59

Rapport sur la K-théorie (1956–1997)

Max Karoubi

Université Paris 7-Denis Diderot

Le but de ce rapport est d'introduire le mathématicien profane à la "K-théorie", terminologie qui peut lui paraître énigmatique au premier abord. Comme il est expliqué de manière détaillée dans le premier paragraphe, c'est en 1956 que Grothendieck eut l'idée d'associer à une variété algébrique X un invariant très voisin de la cohomologie et qu'il nota $K(X)$, la lettre K signifiant une classe ("Klassen" en allemand) d'objets naturellement associée à X. Faute de mieux, cette terminologie a résisté à l'épreuve du temps...

En fait, comme M. Jourdain pratiquait de la prose sans le savoir, on peut prétendre que tout mathématicien utilise la K-théorie. De manière purement algébrique, si M est un *monoïde* abélien, on sait lui associer un *groupe* abélien $S(M)$ de manière naturelle: c'est le quotient de $M \times M$ par la relation d'équivalence qui identifie le couple (x, y) au couple (x', y') s'il existe z tel que $x + y' + z = x' + y + z$ [penser à la classe du couple (x, y) comme la "différence" $x - y$ dans ce groupe]. Si M est le monoïde des entiers naturels $\mathbb{N}$ par exemple, $S(M)$ est le groupe des entiers relatifs $\mathbb{Z}$.

Une des raisons du succès de la K-théorie est que ce processus de "symétrisation" se rencontre dans plusieurs domaines des mathématiques et que le groupe $S(M)$ est susceptible d'être un invariant assez fin dans des situations très diverses.

Dans l'exemple des entiers naturels, il convient de noter que M s'identifie aussi à l'ensemble des k-espaces vectoriels de dimension finie, pris à isomorphisme près, k étant un corps quelconque. La structure de monoïde est alors induite par la somme directe des espaces vectoriels. On peut donc voir la "K-théorie" comme une généralisation de la notion de dimension d'un espace vectoriel. Notons cependant que la symétrisation dépend du choix du monoïde M. Si par exemple M est le monoïde de *tous* les espaces vectoriels de dimension dénombrable, on a $x + \infty = \infty$, où ∞ désigne la classe d'un espace vectoriel de dimension infinie; d'où $x = 0$ dans $S(M)$. Puisque tout élément de $S(M)$ s'écrit sous la forme $x - y$, on a $S(M) = 0$.

Remplaçons maintenant le corps k par un anneau A unitaire quelconque (non nécessairement commutatif). L'analogue d'un k-espace vectoriel est un A-module E (à droite pour fixer les idées). La finitude de la dimension est alors remplacée par l'hypothèse suivante: E est un facteur direct de A^n pour un certain n[1]. Si M désigne l'ensemble des classes d'isomorphie de tels modules, on désigne par $K(A)$ le groupe symétrisé de M: c'est la "K-théorie algébrique"[2] de l'anneau A.

La simplicité de cette définition peut faire illusion: dans des exemples courants, il est souvent difficile de "calculer" le monoïde M. Le groupe $K(A) = S(M)$ se révèle en général plus accessible, ce qui est conforme à la philosophie générale d'un mathématicien:

---

[1]Un tel module est dit projectif de type fini.

[2]Une K-théorie "topologique" sera définie plus loin dans un autre contexte.

mieux vaut travailler avec un groupe qu'avec un monoïde, où la soustraction n'est pas permise...

Voici quelques exemples d'anneaux A dont la K-théorie $K(A)$ se révèle intéressante:

a) A est l'anneau des entiers algébriques d'un corps de nombres[3]. On démontre alors que $K(A) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathcal{T}$, où $\mathcal{T}$ est un groupe fini: $\mathcal{T}$ est le groupe des classes d'idéaux de A, introduit par Kummer au siècle dernier [M]. Ce résultat laisse entrevoir des applications du sujet à la théorie des nombres.

b) $A = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I$, où I représente l'idéal des fonctions algébriques qui s'annulent sur une variété complexe algébrique affine X; $K(A)$ est alors essentiellement le groupe $K(X)$ de Grothendieck[4]. D'après un théorème bien connu de Serre, on peut remplacer dans cette définition le monoïde M par celui des classes d'isomorphie de fibrés algébriques sur X.

Malgré les nombreux théorèmes sur le sujet démontrés à l'heure actuelle, il n'existe pas de méthode générale pour calculer $K(X)$ en général. Par contre, de nombreux morphismes de $K(X)$ vers des théories mieux connues peuvent être définis: groupes de Chow, homologie cyclique (§7), K-théorie topologique et K-théorie relative (§2 et 7), cohomologie de Deligne-Beilinson, cohomologie motivique, etc.

c) A est une C^*-algèbre, par exemple l'adhérence d'une limite inductive d'algèbres de matrices complexes (désignée dans la littérature comme AF-algèbre). On montre dans le §4 que le K-groupe d'une AF-algèbre, muni de l'ordre défini par le cône formé des images de A-modules, classifie ces C^*-algèbres à isomorphisme près (cf. [C1] p. 91).

d) Supposons que A soit l'algèbre des fonctions continues[5] sur un espace compact X. Swan a alors démontré l'analogue topologique du théorème de Serre cité en b): M peut être remplacé par le monoïde des classes d'isomorphie de fibrés vectoriels (topologiques) sur X. Notons le groupe obtenu par $K^{\text{top}}(X)$. Il existe alors un "caractère de Chern"

$$Ch : K^{\text{top}}(X) \longrightarrow H^{\text{pair}}(X; \mathbb{Q})$$

où $H^{\text{pair}}(X; \mathbb{Q})$ désigne le produit des groupes de cohomologie de degrés pairs de X. Ce caractère de Chern induit un isomorphisme entre $K(X) \otimes \mathbb{Q}$ et $H^{\text{pair}}(X; \mathbb{Q})$[6]. De nombreuses applications de cette "K-théorie topologique" sont citées dans les paragraphes 2 et 3.

e) Pour toutes les applications en vue, il est important de pouvoir "dériver" le foncteur K en des foncteurs K_n (K s'identifiant alors à K_0), comme il est classique en topologie algébrique[7]. Ceci est clair pour la K-théorie topologique vue plus haut en comparaison avec la cohomologie (quel est l'analogue de la cohomologie en degrés impairs?).

