C. R. Acad. Sci. Paris, t. 328, Série I, p. 755-758, 1999
Algèbre/*Algebra*

Méthodes quantiques en topologie algébrique

Max KAROUBI

Mathématiques, UMR 7586 du CNRS, case 7012, Université Paris 7, 2, place Jussieu
75251 Paris cedex 05, France
Courriel : karoubi@math.jussieu.fr

(Reçu le 19 octobre 1998, accepté après révision le 8 mars 1999)

Résumé. En utilisant des méthodes quantiques, nous introduisons ici la notion de « néo-algèbre » qui généralise celle d'algèbre différentielle graduée commutative. Sous certaines conditions de finitude, nous pouvons associer de manière fonctorielle à un espace une néo-algèbre sur le corps fini $\mathbf{F}_p$: sa classe de quasi-isomorphisme détermine le type d'homotopie p-adique de X. En fait, à partir de cette néo-algèbre, nous pouvons décrire simplement les opérations de Steenrod sur la cohomologie de X ainsi que la composante p-primaire de ses groupes d'homotopie. Ce point de vue étend à la caractéristique p la *théorie* bien connue de l'homotopie rationnelle due à D. Quillen [9] et à D. Sullivan [11]. Il est intimement lié aux travaux antérieurs de P. May, I. Kriz [5] et M.A. Mandell [7], [8]. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Quantum methods in algebraic topology

Abstract. *Using quantum methods, we introduce here the notion of "neo-algebra" which generalizes the notion of a commutative differential graded algebra. Under some mild finiteness conditions, we can associate functorially to a space a neo-algebra over the finite field $\mathbf{F}_p$: its quasi-isomorphism's class determines the p-adic-homotopy type of X. As a matter of fact, from this data, we can describe in a simple way Steenrod operations in the cohomology of X, as well as the p primary part of its homotopy groups. This point of view extends to finite characteristics the well-known rational homotopy* theory *of D. Quillen* [9] *and D. Sullivan* [11]. *It is deeply related to previous works of P. May, I. Kriz* [5] *and M.A. Mandell* [7], [8]. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

1. Néo-algèbres

Une « néo-algèbre » [1] consiste en les données suivantes 1, 2 et 3, soumises aux conditions (α), (β), (γ), (δ) décrites plus loin :

1. un k-module différentiel gradué A avec un « élément unité » 1 de degré 0 ;
2. un sous k-module différentiel gradué [2] A_2 de $A^{\otimes 2}$ stable par l'action du groupe $\mathbf{Z}/2$ opérant naturellement sur A^2 (avec les conventions usuelles de signe) ;
3. une « multiplication partielle » définissant un morphisme de complexes $\mu : A_2 \longrightarrow A$.

Note présentée par Alain CONNES.

On note μ_{12} (resp. μ_{23}) la multiplication partielle sur $A_2 \otimes A$ (resp. $A \otimes A_2$) à valeurs dans $A^{\otimes 2}$. Par ailleurs, pour i et j appartenant à l'ensemble $P = \{1, \dots, n\}$, $A_{i,j}$ désigne le translaté de $A_2 \otimes A^{\otimes(n-2)}$ dans $A^{\otimes n}$ par la permutation $(1,2) \mapsto (i,j)$ des facteurs. Le k-module A_n est l'intersection de tous les $A_{i,j}$ pour $(i,j) \in P \times P$.

Voici maintenant les propriétés (α), (β), (γ) et (δ) auxquelles doit satisfaire une néo-algèbre :

(α) l'inclusion de A_n dans A^n est un quasi-isomorphisme ;

(β) la multiplication $\mu : A_2 \longrightarrow A$ est $\mathbf{Z}/2$-équivariante, le groupe $\mathbf{Z}/2$ opérant trivialement sur A (*axiome de commutativité*) ;

(γ) le k-module A_2 contient $k \cdot 1 \otimes A$ et on a $\mu(1 \otimes a) = a$ pour tout élément a de A (*axiome de l'élément unité*). Compte tenu de l'axiome (β), A_2 contient aussi $A \otimes k \cdot 1$ et on a également $\mu(a \otimes 1) = a$;

(δ) le k-module $\mu_{12}(A_3)$ est inclus[3] dans A_2. On suppose en outre que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} A_3 & \xrightarrow{\mu_{12}} & A_2 \\ {\scriptstyle \mu_{23}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ A_2 & \xrightarrow[\mu]{} & A \end{array}$$

(*axiome d'associativité*).

