Sur la K-théorie du foncteur norme

Max Karoubi[1] & Thierry Lambre[2]

Résumé :
La K-théorie d'un foncteur peut être vue comme la version relative de celle d'un anneau unitaire. Après une description du groupe K_0 d'un foncteur, nous montrons que cette K-théorie de foncteur possède une suite exacte longue de Mayer-Vietoris.
Dans le cas d'une extension galoisienne de corps de nombres F/L, d'anneaux d'entiers respectifs A et B, le groupe K_0 du "foncteur norme" est une extension d'un sous-groupe du groupe des classes d'idéaux $Cl(A)$ du corps F par le groupe de cohomologie de Tate $\widehat{H}^0(G, A^*)$.
La suite exacte longue de Mayer-Vietoris permet d'expliciter un quotient du sous-groupe

$$_NCl(A) := \ker N : Cl(A) \to Cl(B)$$

du groupe des classes $Cl(A)$, où N désigne la norme, sous la forme d'une suite exacte courte

$$1 \longrightarrow B^*/B^* \cap N(F^*) \longrightarrow \widehat{H}^0(G, F^*) \cap \widehat{H}^0(G, \mathcal{U}_F) \longrightarrow {_NCl(A)}/I_GCl(A) \longrightarrow 1$$

où $\mathcal{U}_F$ est le groupe des unités semi-locales du corps F. Pour conclure cet article, nous proposons quelques applications arithmétiques.

Abstract:
The K-theory of a functor may be viewed as a relative version of the K-theory of a ring. After its description, we prove a Mayer-Vietoris exact sequence in this framework.
In the case of a Galois extension of a number field F/L with rings of integers A, B respectively, this K-theory of the "norm functor" is an extension of a subgroup of the ideal class group $Cl(A)$ of F by the Tate cohomology group $\widehat{H}^0(G, A^*)$.
The Mayer-Vietoris exact sequence enables us to describe in a quite explicit way a quotient of the subgroup

$$_NCl(A) := \ker N : Cl(A) \to Cl(B)$$

of the ideal class group $Cl(A)$, where N is the norm. We also prove a short exact sequence

$$1 \longrightarrow B^*/B^* \cap N(F^*) \longrightarrow \widehat{H}^0(G, F^*) \cap \widehat{H}^0(G, \mathcal{U}_F) \longrightarrow {_NCl(A)}/I_GCl(A) \longrightarrow 1$$

where $\mathcal{U}_F$ is the group of semi-local units of F.
Finally, we conclude this paper by applications of our methods to Number Theory.

Classification A.M.S. Primaire : 19F05, 11R70, 11R34. Secondaire : 11R37, 11R29.

Introduction.

[1]Université Paris 7-Denis Diderot, UMR 7586 du CNRS, Case 7012, 175, rue du Chevaleret, 75205 Paris Cedex 13, France. Courriel : max.karoubi@gmail.com
[2]Université Blaise Pascal, UMR 6620 du CNRS, Les Cézeaux, 63177 Aubière, Cedex, France. Courriel : thierry.lambre@math.univ-bpclermont.fr

Cet article a pour origine notre souhait d'utiliser dans un cadre arithmétique des outils de K-théorie en bas degré dont les idées remontent à H. Bass ([B]).
Les groupes K_0 et K_1 d'un anneau unitaire A ou, ce qui revient au même, de la catégorie $\mathbf{Proj}(A)$, ont été intensivement étudiés dès leur apparition. Dans cet article nous étudions un groupe moins étudié et fortement relié aux deux précédents, le groupe de K-théorie d'un foncteur additif. Le groupe K_0 d'un tel foncteur $\varphi : \mathbf{Proj}(A) \to \mathbf{Proj}(B)$ apparaît comme un invariant assez fin pour permettre l'observation de phénomènes que les groupes K_0 et K_1 à eux seuls ne semblent pas détecter.

Cet article débute par une description minutieuse du groupe K_0 du foncteur norme $\mathbf{N}_{A/B}$ associé à une extension de corps de nombres F/L d'anneaux d'entiers $A = \mathcal{O}_F$ et $B = \mathcal{O}_L$. Soit $\mathcal{I}_F$ le groupe des idéaux fractionnaires de A. Soient $N : F \to L$ et $N : \mathcal{I}_F \to \mathcal{I}_L$ les normes respectives sur F et $\mathcal{I}_F$. Définissons $\mathcal{N} : F^* \to L^* \times \mathcal{I}_F$ par $\mathcal{N}(z) = (N(z), zA)$. On pose

$$\mathcal{K}_0(\mathbf{N}_{A/B}) = \{(t, I) \in L^* \times \mathcal{I}_F \;\mid\; tB = N(I)\}/\mathrm{Im}\,\mathcal{N}.$$

Pour (t, I) dans $L \times \mathcal{I}_F$, on désigne par $[t, I] \in \mathcal{K}_0(\mathbf{N}_{A/B})$ la classe de (t, I) mod $\mathrm{Im}(\mathcal{N})$.

Théorème 3.4. *Soit F/L une extension de corps de nombres. Le groupe $K_0(\mathbf{N}_{A/B})$ du foncteur norme $\mathbf{N}_{A/B}$ est isomorphe au groupe $\mathcal{K}_0(\mathbf{N}_{A/B})$. De plus, il existe une suite exacte*

$$A^* \xrightarrow{N_{F/L}} B^* \xrightarrow{\sigma} \mathcal{K}_0(\mathbf{N}_{A/B}) \xrightarrow{\rho} Cl(A) \xrightarrow{N} Cl(B)$$

où les homomorphismes σ et ρ sont respectivement donnés par $\sigma(v) = [v, A]$ et $\rho([t, I]) = [I]$.

Dans un second temps, nous construisons une suite exacte longue de Mayer-Vietoris pour la K-théorie d'un tel foncteur.

