_r) = \Lambda^*(\Delta_r)$, r étant la dimension simpliciale: cf. le paragraphe 1.3 pour plus de précisions.

Si $\mathbf{Q} \subset R$, les cocycles de degré n du complexe $\Omega^*_{dR}(A_r)$ définissent de même un quatrième modèle de $K(R, n)$ à la de Rham–Sullivan; cf. [2] par exemple. Si $\mathbf{C} \subset R$, on peut remplacer $\Omega^*_{dR}(A_r) = \Omega^*_{dR}(\Delta_r)$ par l'algèbre des formes différentielles C^∞ usuelles à valeurs complexes sur le simplexe *géométrique* Δ_r. S'il n'y a pas de risque de confusion, on la notera aussi $\Omega^*_{dR}(\Delta_r)$.

1.2 Les modules différentiels gradués simpliciaux ainsi définis sont reliés entre eux par des morphismes explicités dans [4]:

$$\Lambda^*(\Delta_r) \to C^*(\Delta_r) \leftarrow \Omega^*(\Delta_r) \to \Omega^*_{dR}(\Delta_r).$$

Le foncteur $[X, ?]$, où X est un ensemble simplicial et où le point d'interrogation ? est un des trois premiers modules différentiels gradués simpliciaux $\Lambda^*(\Delta_*)$, $C^*(\Delta_*)$ ou $\Omega^*(\Delta_*)$, définit un complexe dont la cohomologie est canoniquement isomorphe à la cohomologie usuelle $H^*(X; R)$. Si $\mathbf{Q} \subset R$, la même assertion est vraie pour le quatrième module $\Omega^*_{dR}(\Delta_*)$.

1.3 Pour fixer les idées, supposons que $R = \mathbf{Z}$. D'après ce qui précède, $\Lambda^n(\Delta_r)$ est le $\mathbf{Z}$-module libre formé des cochaînes normalisées antisymétriques de degré n sur le simplexe standard Δ_r. Une telle cochaîne est une fonction $f(i_0, \ldots, i_n) \in \mathbf{Z}$, avec $i_\alpha \in \{0, 1, \ldots, r\} = \Delta_r$, telle que

(1) $f = 0$ si deux indices consécutifs i_α et $i_{\alpha+1}$ sont égaux (condition de normalisation)

(2) $f(i_{\sigma(0)}, \ldots, i_{\sigma(n)}) = \varepsilon_\sigma f(i_0, \ldots, i_n)$ si σ est une permutation de signature ε_σ (condition d'antisymétrie).

(Noter que $\Lambda^n(\Delta_r)$ est nul pour $n > r$). En particulier, le "cocycle volume" est l'élément ω_r de $\Lambda^r(\Delta_r)$ caractérisé par l'identité $\omega_r(0, 1, \ldots, r) = 1$. Ce cocycle est le cobord de $\chi_r \in \Lambda^{r-1}(\Delta_r)$, défini ainsi:

(1) $\chi_r(i_1, \ldots, i_r) = 0$ si $\{i_1, \ldots, i_r\} \neq \{1, \ldots, r\}$

(2) $\chi_r(1, 2, \ldots, r) = 1$.

[2] En fait, un examen attentif des considérations de [4] montre plus généralement que la structure d'anneau de R n'est pas indispensable pour ces définitions. Ainsi, R peut être un groupe abélien quelconque.

1.4 Après ces rappels relativement classiques, considérons un complexe de chaînes C_*, objet de la catégorie $\mathbf{C}$. On peut lui associer un *double* complexe simplicial du deuxième quadrant défini par

$$D_{p,q}(\Delta_r) = \Lambda^{-p}(\Delta_r) \otimes_{\mathbf{Z}} C_q.$$

Les deux différentielles (diminuant p ou q d'une unité) sont induites par les différentielles sur Λ^{-*} et sur C_*. A ce double complexe est associé le complexe simplicial simple défini par

$$C_n(\Delta_r) = \bigoplus_{p+q=n} D_{p,q}(\Delta_r) = \bigoplus_{q \geq n} \Lambda^{q-n}(\Delta_r) \otimes_{\mathbf{Z}} C_q$$

où $n \in \mathbf{Z}$. On s'intéresse plus particulièrement au sous-groupe, noté $E(C_*)$, formé des chaînes *fermées* de degré $n = 0$ de ce complexe: il est inclus dans la somme directe des $\Lambda^q(\Delta_r) \otimes_{\mathbf{Z}} C_q$. Sa structure de groupe abélien simplicial est induite par les opérateurs face et dégénérescence sur les Δ_r.