Ces trois dernières propriétés impliquent notamment que toute application α de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ vers l'ensemble $\{1, \dots, p\}$ induit un morphisme fonctoriel $\alpha_* : A_n \longrightarrow A_p$. Cette définition est donc très voisine en esprit de celle des Γ-espaces proposée par G. Segal [10].

2. Exemples

1. Soient k un anneau commutatif et $q \in k$ tel que $n_q = 1 + q + \cdots + q^n$ soit inversible pour tout n ($q = 0$ par exemple). Soit $A = \Omega(t)$ l'algèbre différentielle graduée[4] définie par $\Omega^0(t) = k[t]$, $\Omega^1(t) = k[t]\,\mathrm{d}t$, la différentielle $\mathrm{d} : \Omega^0(t) \longrightarrow \Omega^1(t)$ étant définie par la formule « quantique » $\mathrm{d}(x^n) = n_q x^{n-1}$. La multiplication dans cette algèbre est induite par la règle de commutation suivante :

$$u \cdot \mathrm{d}v \cdot w = u \cdot \overline{w} \cdot \mathrm{d}v$$

(où l'endomorphisme $w \mapsto \overline{w}$ dans l'algèbre $k[t]$ est défini par $t \mapsto \overline{t} = qt$).

Il est bien connu [6] que A est une algèbre tressée, le tressage R étant défini par les formules suivantes (u et v étant de degré 0) :

$$R(u \otimes v) = v \otimes u \,; \quad R(u\,\mathrm{d}v \otimes w) = \overline{w} \otimes u\,\mathrm{d}v \,;$$

$$R(u \otimes v\,\mathrm{d}w) = v\,\mathrm{d}w \otimes u + v(w - \overline{w}) \otimes \mathrm{d}u \,; \quad R(u\,\mathrm{d}v \otimes w\,\mathrm{d}s) = -\overline{w}\,\overline{s} \otimes u\,\mathrm{d}v.$$

La structure de néo-algèbre de A est alors définie par le sous-module A_2 de $A^{\otimes 2}$ formé des éléments w tels que $R(w) = \sigma(w)$, σ désignant la transposition des deux facteurs de $A^{\otimes 2}$. Si $1 - q$ est inversible, il est facile de voir que les éléments de A_2 sont de degré total 0 ou 1 et sont combinaisons linéaires d'éléments de la forme $u \otimes v$ (en degré 0) ou bien $\mathrm{d}u \otimes v + u \otimes \mathrm{d}v$ (en degré 1).

2. Si $y_1, \ldots, y_n$ sont des indéterminées, l'ADG $A = \Omega(y_1, \ldots, y_r)$ est définie comme le produit tensoriel gradué $\Omega(y_1)\widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes}\Omega(y_r)$: elle est aussi tressée et peut être munie de la structure de néo-algèbre associée, comme dans l'exemple 1.

3. Pour un entier m donné, l'ADG $\Omega^*(\Delta_m)$ des formes différentielles quantiques sur le simplexe Δ_m est l'algèbre égalisant les deux morphismes évidents

$$\prod_i \Omega(x_0, \ldots, \widehat{x}_i, \ldots, x_m) \overset{\longrightarrow}{\longrightarrow} \prod_{i<j} \Omega(x_0, \ldots, \widehat{x}_i, \ldots, \widehat{x}_j, \ldots, x_m).$$

Elle peut être aussi munie d'un tressage et d'une structure de néo-algèbre. Il en est de même de l'algèbre « stabilisée » $\operatorname{colim}_r \Omega^{*\otimes r}(\Delta_m)$, qu'on notera $\widehat{\Omega}^*(\Delta_m)$; les flèches du système inductif étant définies par $\omega \mapsto \omega \otimes 1$.