Théorème 4.4. *Soit F/L une extension de corps de nombres, d'anneaux d'entiers A et B et d'anneaux d'adèles $\mathbf{A}_F$ et $\mathbf{A}_L$ respectivement. On désigne par $\widehat{A}$ l'anneau des localisés complétés de A à toutes les places finies de F.*
Soit $\varphi : \mathbf{Proj}(A) \to \mathbf{Proj}(B)$ un foncteur additif et soient $\varphi_{F/L}$, $\varphi_{\widehat{A}/\widehat{B}}$ et $\varphi_{\mathbf{A}_F/\mathbf{A}_L}$ les foncteurs induits par φ. Ces foncteurs s'insèrent alors dans une suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow K_{r+1}(\varphi_{\mathbf{A}_F/\mathbf{A}_L}) \xrightarrow{\partial} K_r(\varphi) \longrightarrow K_r(\varphi_{F/L}) \times K_r(\varphi_{\widehat{A}/\widehat{B}}) \longrightarrow K_r(\varphi_{\mathbf{A}_F/\mathbf{A}_L}) \xrightarrow{\partial} \cdots$$

Dans le cas du foncteur norme et pour $r = 0$, cette suite exacte peut être précisée. Introduisons pour cela une notation : si $N : X \to Y$ est un morphisme de groupes, nous notons

$${}_N X := \ker N$$

et

$$Y_N := \mathrm{coker\ N}$$

Théorème 5.4. (suite exacte des noyaux-conoyaux) *Soit F/L une extension de corps de nombres d'anneaux d'entiers respectifs A et B. Soient $\mathcal{U}_F$, $\mathcal{U}_L$ les groupes d'unités semi-locales de F et L respectivement, $\mathbf{J}_F$, $\mathbf{J}_L$ les groupes d'idèles de F et L respectivement. Notons indifféremment par la même lettre N les différentes normes $A^* \to B^*$, $F^* \to L^*$, $\mathcal{U}_F \to \mathcal{U}_L$ et $\mathbf{J}_F \to \mathbf{J}_L$.*
On a alors une suite exacte

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & {}_NA^* \arrow[r, "\Delta"] & {}_NF^* \times {}_N\mathcal{U}_F \arrow[r, "\mu_1"] & {}_N\mathbf{J}_F \arrow[dll, "\partial"] & & \\
& K_0(\mathbf{N}_{A/B}) \arrow[r, "i"] & L^*_N \times (\mathcal{U}_L)_N \arrow[r, "\mu"] & (\mathbf{J}_L)_N \arrow[r, "\partial'"] & Cl(B)_N \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

Cet article s'achève par quelques calculs explicites dans le cas des extensions cycliques.

Théorème 6.6. *Soit F/L une extension cyclique de corps de nombres d'anneaux d'entiers A et B respectivement, de groupe de Galois G. On pose*

$$_NCl(A) = \ker N : Cl(A) \to Cl(B).$$

Soit $I_GCl(A)$ le sous-groupe du groupe des classes $Cl(A)$ engendré par les éléments de la forme $(1-g)[I]$, $g \in G$, $[I] \in Cl(A)$. On a alors un isomorphisme de groupes

$$_NCl(A)/I_GCl(A) \;\cong\; L^*/B^*N(F^*) \;\;\cap\;\; \mathcal{U}_L/B^*N(\mathcal{U}_F).$$

De plus, on a une suite exacte

$$1 \longrightarrow B^*/B^* \cap N(F^*) \longrightarrow \widehat{H}^0(G,F^*) \cap \widehat{H}^0(G,\mathcal{U}_F) \longrightarrow {}_NCl(A))/I_GCl(A) \longrightarrow 1,$$

où $\widehat{H}^0(G,-)$ désigne le groupe H^0 de cohomologie de Tate.

Nous en déduisons

Théorème 6.8. *Soit F/L une extension cyclique de corps de nombres d'anneaux d'entiers $A = \mathcal{O}_F$ et $B = \mathcal{O}_L$. On suppose l'extension ramifiée de degré premier ℓ, de groupe de Galois G. Désignons par t le nombre de places finies de L ramifiées dans F et par $I_GCl(A)$ le sous-module de $Cl(A)$ engendré par les éléments de la forme $(1-g)a$, $a \in Cl(A)$. Posons*

$$_NCl(A) := \ker N : Cl(A) \to Cl(B).$$

Alors $_NCl(A)/I_GCl(A)$ est un $\mathbf{F}_\ell$-espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à $t-1$.

En particulier, pour une extension $F/\mathbf{Q}$ cyclique, si on désigne par $Cl(A)_G$ le groupe des co-invariants du groupe des classes de A et par $\hat{\mathbf{Z}}^* = \mathcal{U}_{\mathbf{Q}} = \prod_p \mathbf{Z}_p^*$, on a un isomorphisme de groupes

$$Cl(A)_G \;\cong\; \mathbf{Q}^*/\mathbf{Z}^*N(F^*) \;\cap\; \widehat{\mathbf{Z}}^*/\mathbf{Z}^*N(\mathcal{U}_F).$$

Cette suite exacte permet par exemple de proposer une démonstration nouvelle du résultat suivant sur le ℓ-rang du groupe des classes d'une extension cyclique d'ordre ℓ. Ce résultat est déjà connu mais de démonstration toujours délicate.

Théorème 6.9. ([H],[L]) *Soit $F/\mathbf{Q}$ une extension cyclique de degré premier ℓ, de groupe de Galois G. Notons $Cl(A)_G$ le groupe des co-invariants du groupe des classes $Cl(A)$ sous l'action de son groupe de Galois.*
Soit t le nombre de diviseurs premiers du discriminant du corps F. Alors le ℓ-rang du groupe des co-invariants du groupe des classes du corps F est égal à $t-1$, sauf si $\ell = 2$, F quadratique réel et s'il existe un nombre premier p congru à 3 modulo 4 et divisant le discriminant du corps F.
Dans ce dernier cas, le 2-rang du groupe des co-invariants du groupe des classes du corps F est égal à $t-2$.

Nous tenons à remercier chaleureusement T. Nguyen Quang Do (Université de Franche-Comté) pour sa lecture attentive d'une version préliminaire de ce texte. Nous remerçions également J. Berrick et Meng Fai Lim (Université de Singapore) pour nous avoir communiqué la remarque 5.6 ainsi que C. Movahhedi (Université de Limoges) pour une correspondance fructueuse concernant le résultat 6.8.

Ce texte est organisé comme suit

1. Notations et rappels.

Dans ce texte, nous considérons une extension F/L de corps de nombres. Nous désignons par :
$A = \mathcal{O}_F$ et $B = \mathcal{O}_L$ les anneaux d'entiers respectifs de F et L,
$\mathcal{I}_F$ le groupe des idéaux fractionnaires de A,
$Cl(A)$ le groupe des classes d'idéaux de A (ou F),
$V(F)$ l'ensemble des places *finies* de F,
Soit w une place finie de F et soit v une place finie de L. On note A_w (resp. F_w) le complété de l'anneau A (resp. du corps F) à la place finie w de F.
On désigne de même par
$\widehat{A} = \prod_{w\in V(F)} A_w$ et $\widehat{B} = \prod_{v\in V(L)} B_v$,
$\mathbf{A}_F = \widehat{A} \otimes_A F$ l'anneau des adèles de F, restreintes aux places finies,

$\mathcal{U}_F = \widehat{A}^* = \prod_{w\in V(F)} A_w^*$ le groupe multiplicatif des unités locales, c'est-à-dire les éléments invresibles de l'anneau $\widehat{A}$,
$\mathbf{J}_F = (\mathbf{A}_F)^*$ le groupe multiplicatif des idèles, unités de l'anneau $\mathbf{A}_F$.