[3]Par exemple, $A = \mathbb{Z}[x]/(1 + x + \cdots x^{p-1})$, où p est un nombre premier.

[4]Les premières lettres de l'alphabet sont réservées aux anneaux, les dernières aux espaces...

[5]Si X est une variété différentiable, on peut aussi bien considérer l'algèbre des fonctions C^∞ sur X: la K-théorie obtenue sera la même.

[6]Du moins, si X est un CW complexe fini, par exemple une variété compacte. Ce résultat montre que le groupe $K^{\text{top}}(X)$ est loin d'être trivial en général.

[7]Conformément à la tradition, nous emploierons indifféremment la notation K^{-n} ou K_n.

La dérivation du foncteur K_0, due essentiellement à D. Quillen, se fait en réalité dans un contexte beaucoup plus général au §5, où la topologie algébrique joue un rôle essentiel.

Sans prétendre à l'exhaustivité, nous reprenons maintenant en détail les considérations esquissées plus haut. Nous prions le lecteur de nous excuser de nombreuses redites avec les notions décrites dans cette introduction.

1 Les premières définitions de la K-théorie

La K-théorie a été introduite par Grothendieck dans la formulation et la preuve du théorème de Riemann-Roch en géométrie algébrique pour des variétés projectives non singulières de dimension arbitraire: à une telle variété X, Grothendieck associe un groupe de "K-théorie algébrique", noté ici $K^{\text{alg}}(X)$, défini à partir de faisceaux algébriques cohérents sur X: cf. [BS].

Quelques années plus tard, Atiyah et Hirzebruch [AH] construisent un analogue topologique pour tout espace compact X, noté ici $K^{\text{top}}(X)$, dont voici la définition. Soit M l'ensemble des classes d'isomorphie de k-fibrés vectoriels sur X ($k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). C'est un monoïde abélien pour la somme de Whitney des fibrés[8]. La "K-théorie topologique" $K^{\text{top}}(X)$ est simplement le "groupe symétrisé" de M, c'est-à-dire le quotient de $M \times M$ par la relation d'équivalence qui identifie le couple (x, y) au couple (x', y') s'il existe z tel que $x + y' + z = x' + y + z$. La K-théorie des fibrés complexes (resp. réels) est spécifiquement notée $K_{\mathbb{C}}^{\text{top}}(X)$ (resp. $K_{\mathbb{R}}^{\text{top}}(X)$).

Pour construire de manière plus algébrique $K^{\text{top}}(X)$, considérons l'anneau $A = C(X)$ des fonctions continues sur X à valeurs dans k; Serre et Swan ont démontré que la catégorie des k-fibrés vectoriels est alors équivalente à celle des A-modules projectifs de type fini (c'est-à-dire facteurs directs de A^n, $n = 1, 2 \ldots$), catégorie notée ici $\mathcal{P}(A)$. Dans cette équivalence, la somme de Whitney des fibrés correspond à la somme directe des modules, ce qui permet de remplacer les fibrés vectoriels par les objets de $\mathcal{P}(A)$ dans la définition de la K-théorie. Il convient de remarquer que si X est une variété différentiable, la K-théorie peut être aussi définie grâce à la catégorie des fibrés vectoriels différentiables, elle-même équivalente à celle des modules projectifs de type fini sur l'anneau $C^\infty(X)$ des fonctions de classe C^∞ sur X. Par abus d'écriture, on note de manière générale $K(A)$ (ou $K_0(A)$)[9] le "groupe de Grothendieck" de la catégorie $\mathcal{P}(A)$. Nous avons donc $K^{\text{top}}(X) = K_0(A)$, avec $A = C(X)$ (ou $C^\infty(X)$ si X est une variété compacte)[10].

Une application continue $X \longrightarrow Y$ induit, par le foncteur image réciproque des fibrés vectoriels, un homomorphisme en sens inverse $f^* : K^{\text{top}}(Y) \longrightarrow K^{\text{top}}(X)$. En particulier, si Y est un point, il est trivial que $K^{\text{top}}(Y) \cong \mathbb{Z}$ et que $K^{\text{top}}(X)$ s'écrit comme

[8] Si E et F sont deux fibrés vectoriels sur X, leur "somme de Whitney" G est simplement le produit fibré $E \times_X F$: la fibre G_x est la somme directe $E_x \oplus F_x$ des fibres de E et F au point x.

[9] Des groupes $K_n(A)$ sont définis plus loin.

[10] Par abus d'écriture, on note par la même lettre la K-théorie des anneaux comme celle des espaces. Pour éviter toute confusion, les premières lettres de l'alphabet $A, B \ldots$ sont réservées aux anneaux et les dernières $P, T, X \ldots$ aux espaces.