3. Formes différentielles quantiques sur un ensemble simplicial. Opérations de Steenrod

Il est facile de voir que les correspondances $m \mapsto \Omega^*(\Delta_m)$ et $m \mapsto \widehat{\Omega}^*(\Delta_m)$ définissent des ADG *simpliciales* [5] satisfaisant aux axiomes de H. Cartan [2]. Définissons alors $\Omega^*(X)$ (resp. $\widehat{\Omega}^*(X)$), comme la « réalisation géométrique » $C^\natural(X)\nabla\Omega^*(\Delta_\natural)$ (resp. $C^\natural(X)\nabla\widehat{\Omega}^*(\Delta_\natural)$), où $C^\natural(X)$ est le k-module *cosimplicial* des cochaînes standard [1]. En suivant la méthode de H. Cartan (*cf.* aussi [4]), on peut montrer qu'il existe une suite en zigzag de quasi-isomorphismes entre les complexes $\Omega^*(X)$ et $\widehat{\Omega}^*(X)$ d'une part et le complexe classique des cochaînes singulières d'autre part. Par ailleurs, $A = \widehat{\Omega}^*(X)$ peut être munie d'une structure de néo-algèbre grâce à la remarque suivante : $\widehat{\Omega}^*(X) \otimes \widehat{\Omega}^*(X)$ est isomorphe au k-module $\left[C^\natural(X) \otimes C^\natural(X)\right]\nabla\left[\widehat{\Omega}^*(\Delta_\natural)\overline{\otimes}\widehat{\Omega}^*(\Delta_\natural)\right]$. Ici, $\widehat{\Omega}^*(\Delta_\natural)\overline{\otimes}\widehat{\Omega}^*(\Delta_\natural)$ représente le k-module *bisimplicial* qui, en bidegré (r,s), est formé des éléments de $\left[\widehat{\Omega}^*(\Delta_r) \otimes \widehat{\Omega}^*(\Delta_s)\right]$ dont la restriction à $\widehat{\Omega}(\Delta_t)^{\otimes 2}$ appartient à $\widehat{\Omega}(\Delta_t)_2$, t étant égal à $\inf(r,s)$.

Les considérations précédentes permettent de définir simplement les opérations de Steenrod. En effet, la suite en zigzag de morphismes $\widehat{\Omega}^*(X)^{\otimes n} \hookrightarrow \widehat{\Omega}^*(X)_n \to \widehat{\Omega}^*(X)$ induit un morphisme *équivariant* de $\widehat{\Omega}^*(X)^{\otimes n}$ dans $\widehat{\Omega}^*(X)$ dans la catégorie dérivée des $\mathfrak{S}_n$-complexes, donc des C_n-complexes, où C_n est le groupe fini cyclique d'ordre n. On en déduit un morphisme de $B_*(C_n) \otimes \widehat{\Omega}^*(X)^{\otimes n}$ dans $\widehat{\Omega}^*(X)$, $B_*(C_n)$ désignant une résolution quelconque de k par des $k[C_n]$-modules libres. En particulier, si $B_*(C_n)$ est la résolution standard par des $k[C_n]$-modules libres de rang un, il en résulte des applications k-linéaires de degré $-i$ de $\widehat{\Omega}^*(X)^{\otimes n}$ dans $\widehat{\Omega}^*(X)$ (désignées par des « cup i-produits »).

THÉORÈME 1. – *Fixons $n = p$ premier, $k = \mathbf{F}_p$ et $q = 0$ pour fixer les idées. La composition du cup i-produit précédent par l'application « élévation à la puissance p », soit $\widehat{\Omega}^*(X) \to \widehat{\Omega}^*(X)^p$, qui est également équivariante* [6], *induit alors les opérations de Steenrod $D_i : \mathrm{H}^m(X) \to \mathrm{H}^{mp-i}(X)$. En particulier, pour $p = 2$, D_i coïncide avec le carré de Steenrod Sq^j, avec $j = m - i$.*

3. Description algébrique du type d'homotopie

THÉORÈME 2. – *Considérons deux ensembles simpliciaux X et Y connexes, nilpotents et p-complets de type fini* [7]. *Nous supposons qu'il existe une suite en zigzag de quasi-isomorphismes de néo-algèbres (avec $k = \mathbf{F}_p$)*

$$\widehat{\Omega}^*(X) \longrightarrow A \longleftarrow B \longrightarrow \cdots \longleftarrow \widehat{\Omega}^*(Y).$$

Alors X et Y ont le même type d'homotopie.