Pour un G-module M, on désigne par I_GM le sous-module de M engendré par les éléments de la forme $(1-g)m$, où g appartient à G et m appartient à M. Le groupe $M_G = M/I_GM$ est le groupe des co-invariants du G-module M.

Lorsque l'extension F/L est galoisienne de groupe G, le groupe de cohomologie de Tate $\widehat{H}^0(G,M)$ d'un G-module M est défini par

$$\widehat{H}^0(G,M) = M^G/\mathrm{im}\ \nu,$$

où $\nu : M \to M$ est le morphisme de G-modules défini par $\nu(m) = \sum_{g\in G} gm$.
Dans le cas galoisien, si $N : A^* \to B^*$ désigne la norme, on a donc

$$\widehat{H}^0(G,A^*) = \mathrm{coker}\ \ (N : A^* \to B^*) = B^*_N.$$

Nous aurons besoin du calcul de la K-théorie des anneaux $\widehat{A}$ et $\mathbf{A}_F$.

Lemme 1.1. *Soit A l'anneau des entiers d'un corps de nombres F. On a alors des isomorphismes de groupes $K_1(\widehat{A}) \cong \mathcal{U}_F$ et $K_1(\mathbf{A}_F) \cong \mathbf{J}_F$.*

Démonstration. L'anneau $\widehat{A} = \prod_{w\in V(F)} A_w$ est produit d'anneaux de valuations discrètes. Tous les anneaux A_w sont de rang stable $d \leq 1$. De plus, pour tout $n \geq 3$, il existe N tel que pour chaque place w de F, tout élément de $E_n(A_w)$ est produit d'au plus N matrices élémentaires. Montrons que l'homomorphisme évident $\phi_1 : K_1(\widehat{A}) \to \prod_{w\in V(F)} K_1(A_w)$ est un isomorphisme.
L'homomorphisme ϕ_1 est injectif : soit α un élément de $GL(\widehat{A})$ tel que pour chaque place w de F, l'image α_w de α dans $K_1(A_w)$ soit égal à 1. Pour n assez grand, ceci implique que α_w est un élément de $E_n(A_w)$ et donc s'écrit comme un produit de commutateurs $\prod_{1\leq i\leq N}[\beta_{w,i},\ \gamma_{w,i}]$. D'après ce qui précède, le nombre N de commutateurs peut être borné indépendamment de la place w.
Pour $1 \leq i \leq N$ introduisons les éléments b_i et et c_i de $\widehat{A}$ définis par

$$b_i = (\beta_{w,i})_{w\in V(F)} \ \text{ et } \ c_i = (\gamma_{w,i})_{w\in V(F)}.$$

Dans $GL(\widehat{A})$, on a l'égalité

$$\alpha = [b_1, c_1] \times \ \cdots \ \times [b_N, c_N],$$

ce qui signifie que la classe de α dans $K_1(\widehat{A})$ est 1.
L'homomorphisme ϕ_1 est surjectif : Puisque le rang stable des anneaux A_w est borné par 1, il existe un entier n, indépendant de w tel que tout élément de $K_1(A_w)$ puisse s'écrire comme la classe d'une matrice $\alpha_w \in Gl_n(A_w)$. La famille des matrices $(\alpha_w)_{w\in V(F)}$ définit un élément de $GL_n(\widehat{A})$, et par suite un élément α de $K_1(\widehat{A})$ dont l'image par ϕ_1 est la classe dans chaque $K_1(A_w)$ de la matrice α_w.

Ce raisonnement établit un isomorphisme de groupes $K_1(\widehat{A}) \cong \prod_{w\in V(F)} K_1(A_w)$. Puisque $\prod_{w\in V(F)} K_1(A_w) = \mathcal{U}_F$, le premier isomorphisme est établi.
Cette démonstration s'adapte sans difficulté au cas du produit restreint $\mathbf{A}_F$. Pour cela, soit S un ensemble fini de places de F. On pose traditionnellement

$$\mathbf{A}_F^S = \prod_{w\in S} F_w \times \prod_{w\notin S} A_w$$

et

$$\mathbf{J}_F^S = \prod_{w\in S} F_w^* \times \prod_{w\notin S} A_w^*$$

de sorte que $\mathbf{A}_F = \varinjlim \mathbf{A}_F^S$ et $\mathbf{J}_F = \varinjlim \mathbf{J}_F^S$ (*cf.* [N]).
D'après les considérations précédentes, on a

$$K_1(\mathbf{A}_F^S) = \prod_{w\in S} K_1(F_w) \times \prod_{w\notin S} K_1(A_w),$$

ce qui donne $K_1(\mathbf{A}_F^S) = \mathbf{J}_F^S$.
On sait que le foncteur K_1 commute aux limites inductives (*cf.* par exemple [W2]) d'où

$$K_1(\mathbf{A}_F) = \varinjlim K_1(\mathbf{A}_F^S),$$

ce qui démontre $K_1(\mathbf{A}_F) = \mathbf{J}_F$.

Définition 1.2. *Soit Λ un anneau. On dit qu'un élément u de $K_0(\Lambda)$ est borné par N si $u = [E] - [\Lambda]^N$, où E est un facteur direct de Λ^{2N}.*
Si $(\Lambda_i)_{i\in I}$ est une famille d'anneaux, le produit borné des groupes $K_0(\Lambda_i)$, $i \in I$, est le groupe noté

$$\prod_{i\in I}{}^{(b)}(K_0(\Lambda_i))$$

dont les éléments sont les familles $u = (u_i)_{i\in I}$ avec $u_i \in K_0(\Lambda_i)$ et telles qu'il existe un entier $N = N(u)$ pour lequel u_i est borné par N pour tout i.

Proposition 1.3. *Soit A l'anneau des entiers d'un corps de nombres. Le morphisme de groupes évident*

$$\phi_0 : K_0(\widehat{A}) \to \prod_{w\in V(F)} K_0(A_w)$$

est injectif, d'image le produit borné $\prod^{(b)}_{w\in V(F)} K_0(A_w)$. De plus, les groupes $K_0(\widehat{A})$ et $K_0(\mathbf{A}_F)$ sont isomorphes.