1.5. THEOREME. *Le foncteur $E : \mathbf{C} \to \mathbf{S}$ est inverse à isomorphisme canonique près de l'équivalence de catégories $F : \mathbf{S} \to \mathbf{C}$ définie dans l'introduction.*

Démonstration. Un morphisme naturel

$$\varphi : C_r \to C_0(\Delta_r)$$

est défini par la formule

$$\varphi(c) = (-1)^r \omega_r \otimes c + (-1)^{r-1} \chi_r \otimes dc$$

où ω_r et χ_r sont détaillés en 1.3. Il est clair que $\varphi(c)$ est un cycle et appartient donc à $E(C_*)$. En outre, grâce au choix des cochaînes ω_r et χ_r, l'image de φ appartient à l'intersection des noyaux des opérateurs face ∂_i, $i = 1, \ldots, r$. Pour vérifier que φ induit bien un isomorphisme entre C_* et $F(E(C_*))$, il suffit de se restreindre au cas où C_* est concentré en un seul degré, car les foncteurs F et E sont exacts et commutent aux limites inductives. Le résultat découle alors immédiatement du fait que $\Lambda^r(\Delta_r)$ est un $\mathbf{Z}$-module libre de rang 1.

2. LES AUTRES CORRESPONDANCES

2.1. Remarquons d'abord qu'il existe un autre foncteur naturel $F' : \mathbf{S} \to \mathbf{C}$. Il associe au groupe abélien simplicial S_* le complexe définissant l'homologie de S_* (somme alternée des opérateurs face). On a des morphismes évidents $F(S_*) \to F'(S_*)$ et $F'(S_*) \to F(S_*)$ qui induisent des isomorphismes en homologie; en fait $F(S_*)$ est facteur direct naturel de $F'(S_*)$ (cf. [7, p. 266], par exemple).

D'autre part, la description du foncteur E en 1.4 a utilisé les cochaînes normalisées antisymétriques. L'inconvénient de ces cochaînes est leur non stabilité vis-à-vis du cup-produit. Il est donc naturel de remplacer dans la définition du foncteur E le complexe $\Lambda^*(\Delta_r)$ par $C^*(\Delta_r)$ ou $\Omega^*(\Delta_r)$ (et même $\Omega^*_{dR}(\Delta_r)$ si $\mathbf{Q} \subset R$), dont la structure est plus riche. Ainsi, à partir d'un complexe de chaînes C_r, nous pouvons définir parallèlement des groupes abéliens simpliciaux analogues $C_0^{\Omega}(\Delta_r)$ (resp. $C_0^e(\Delta_r)$, $C_0^{dR}(\Delta_r)$). Les morphismes

$$\Lambda^*(\Delta_r) \to C^*(\Delta_r) \leftarrow \Omega^*(\Delta_r) \to \Omega^*_{dR}(\Delta_r)$$

explicités en [4] induisent des morphismes de groupes abéliens simpliciaux:

$$C_0(\Delta_r) \to C_0^e(\Delta_r) \leftarrow C_0^{\Omega}(\Delta_r) \to C_0^{dR}(\Delta_r).$$

2.2. THEOREME. *Les flèches précédentes sont des équivalences d'homotopie entre groupes abéliens simpliciaux (à condition de supposer que* $\mathbf{Q} \subset R$ *pour le dernier morphisme).*

Démonstration. Puisque les morphismes commutent aux limites inductives et que l'homotopie des objets est l'homologie des complexes correspondants, il suffit de vérifier le théorème pour des complexes concentrés en un seul degré, par application répétée du lemme des 5. Nous nous retrouvons ainsi dans la situation détaillée dans [4], où le théorème est démontré (modèles simpliciaux d'espaces d'Eilenberg–Mac Lane).