Esquisse de démonstration. – De manière générale, on peut associer à une néo-algèbre une ADG partielle, donc une E_∞-algèbre par la méthode de I. Kriz et P. May [5]. D'après M.A. Mandell [8], nos hypothèses impliquent par ailleurs que les complexes de cochaînes $C^*(X)$ et $C^*(Y)$ sont reliés par une suite en zigzag de quasi-isomorphismes en tant que E_∞-algèbres, ce qui implique que X et Y ont le même type d'homotopie p-adique (*voir* [7]).

En fait, nous pouvons déterminer algébriquement les groupes d'homotopie d'un espace fini pointé X si ceux-ci sont des p-groupes finis à partir de la néo-algèbre $A = \widehat{\Omega}^*(X)$, sans recourir à la théorie des E_∞-algèbres. Pour cela, nous devons itérer la bar-construction dans notre contexte (*voir* [3]). De manière précise, la correspondance $(r_1, \ldots, r_n) \mapsto A_{r_1 \cdots r_n}$ définit un k-module différentiel gradué n-simplicial qui détermine en fait les groupes d'homotopie, grâce au théorème suivant :

THÉORÈME 3. – *Le complexe total*[8] $\mathrm{Tot}(A_{(-r_1)\cdots(-r_n)})$ *associé au multicomplexe précédent a une cohomologie isomorphe à celle de la* $n^{\text{ième}}$ *itération de l'espace des lacets de* X *(notée* $\mathcal{L}^n(X)$*).*

Remarque 1. – La structure de cogèbre sur le complexe total détermine la structure du groupe fini $\pi_n(X)$ (remarquer que $H^0(\mathcal{L}^n(X)) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(\pi_n(X), \mathbf{F}_p)$.

([1]) Une néo-algèbre détermine une algèbre partielle dans le sens de [5], p. 40. Avec notre point de vue, la donnée de A_2 suffit à déterminer tous les A_n, ainsi que les multiplications partielles $\mu_n : A_n \to A$ définies plus loin.

([2]) appelé « noyau symétrique » de $A^{\otimes 2}$. Si $A_2 = A^{\otimes 2}$, les propriétés (α), (β), (γ) et (δ) décrivent simplement une algèbre différentielle graduée commutative.

([3]) ce qui implique, par symétrie, la même propriété pour $\mu_{23}(A_3)$.

([4]) ADG en bref.

([5]) Les opérations face par exemple sont définies en égalant chacune des variables à 1.

([6]) Sur le premier facteur il convient de considérer l'action induite par la signature des permutations sur les formes différentielles de degré impair et qui est l'identité sur les formes de degré pair.

([7]) Ceci veut dire que sa tour de Postnikov peut être choisie en sorte que chaque fibre est de type $K(\mathbf{Z}/p, n)$ ou $K(\widehat{\mathbf{Z}}_p, n)$, $\widehat{\mathbf{Z}}_p$ désignant l'anneau des entiers p-adiques (*voir* [7]).

([8]) obtenu en considérant la *somme* des éléments situés sur les diagonales.

Références bibliographiques

[1] Bousfield A.K., Kan D.M., Homotopy limits, completions and localizations, Lect. Notes in Math. 304, Springer-Verlag, 1972.
[2] Cartan H., Théories cohomologiques, Invent. Math. 35 (1976) 261–271.
[3] Dwyer W.G., Strong convergence of the Eilenberg–Moore spectral sequence, Topology 13 (1974) 255–265.
[4] Karoubi M., Formes différentielles non commutatives et cohomologie à coefficients arbitraires, Trans. Amer. Math. Soc. 347 (1995) 4277–4299.
[5] Kriz I., May P., Operads, Algebras, Modules and Motives, Astérisque 233 (1995).
[6] Maltsiniotis G., Le langage des espaces et des groupes quantiques, Commun. Math. Phys. 151 (1993) 275–302.
[7] Mandell M.A., E_∞-algebras and p-adic homotopy theory, prépublié à l'adresse électronique suivante : http://www.lehigh.edu/~dmd1/algtop.html
[8] Mandell M.A., Cochain multiplications, (à paraître).
[9] Quillen D., Homotopical Algebra, Lect. Notes in Math. 43, Springer-Verlag, 1967.
[10] Segal G., Categories and cohomology theories, Topology 13 (1974) 293–312.
[11] Sullivan D., Infinitesimal computations in Topology, Publ. Math. IHES 47 (1977) 269–331.