Démonstration. L'homomorphisme ϕ_0 est d'image le produit borné $\prod^{(b)}_{w\in V(F)} K_0(A_w)$. En effet, puisque le rang stable de chaque A_w est inférieur ou égal à 1, tout module projectif de type fini sur A_w s'écrit $E \oplus A_w^m$ où E est de rang au plus 1. Choisissons $N > 1$. Soit $u = (u_w)_{w_n\in V(F)}$ un élément du produit borné $\prod^{(b)}_{w\in V(F)} K_0(A_w)$. Puisque chaque élément

u_w du produit borné s'écrit sous la forme $[E_w] - [A_w^N]$, où E_w est facteur direct de A_w^{2N}, le module E_w est l'image d'un projecteur p_w de $\mathrm{Mat}_{2N}(A_w)$. Cette famille de projecteurs définit un projecteur p de $Mat_{2N}(\widehat{A})$, ce qui fournit un élément de $K_0(\widehat{A})$ d'image u.
Montrons par ailleurs l'injectivité de ϕ_0. Soit $\alpha = [E] - [\widehat{A}^N]$ un élément de $K_0(\widehat{A})$ d'image nulle par ϕ_0. On peut supposer que E est l'image d'un projecteur p de $\mathrm{Mat}_{2N}(\widehat{A})$. En remplaçant le projecteur p par $p \oplus 0$, ceci implique que pour toute place w de F, $p_w \oplus 0$ est conjugué au projecteur $\mathrm{diag}(1, 0)$ dans $\mathrm{Mat}_{4N}(A_w)$ par une matrice inversible α_w de $\mathrm{GL}_{4N}(A_w)$. On en déduit que α est nul dans $K_0(\widehat{A})$.

Pour le calcul de $K_0(\mathbf{A}_F)$, on remarque que si S est un ensemble fini de places de F, le groupe $K_0(\prod_{w \notin S} A_w)$ est isomorphe au produit borné $\prod_{w \notin S}^{(b)} K_0(A_w)$. On en déduit

$$K_0(\mathbf{A}_F^S) \cong \prod_{w \in S} K_0(F_w) \times \prod_{w \notin S}^{(b)} K_0(A_w).$$

Par passage à la limite inductive, on obtient

$$K_0(\mathbf{A}_F) \cong \prod_{w \in V(F)}^{(b)} K_0(A_w) \cong K_0(\widehat{A}).$$

2. Le groupe K_0 d'un foncteur.

Soient A et B deux anneaux unitaires, non nécessairement commutatifs. Soit $\varphi : \mathbf{Proj}(A) \to \mathbf{Proj}(B)$ un foncteur additif et soit $BQ(\varphi) : BQ\mathbf{Proj}(A) \to BQ\mathbf{Proj}(B)$ l'application continue définie entre les espaces classifiants de la K-théorie de Quillen des anneaux A et B [Q]. Soit $\mathcal{F}_\varphi$ la fibre homotopique de l'application $BQ(\varphi)$.

Définition 2.1. *Pour $r \geq 0$, le groupe $K_r(\varphi) := \pi_{r+1}(\mathcal{F}_\varphi)$ s'appelle le r-ième groupe de K-théorie du foncteur φ.*

De cette définition on déduit la suite exacte longue tautologique

$$\cdots \xrightarrow{\partial} K_1(\varphi) \longrightarrow K_1(A) \xrightarrow{\phi_1} K_1(B) \xrightarrow{\partial} K_0(\varphi) \longrightarrow K_0(A) \xrightarrow{\phi_0} K_0(B)$$

avec $\phi_i = \pi_{i+1} BQ(\varphi)$.

Description du groupe K_0 d'un foncteur.

Dans ce cadre de généralité, le calcul de $K_r(\varphi) = \pi_{r+1}(\mathcal{F}_\varphi)$ reste délicat, y compris pour $r = 0$. Voici une autre description de $K_0(\varphi)$.
Pour cela, rappelons une construction générale due à H. Bass ([B], VII.5). Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories monoïdales symétriques et soit $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur monoïdal et cofinal[3]. Le cône de φ est la catégorie $co(\varphi)$ constituée des triplets (C, α, C') où C et C' sont des objets de $\mathcal{C}$ et où $\alpha : \varphi(C) \to \varphi(C')$ est un isomorphisme dans la catégorie $\mathcal{D}$. Un morphisme de (C, α, C') vers (C_1, α_1, C_1') est un couple (f, f') où $f : C \to C_1$ et $f' : C' \to C_1'$ sont

[3]L'exemple le plus important est celui d'une catégorie additive et d'un foncteur additif et cofinal.

des morphismes dans $\mathcal{C}$ tels que $\alpha_1 \circ \varphi(f) = \varphi(f') \circ \alpha$. L'ensemble des classes d'isomorphie d'objets de $co(\varphi)$ est un monoïde abélien dont on note $K(co(\varphi))$ le groupe de Grothendieck.

Définition 2.2. *Le groupe $K_0(\varphi)$ de K-théorie du foncteur φ est le quotient du groupe $K(co(\varphi))$ par le sous-groupe R engendré par les éléments de la forme*

$$(C, \alpha, C') + (C', \beta, C'') - (C, \beta\alpha, C'').$$

La classe de (C, α, C') modulo R est notée $[C, \alpha, C']$.

Le groupe $K_0(\varphi)$ d'un foncteur monoïdal et cofinal s'insère dans la suite exacte de Bass qui s'écrit

$$K_1(\mathcal{C}) \xrightarrow{\phi_1} K_1(\mathcal{D}) \xrightarrow{\sigma} K_0(\varphi) \xrightarrow{\rho} K_0(\mathcal{C}) \xrightarrow{\phi_0} K_0(\mathcal{D}) \ . \tag{2.2}$$

De plus, on sait ([Gr] et [K3], p. 269) que si le foncteur φ est additif et cofinal, le groupe $K_0(\varphi)$ défini en 2.1 par $K_0(\varphi) = \pi_1(\mathcal{F}_\varphi)$ est isomorphe au groupe défini ci-dessus par générateurs et relations.

Description du groupe K_0 d'un foncteur entre catégories de Cartier.