2.3. Il peut être intéressant de construire l'analogue des cochaînes ω_r et χ_r dans le complexe $\Omega^*(\Delta_r)$. Ces formes sont explicitées dans [5]: elles sont définies sur le simplexe type Δ_r et vérifient les propriétés suivants (Δ_{r-1} étant considérée comme la 0-face de Δ_r):

$$\omega_r \mid_{\partial\Delta_r} = 0; \qquad \omega_r = d\chi_r; \qquad \chi_r \mid_{\Delta_{r-1}} = \omega_{r-1},$$

la restriction de χ_r aux autres faces de Δ_r étant égale à 0. La forme ω_r est choisie en sorte qu'elle engendre le groupe d'homotopie $\pi_r(Z^r) \approx H^r(\Delta_r, \partial\Delta_r) \approx \mathbf{Z}$.

De manière plus précise, si $r = 1$, nous pouvons poser $\chi_1 = x_1$, $\omega_1 = dx_1$, x_1 étant la coordonnée locale de $\Delta_1 = \{0, 1\}$. Si ω_r et χ_r sont donnés, définissons $\tilde{\omega}_{r+1}$ de degré r sur Δ_{r+1} en sorte que ses restrictions à toutes les faces soient égales à 0, sauf celle à la 0-face qui est égale à ω_r (cf. [5, Sect. 2.3]). On pose alors $\chi_{r+1} = \tilde{\omega}_{r+1}$ et $\omega_{r+1} = d\chi_{r+1}$. Il est clair que le couple $(\chi_{r+1}, \omega_{r+1})$ satisfait aux conditions requises au niveau $r+1$. Avec les notations standard, nous avons par exemple

$$\chi_1 = x_1, \qquad \omega_1 = dx_1 \text{ sur } \Delta_1 = \{0,1\}$$

$$\chi_2 = -x_1 dx_2 + x_2 dx_1, \qquad \omega_2 = -dx_1 dx_2 + dx_2 dx_1 \text{ sur } \Delta_2 = \{0,1,2\}$$

$$\left(\Delta_1 \text{ s'identifiant à la 0-face } \{1,2\}\right)$$

etc.

Remarquons que l'intégrale de ω_r sur le simplexe standard Δ_r est égale à 1 en raison de la formule de Stokes. Dans le contexte du complexe de de Rham classique et avec les notations de l'algèbre extérieure, un autre choix des formes différentielles ω_r et χ_r est le suivant.[3]

$$\omega_r = r!\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_r,$$

$$\chi_r = (r-1)! \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge d\hat{x}_i \wedge \cdots \wedge dx_r.$$

Comme dans le Théorème 1.5, les formes ω_r et χ_r, dans un contexte commutatif aussi bien que non commutatif, permettent d'expliciter un quasi-isomorphisme entre le foncteur identique et le foncteur composé $E.F$ où $E(C_*)$ est un des trois modèles $C_0^{\Omega}(\Delta_r)$, $C_0^e(\Delta_r)$ ou $C_0^{dr}(\Delta_r)$.

2.4. Revenons à la définition des complexes $C_n^c(\Delta_r)$ et $C_n^{\Omega}(\Delta_r)$ définis en 2.1 et associés aux modèles $C^*(\Delta_r)$ et $\Omega^*(\Delta_r)$. Dans ces deux cas, nous pouvons définir des variantes en remplaçant la somme directe des $D_{p,q}$ par leur *produit direct*, soit

$$\prod_{p+q=n} D_{p,q}(\Delta_r).$$

Notons $\overline{C}_n^c(\Delta_r)$ et $\overline{C}_n^{\Omega}(\Delta_r)$ respectivement les nouveaux groupes abéliens simpliciaux obtenus par cette substitution.