L'exemple suivant nous sera très utile dans la suite. Soit A un anneau commutatif unitaire intègre de corps des fractions F. Soient $\mathrm{Cart}(A)$ le groupe des idéaux fractionnaires inversibles de l'anneau A et $\mathrm{div}_F : F^* \to \mathrm{Cart}(A)$ le morphisme de groupes défini par $\mathrm{div}_F(z) = zA$.
Introduisons la catégorie $\mathbf{Cart}(A)$ dont les objets sont les idéaux fractionnaires inversibles de A et dont les morphismes sont donnés par $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cart}(A)}(I, J) = \mathrm{Hom}_A(I, J)$; la structure monoïdale est donnée par le produit des idéaux. Les objets de cette catégorie sont donc les éléments du groupe de Cartier de A.
Soit $\varphi : \mathbf{Cart}(A) \to \mathbf{Cart}(B)$ un foncteur monoïdal et cofinal et soient F et L respectivement les corps de fractions de A et B. Considérons le groupe produit fibré $L^* \times_\varphi \mathrm{Cart}(A)$, c'est-à-dire le sous-groupe de $L^* \times \mathrm{Cart}(A)$ constitué des éléments (t, I) tels que $tB = \varphi(I)$.
Soit $\Phi : F^* \to L^* \times_\varphi \mathrm{Cart}(A)$ le morphisme de groupes défini par $\Phi(z) = (\varphi(z), zA)$.

Définition 2.3.

On pose

$$\mathcal{K}_0(\varphi) = coker\ (\Phi) = L^* \times_\varphi Cart(A)/im\ (\Phi).$$

Pour (t, I) dans $L \times_\varphi Cart(A)$, on pose $[t, I] = (t, I)$ mod im Φ.

N. B. On notera l'analogie entre $\mathcal{K}_0(\varphi)$ et le groupe $\mathcal{U}(A; \mathbf{Z}/n)$ de [K-L], Théorème 1.1.

Le groupe $K_0(\varphi)$ est constitué d'éléments de la forme $[J, \alpha, I]$, où J et I sont des idéaux fractionnaires de F et où $\alpha : \varphi(I) \to \varphi(I)$ est un isomorphisme de B-modules. En multipliant $[J, \beta, I]$ par $1 = [J^{-1},\ id_{\varphi(J^{-1})}, J^{-1}]$, on peut toujours écrire un élément de $K_0(\varphi)$ sous la forme $[A, \alpha, I]$. Par B-linéarité, l'application $\alpha : B \to \varphi(I)$ est déterminée par $t = \alpha(1) \in L^*$. De plus, puisque α est un isomorphisme, on a $\varphi(I) = tB$.

Lemme 2.4.
L'application qui à $[A, \alpha, I]$ de $K_0(\varphi)$ associe $[\alpha(1), I]$ dans $\mathcal{K}_0(\varphi)$ est un isomorphisme.

Démonstration. L'application réciproque est celle qui à l'élément $[t, I]$ de $\mathcal{K}_0(\varphi)$ associe l'élément $[A, \alpha, I]$ de $K_0(\varphi)$, où $\alpha : B \to \varphi(I)$ est l'isomorphisme de B-modules défini par $\alpha(1) = t$.

Le foncteur restriction des scalaires.

Soient A et B deux anneaux unitaires (non nécessairement commutatifs). On suppose que A est un B-module projectif de type fini. Notons $\mathbf{res} : \mathbf{Proj}(A) \to \mathbf{Proj}(B)$ le foncteur restriction des scalaires défini pour tout A-module $P = {}_AP$, de classe d'isomorphie $[{}_AP]$ par la formule $\mathbf{res}([{}_AP]) = [{}_BP]$, où ${}_BP$ désigne le B-module P obtenu par restriction des scalaires.
Le foncteur **res** est évidemment additif. Puisque A est un B-module projectif de type fini, il est également cofinal. En effet, pour un B-module projectif de type fini Q, on pose $P = A \otimes_B Q$ et on voit que ${}_BP$ est alors facteur direct d'un Q^n. Donc $\mathbf{res}([P])$ contient $[Q]$ en facteur direct.

Supposons de plus que les anneaux A et B. Les homomorphismes de la suite exacte de Bass

$$K_1(A) \xrightarrow{res_1} K_1(B) \xrightarrow{\sigma} K_0(\mathbf{res}) \xrightarrow{\rho} K_0(A) \xrightarrow{res_0} K_0(B)$$

sont donnés respectivement par

$$res_1([{}_AP, \alpha]) = [{}_BP, \alpha],$$

$$\sigma([Q, \beta]) = [A \otimes_B Q,\ id_A \otimes_B \beta,\ A \otimes_B Q],$$
$$\rho([P, \alpha, P']) = [P] - [P']$$

et

$$res_0([{}_AP]) = [{}_BP].$$

Description du morphisme de groupes $\mathrm{res}_1 : K_1(A) \to K_1(B)$.
Pour décrire res_1, rappelons une construction du groupe $K_1(A)$. Soit $\mathcal{K}_1(A)$ le groupe abélien libre engendré par les classes d'isomorphie de couples (P, α) où P est un A-module projectif de type fini et où α appartient à $\mathbf{Aut}_A(P)$ et soit $\mathcal{H}(A)$ le sous-groupe de $\mathcal{K}_1(A)$ engendré par les deux types d'éléments suivants:

$$(P, \alpha) + (P, \beta) - (P, \beta\alpha)$$

$$(P, \alpha) + (Q, \beta) - (P \oplus Q, \alpha \oplus \beta).$$

Le groupe quotient $\mathcal{K}_1(A)/\mathcal{H}(A)$ est alors isomorphe à $K_1(A)$.

Proposition 2.5. *Soit* $\mathrm{dét}_B : K_1(B) \to B^*$ *le déterminant. Pour* $u \in A^*$, *on a*

$$\mathrm{dét}_B \circ \mathrm{res}_1(u) = \mathrm{dét}(\mu_u) \in B^*$$

où $\mu_u : A \to A$ est l'application B-linéaire $\mu_u(z) = uz$.

En particulier, si A et B sont des anneaux d'entiers de corps de nombres, d'après le théorème de Bass, Milnor et Serre [B-M-S], on a $K_1(A) = A^*$ et $K_1(B) = B^*$. On en déduit $res_1(u) = dét(\mu_u)$ pour tout $u \in K_1(A)$.

Démonstration. Pour (P, α) dans $\mathcal{K}_1(A)$ on note $[P, \alpha] = (P, \alpha) \bmod \mathcal{H}(A)$. Avec ces notations, on a

$$\mathrm{res}_1([P, \alpha]) = [{}_BP, \alpha].$$

Pour $u \in A^*$ donnons l'expression de $dét_B \circ res_1(u)$ dans $K_1(B)$. On écrit $u = [A, \mu_u]$ où $\mu_u : A \to A$ est la multiplication par u. On a $res_1(u) = [{}_BA, \mu]$. Or A est un B-module projectif de type fini. Si A est facteur direct d'un B-module libre de rang n, on a donc

$$dét_B([{}_BA, \mu]) = [\Lambda^n_B(B^n), \Lambda^n_B(\mu)] = [B, \gamma],$$

où $\gamma : B \to B$ est la multiplication par $dét(\mu_u)$.

3. Le foncteur norme.

Supposons que F/L soit une extension finie de corps de nombres, d'anneaux d'entiers $A = \mathcal{O}_F$, $B = \mathcal{O}_L$. Soient $Cl(A)$ et $Cl(B)$ les groupes des classes d'idéaux de A et B respectivement.

Définition 3.1. *Le foncteur restriction des scalaires* **res** *est noté*

$$\mathbf{N}_{A/B} : \mathbf{Proj}(A) \to \mathbf{Proj}(B).$$

Il est défini par $\mathbf{N}_{A/B}([{}_AP]) = [{}_BP]$.

Cette terminologie trouve sa justification dans le fait suivant : sur le groupe K_1, le foncteur norme coïncide avec la norme $N_{F/L}$. En effet, de la proposition 2.5, on déduit :

Proposition 3.2. *L'homomorphisme $N_1 : K_1(A) \to K_1(B)$ est donné par $N_1(u) = N_{F/L}(u)$.*

La suite exacte de Bass 2.2 du foncteur norme $\mathbf{N}_{A/B} : \mathbf{Proj}(A) \to \mathbf{Proj}(B)$ se réduit donc à la suite exacte courte

$$1 \longrightarrow B^*_N \xrightarrow{\sigma} K_0(\mathbf{N}_{A/B}) \xrightarrow{\rho} {}_NCl(A) \longrightarrow 1. \tag{3.2}$$

où $B^*_N = \operatorname{coker} N : A^* \to B^*$ et ${}_NCl(A) = \ker N : Cl(A) \to Cl(B)$.

Pour obtenir une description plus précise du groupe $K_0(\mathbf{N}_{A/B})$ au sein de cette extension, on utilise 2.4. Introduisons pour cela le produit fibré $\mathcal{K} = L^* \times_{\mathcal{I}_L} \mathcal{I}_F$, où $\mathcal{I}_F$ est le groupe des idéaux fractionnaires de F.
Le groupe $\mathcal{K}$ est donc le sous-groupe de $L^* \times \mathcal{I}_F$ constitué des éléments (t, I) tels que l'idéal $N(I)$ soit principal de générateur t, c'est-à-dire $(t) = (N(I))$. Soit $\mathcal{N} : F^* \to \mathcal{K}$ le morphisme de groupes défini par $\mathcal{N}(z) = (N(z), zA)$.

Définition 3.3. *Posons*

$$\mathcal{K}_0(\mathbf{N}_{A/B}) = \mathcal{K}/Im(\mathcal{N}) = \{(t, I) \in L^* \times \mathcal{I}_F \ \mid \ tB = N(I)\}/\{(N(z), zA), z \in F^*\}.$$

Pour (t, I) dans $\mathcal{K}$, désignons par $[t, I] \in \mathcal{K}_0(\mathbf{N}_{A/B})$ la classe de (t, I) mod $Im(\mathcal{N})$.

Théorème 3.4. *Soit F/L une extension de degré fini de corps de nombres. Le groupe $K_0(\mathbf{N}_{A/B})$ de K-théorie du foncteur norme $\mathbf{N}_{A/B}$ est isomorphe au groupe $\mathcal{K}_0(\mathbf{N}_{A/B})$. De plus, la suite exacte de Bass du foncteur $\mathbf{N}_{A/B}$ s'identifie à la suite exacte*

$$A^* \xrightarrow{N_{F/L}} B^* \xrightarrow{\sigma} \mathcal{K}_0(\mathbf{N}_{A/B}) \xrightarrow{\rho} Cl(A) \xrightarrow{N} Cl(B)$$

où les homomorphismes σ et ρ sont donnés par $\sigma(v) = [v, A]$ et $\rho([t, I]) = [I]$.

Démonstration. Considérons le diagramme suivant de catégories et de foncteurs, commutatif à isomorphisme près.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Cart}(A) \arrow[r, "\mathbf{N}_{Cart}"] \arrow[d, "\mathbf{i}_A"'] & \mathbf{Cart}(B) \arrow[d, "\mathbf{i}_B"] \\
\mathbf{Pic}(A) \arrow[r, "\mathbf{\Lambda}"] & \mathbf{Pic}(B) \\
\mathbf{Proj}(A) \arrow[r, "\mathbf{N}_{A/B}"] \arrow[u, "\mathbf{d\acute{e}t}_A"] & \mathbf{Proj}(B) \arrow[u, "\mathbf{d\acute{e}t}_B"']
\end{tikzcd}$$

La catégorie $\mathbf{Pic}(A)$) a pour objets les A-modules projectifs de rang 1. Le foncteur $\mathbf{\Lambda}$ est donné par $\mathbf{\Lambda}(_AP) = \Lambda^n_B(_BP))$, où $n = [F : L]$. Ce foncteur est cofinal (dans un contexte multiplicatif). Par ailleurs, dans l'anneau de Dedekind A, si P et Q sont des modules projectifs de rang 1, alors les modules $P \oplus Q$ et $(P \otimes_A Q) \ \oplus \ A$ sont isomorphes ([M]). Or $\Lambda^n_B(_B(P \otimes_A Q \oplus A)) = \Lambda^n_B(_B(P \otimes_A Q))$ tandis que $\Lambda^n_B(_B(P \oplus Q)) = \Lambda^n_B(_BP) \otimes_B \Lambda^n_B(_BQ)$. On a donc la relation

$$\mathbf{\Lambda}(P \otimes_A Q) = \mathbf{\Lambda}(P) \otimes_B \mathbf{\Lambda}(Q),$$

ce qui montre que ce foncteur est additif au sens monoïdal.

On pose $\mathbf{d\acute{e}t}_A([P]) = \Lambda^r_A(P)$ où r est le rang de P en tant que A module. Le théorème 3.4 résulte alors du lemme ci-dessous.

Lemme 3.5. *On a des isomorphismes de groupes*

$$K_0(\mathbf{N}_{A/B}) \cong K_0(\mathbf{\Lambda}) \cong K_0(\mathbf{N}_{Cart}) \cong \mathcal{K}_0(\mathbf{N}_{A/B}).$$

Démonstration. On sait que $K_1(\mathbf{Pic}(A)) = A^*$ et $K_0(\mathbf{Pic}(A)) = Cl(A)$.