2.5. THEOREME. *Les morphismes d'inclusion* $C_0^e(\Delta_r) \to \overline{C}_0^c(\Delta_r)$ *et* $C_0^{\Omega}(\Delta_r) \to \overline{C}_0^{\Omega}(\Delta_r)$ *induisent des équivalences d'homotopie entre les groupes abéliens simpliciaux correspondants*.

Démonstration. Le complexe de chaînes C_* peut s'écrire comme la limite *projective* des complexes "tronqués" $C_*[s]$ définis par

$$0 \to \operatorname{Im} d_{s+1} \to C_s \xrightarrow{d_s} C_{s-1} \to \cdots \to C_0 \to 0$$

dont l'homologie en chaque degré satisfait à la condition de Mittag–Leffler. Il en résulte que les complexes correspondants $C_0^c(\Delta_r)[s] = \overline{C}_0^c(\Delta_r)[s]$

[3] Sur le simplexe géométrique défini par l'équation $x_0 + x_1 + \cdots + x_r = 1$.

et $C_0^{\Omega}(\Delta_r)[s] = \overline{C}_0^{\Omega}(\Delta_r)[s]$ ont des homologies qui satisfont aussi à la condition de Mittag–Leffler puisque c'est celle de $C_*[s]$. L'homologie de $\overline{C}_0^s(\Delta_*)$ (resp. $\overline{C}_0^{\Omega}(\Delta_*)$) est ainsi la limite projective des homologies des complexes précédents, d'où le théorème.

2.6. *Notation*. En suivant C. Weibel [3], nous noterons $|C_*|$ le groupe abélien simplicial $E(C_*)$ associé au complexe de chaînes C_*. Il convient de noter que cette notation est ambigue si nous choisissons un foncteur E différent de celui de Dold–Kan. Dans le paragraphe suivant, nous choisirons le modèle $E(C_*) = \overline{C}_0^{\Omega}(\Delta_*)$ explicité en 2.4; il sera le plus commode pour notre propos.

3. CORRESPONDANCE DE DOLD–KAN ET HOMOLOGIE DES GROUPES

3.1. Soit G un groupe discret et soit $C_* = C_*(EG)$ le complexe d'Eilenberg–Mac Lane "homogène" définissant l'homologie[4] de $BG = EG/G$ lorsqu'on quotiente par l'action de G. Nous allons définir une application *simpliciale équivariante* remarquable

$$\Phi : EG \to |C_*|$$

la construction $|C_*|$ étant celle explicitée en 2.4–2.6 à l'aide du complexe de de Rham *non-commutatif* et en considérant le *produit* des $D_{p,q}$ pour $p + q = 0$. De manière précise, à un élément "homogène" $g = (g_0, g_1, \ldots, g_r)$ de degré r de EG est associée la *série formelle* suivante:

$$\Phi(g) = \sum_i x_i \otimes g_i + \sum_{(i,j)} x_i\, dx_j \otimes (g_i, g_j) + \sum_{(i,j,k)} x_i\, dx_j dx_k \otimes (g_i, g_j, g_k) + \cdots$$

qui est définie dans $\overline{C}_0^{\Omega}(\Delta_r)$. Ici, les $x_i\, dx_j$, $x_i\, dx_j dx_k$, etc., sont les formes différentielles non commutatives standard sur Δ_r associées aux coordonnées barycentriques x_i.

Un calcul immédiat montre que $\Phi(g)$ est bien un cycle de degré 0 dans le complexe défini au cran n par $\prod_{p+q=n} D_{p,q}(\Delta_r) = \prod_{p+q=n} \Omega^{q-n}(\Delta_r) \otimes_Z C_q$. Examinons maintenant la compatibilité vis-à-vis des structures simpliciales. Effectuer l'opération face ∂_i sur EG revient à omettre l'élément g_i, ce qui se traduit par l'équation $x_i = 0$ dans le membre de droite de la formule précédente. De même, l'opération de dégénérescence

[4] À coefficients dans un groupe abélien quelconque R.

s_i revient à dupliquer l'élément g_i, ce qui se traduit par la substitution de x_i en $x_i + x_{i+1}$ et le décalage des coordonnées x_j suivantes.