Par conséquent, dans le diagramme à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
A^* \arrow[r] & B^* \arrow[r] & K_0(\mathbf{\Lambda}) \arrow[r] & Cl(A) \arrow[r] & Cl(B) \\
A^* \arrow[r] \arrow[u, "d\acute{e}t_1"] & B^* \arrow[r] \arrow[u, "d\acute{e}t_1"] & K_0(\mathbf{N}_{A/B}) \arrow[r] \arrow[u, "\mathbf{d\acute{e}t}_0"] & Cl(A) \arrow[r] \arrow[u, "d\acute{e}t_0"] & Cl(B) \arrow[u, "d\acute{e}t_0"]
\end{tikzcd}$$

les applications $d\acute{e}t_1$ et $d\acute{e}t_0$ sont des isomorphismes, ce qui montre que $\mathbf{d\acute{e}t}_0$ est un isomorphisme, c'est-à-dire $K_0(\mathbf{N}_{A/B}) \cong K_0(\mathbf{\Lambda})$.
Par ailleurs, puisque $\mathbf{i}_A$ et $\mathbf{i}_B$ sont des équivalences de catégories, on a un isomorphime de groupes de K-théorie de foncteurs

$$K_0(\mathbf{\Lambda}) \cong K_0(\mathbf{N}_{Cart}).$$

Enfin, d'après 2.4, on a un isomorphisme de groupes $K_0(\mathbf{N}_{Cart}) \cong \mathcal{K}_0(\mathbf{N}_{A/B})$. Ce lemme 3.5 achève ainsi la démonstration du théorème 3.4.

4. La suite exacte longue de Mayer-Vietoris de K-théorie de foncteurs.

La suite exacte longue de Mayer Vietoris de K-théorie des anneaux.

Nous allons d'abord considérer une suite exacte de Mayer-Vietoris pour la K-théorie des anneaux.

Définition 4.1. *Un morphisme d'anneaux $i : A \to \widehat{A}$ est un isomorphisme analytique le long de $\mathcal{S}$ si*
a) $\mathcal{S}$ est une partie multiplicative de A, composée d'éléments centraux et non diviseurs de zéro,
b) $i(\mathcal{S})$ est une partie multiplicative de $\widehat{A}$, composée d'éléments centraux et non diviseurs de zéro,
c) pour tout s de $\mathcal{S}$, l'application i induit un isomorphisme $A/s \cong \widehat{A}/i(s)$.

On dit alors que $(A, i, \widehat{A}, \mathcal{S})$ est un carré de Milnor et on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i"] \arrow[d] & \widehat{A} \arrow[d] \\
\mathcal{S}^{-1}A \arrow[r] & i(\mathcal{S})^{-1}\widehat{A}
\end{tikzcd}$$

En K-théorie, les carrés de Milnor jouissent de la propriété suivante.

Théorème 4.2.([K2] p. 400, [W1]) *Soit $(A, i, \widehat{A}, \mathcal{S})$ un carré de Milnor. Il existe une suite exacte longue de Mayer-Vietoris en K-théorie*

$$\cdots \xrightarrow{\partial} K_r(A) \longrightarrow K_r(\mathcal{S}^{-1}A) \times K_r(\widehat{A}) \xrightarrow{\mu_r} K_r(\mathcal{S}^{-1}\widehat{A}) \xrightarrow{\partial} \cdots$$

Donnons un exemple : soit F un corps de nombres d'anneau d'entiers $\mathcal{O}_F = A$. L'application $i : A \to \widehat{A}$ est alors un isomorphisme analytique le long de $\mathcal{S} = \mathbf{N} \setminus \{0\}$. Dans ce cas, $\mathcal{S}^{-1}A = F$ et $i(\mathcal{S})^{-1}\widehat{A}$ est l'anneau $\mathbf{A}_F$ des adèles du corps F, restreintes aux places finies. On a par conséquent le carré de Milnor $(A, i, \widehat{A}, \mathcal{S})$ et le diagramme commutatif

$$(M) \qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & \widehat{A} \\ \downarrow & & \downarrow \\ F & \longrightarrow & \mathbf{A}_F \end{array}$$

Appliquons le foncteur K_1 au diagramme (M) ci-dessus. D'après la proposition 1.2, on obtient le diagramme

$$(M_1) \qquad \begin{array}{ccc} A^* & \longrightarrow & \mathcal{U}_F \\ \downarrow & & \downarrow \\ F^* & \longrightarrow & \mathbf{J}_F \end{array}$$

En particulier, pour $r = 1$, la suite exacte de Mayer-Vietoris du carré de Milnor $(A, i, \widehat{A}, \mathcal{S})$ s'écrit sous la forme

$$\cdots K_2(\mathbf{A}_F) \xrightarrow{\partial} A^* \xrightarrow{i_1} F^* \times \mathcal{U}_F \xrightarrow{\mu_1} \mathbf{J}_F \xrightarrow{\partial} K_0(A) \xrightarrow{i_0} K_0(F) \times K_0(\widehat{A}).$$

L'homomorphisme i_1 est évidemment injectif car A^* est contenu dans F^*. Par ailleurs, $\ker(i_0)$ s'identifie au groupe des classes $Cl(A)$. On aboutit ainsi à la suite exacte

$$1 \longrightarrow A^* \xrightarrow{i} F^* \times \mathcal{U}_F \xrightarrow{\mu} \mathbf{J}_F \longrightarrow Cl(A) \longrightarrow 1$$

avec $\mu(z, t) = z/t$, ce qui fournit l'isomorphisme classique

$$\mathbf{J}_F / F^* \cdot \mathcal{U}_F \cong Cl(A).$$

Nous verrons en 5.6 une autre application de cette suite exacte longue de Mayer-Vietoris.

La suite exacte longue de Mayer-Vietoris de K-théorie de foncteurs.