3.2. THEOREME. *L'application simpliciale précédente* Φ, *quotientée par l'action de* G, *est homotope à l'inclusion de* BG *dans le groupe abélien simplicial engendré par* BG.

Démonstration. Le complexe $C_*(EG)$ définit une résolution libre de $\mathbf{Z}$ en tant que $\mathbf{Z}[G]$-module grâce à l'augmentation évidente $C_0(EG) \to \mathbf{Z}$. Par ailleurs, les $\overline{C}_0^{\Omega}(\Delta_r)$, $r = 0, 1, \ldots$ constituent une résolution *acyclique* de $\mathbf{Z}$ en tant que $\mathbf{Z}[G]$-module, l'augmentation $\overline{C}_0^{\Omega}(\Delta_0) \to \mathbf{Z}$ associant à $1 \otimes g$ le nombre 1. En effet, chaque élément du complexe $\overline{C}_0^{\Omega}(\Delta_*)$ est une limite projective de $\mathbf{Z}[G]$-modules libres; l'acyclicité résulte donc de l'argument de Mittag–Leffler utilisé en 2.5. Puisque Φ est un morphisme de résolutions compatible avec l'augmentation, il induit ainsi un isomorphisme

$$H_r(BG) \overset{\cong}{\to} H_r\left(\overline{C}_0^{\Omega}(\Delta_*)/G\right).$$

Par ailleurs, les différents isomorphismes établis au §2 montrent que $H_r(\overline{C}_0^{\Omega}(\Delta_*)/G)$ est canoniquement isomorphe à $H_r(BG)$. Le résultat final est ainsi un automorphisme naturel de $H_r(BG)$. D'après un argument déjà utilisé en [3] grâce au théorème de Kan–Thurston, un tel automorphisme est nécessairement de la forme $u \mapsto \lambda_r u$, où λ_r est un scalaire indépendant de G. Pour montrer que $\lambda_r = 1$, il suffit d'examiner le cas particulier du groupe $G = \mathbf{Z}^r$. Soit en effet τ le caractère sur $H_r(G)$ défini par le cocyle normalisé antisymétrique $(x_1, \ldots, x_r) \mapsto \tau(x_1, \ldots, x_r)$, égal à 1 sur une suite ordonnée $(g_1, \ldots, g_r)$ de générateurs du groupe. Soit I: $\Omega^r(\Delta_r) \to \mathbf{Q}$ l'intégrale usuelle sur le simplexe Δ_r. En appliquant $I \otimes \tau$ à l'expression de $\Phi(g)$, on trouve précisément

$$r! \int_{\Delta_r} \tau(g_1, \ldots, g_r) = 1.$$

Ce calcul achève la démonstration du théorème.

3.3. *Remarque*. En cohomologie rationnelle ou complexe, nous pouvons remplacer le complexe de de Rham non commutatif par le complexe de de Rham–Sullivan $\Omega^*(\Delta_r)$ construit à l'aide des formes différentielles extérieures. La série définissant Φ en 3.1 devient alors finie car $\Omega_{dR}^i(\Delta_r) = 0$ pour $i > r$.

REFERENCES

1. A. Borel, Stable real cohomology of arithmetic groups, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **7** (1974), 235–272.

2. H. Cartan, Théories cohomologiques, *Invent. Math.* **35** (1976), 261–271.
3. M. Karoubi, Homologie cyclique et K-théorie, *Astérisque* **149** (1987).
4. M. Karoubi, Formes différentielles non commutatives et cohomologie à coefficients arbitraires, *Trans. Amer. Math. Soc.* **347** (1995), 4277–4299.
5. M. Karoubi, Formes différentielles non commutatives et opérations de Steenrod, *Topology* **34** (1995), 699–715.
6. C. Weibel, Nil K-theory maps to cyclic homology, *Trans. Amer. Math. Soc.* **303** (1987), 541–558.
7. C. Weibel, "An Introduction to Homological Algebra," Cambridge Univ. Press, Cambridge, United Kingdom, 1994.