Proposition 4.3. *Soit $\mathcal{S}$ la partie multiplicative $\mathcal{S} = \mathbf{N} \setminus \{0\}$ et soient $(A, i_A, \widehat{A}, \mathcal{S})$ et $(B, i_B, \widehat{B}, \mathcal{S})$ deux carrés de Milnor. Soit $\varphi : \mathbf{Proj}(A) \to \mathbf{Proj}(B)$ un foncteur additif et soient $\widehat{\varphi}$, $\mathcal{S}^{-1}\varphi$ et $\mathcal{S}^{-1}\widehat{\varphi}$ les foncteurs induits par φ. Alors le cube de foncteurs ci-dessous est commutatif à isomorphisme près.*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{Proj}(\mathcal{S}^{-1}A) \arrow[rr] \arrow[dd, "\mathcal{S}^{-1}\varphi"'] & & \mathbf{Proj}(\mathcal{S}^{-1}\widehat{A}) \arrow[dd, "\mathcal{S}^{-1}\widehat{\varphi}"] \\
\mathbf{Proj}(A) \arrow[ur, "\theta_A"] \arrow[rr] \arrow[dd, "\varphi"'] & & \mathbf{Proj}(\widehat{A}) \arrow[ur] \arrow[dd, "\widehat{\varphi}"] & \\
 & \mathbf{Proj}(\mathcal{S}^{-1}B) \arrow[rr] & & \mathbf{Proj}(\mathcal{S}^{-1}\widehat{B}) \\
\mathbf{Proj}(B) \arrow[ur] \arrow[rr] & & \mathbf{Proj}(\widehat{B}) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Les huit foncteurs des faces horizontales sont des foncteurs extensions des scalaires. Par exemple, θ_A est l'extension des scalaires associée au morphisme d'anneaux $A \to \mathcal{S}^{-1}A$. On a donc $\theta_A(P) = \mathcal{S}^{-1}A \otimes_A P$ et des formules analogues pour les sept autres foncteurs de ces deux faces.

Les foncteurs verticaux $\widehat{\varphi}$, $\mathcal{S}^{-1}\varphi$ et $\mathcal{S}^{-1}\widehat{\varphi}$ sont définis à partir du foncteur φ. Puisque φ est additif, il existe un B-A-bimodule $M = {}_BM_A$ tel que $\varphi = M \otimes_A -$. On pose

$$\widehat{M} = \widehat{B} \otimes_B M \otimes_A \widehat{A} \text{ et } \widehat{\varphi} = \widehat{M} \otimes_{\widehat{A}} -,$$
$$\mathcal{S}^{-1}M = \mathcal{S}^{-1}B \otimes_B M \otimes_A \mathcal{S}^{-1}A \text{ et } \mathcal{S}^{-1}\varphi = \mathcal{S}^{-1}M \otimes_{\mathcal{S}^{-1}A} -,$$
$$\mathcal{S}^{-1}\widehat{M} = \mathcal{S}^{-1}\widehat{B} \otimes_{\widehat{B}} \widehat{M} \otimes_{\widehat{A}} \mathcal{S}^{-1}\widehat{A} \text{ et } \mathcal{S}^{-1}\widehat{\varphi} = \mathcal{S}^{-1}\widehat{M} \otimes_{\mathcal{S}^{-1}\widehat{A}} -.$$

C'est alors un jeu d'écriture fastidieux mais trivial de vérifier que le cube est commutatif à isomorphisme près.

Théorème 4.4. *Soit $\mathcal{S}$ la partie multiplicative $\mathcal{S} = \mathbf{N} \setminus \{0\}$ et soient $(A, i_A, \widehat{A}, \mathcal{S})$ et $(B, i_B, \widehat{B}, \mathcal{S})$ deux carrés de Milnor. Soit $\varphi : \mathbf{Proj}(A) \to \mathbf{Proj}(B)$ un foncteur additif. Alors les foncteurs φ, $\widehat{\varphi}$, $\mathcal{S}^{-1}\varphi$ et $\mathcal{S}^{-1}\widehat{\varphi}$ de la proposition précédente fournissent une suite exacte longue de Mayer-Vietoris de K-théorie de foncteurs:*

$$\cdots \longrightarrow K_{r+1}(\mathcal{S}^{-1}\widehat{\varphi}) \xrightarrow{\partial} K_r(\varphi) \longrightarrow K_r(\mathcal{S}^{-1}\varphi) \times K_r(\widehat{\varphi}) \xrightarrow{\mu_r} K_r(\mathcal{S}^{-1}\widehat{\varphi}) \xrightarrow{\partial} K_{r-1}(\varphi) \longrightarrow \cdots$$

Démonstration. Soient $\mathcal{F}_\varphi$, $\mathcal{F}_{\mathcal{S}^{-1}\varphi}$, $\mathcal{F}_{\widehat{\varphi}}$ et $\mathcal{F}_{\mathcal{S}^{-1}\widehat{\varphi}}$ les fibres homotopiques des applications $BQ(\varphi)$, $BQ(\mathcal{S}^{-1}\varphi)$, $BQ(\widehat{\varphi})$ et $BQ(\mathcal{S}^{-1}\widehat{\varphi})$ construites à partir du cube ci-dessus.

Soient $\mathcal{F}$ et $\widehat{\mathcal{F}}$ les fibres homotopiques de $\mathcal{F}_\varphi \to \mathcal{F}_{\mathcal{S}^{-1}\varphi}$ et de $\mathcal{F}_{\widehat{\varphi}} \to \mathcal{F}_{\mathcal{S}^{-1}\widehat{\varphi}}$. A partir des applications $\mathcal{F}_\varphi \to \mathcal{F}_{\widehat{\varphi}}$ et $\mathcal{F}_{\mathcal{S}^{-1}\varphi} \to \mathcal{F}_{\mathcal{S}^{-1}\widehat{\varphi}}$, on obtient une application $j : \mathcal{F} \to \widehat{\mathcal{F}}$. Les fibrations homotopiques de fibres $\mathcal{F}$ et $\widehat{\mathcal{F}}$ conduisent au diagramme à lignes exactes.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \pi_{r+1}(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, "j_{r+1}"] & K_r(\varphi) \arrow[r] \arrow[d, "\iota_r"] & K_r(\mathcal{S}^{-1}\varphi) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\iota}_r"] & \pi_r(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, "j_r"] & K_{r-1}(\varphi) \arrow[r] \arrow[d, "\iota_{r-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \pi_{r+1}(\widehat{\mathcal{F}}) \arrow[r] & K_r(\widehat{\varphi}) \arrow[r] & K_r(\mathcal{S}^{-1}\widehat{\varphi}) \arrow[r] & \pi_r(\widehat{\mathcal{F}}) \arrow[r] & K_{r-1}(\widehat{\varphi}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Pour obtenir la suite exacte de Mayer-Vietoris proposée, montrons que j_r est un isomorphisme pour tout $r \geq 0$. D'après Quillen et Gersten (([Q], [G]), la fibre homotopique de $BQ\mathbf{Proj}(A) \to BQ\mathbf{Proj}(\mathcal{S}^{-1}A)$ a le type d'homotopie de l'espace classifiant $B\mathbf{T}^1_{\mathcal{S}}(A)$ où $\mathbf{T}^1_{\mathcal{S}}(A)$ est la catégorie des A-modules de $\mathcal{S}$-torsion ayant une résolution de longueur inférieure à 1 par des A-modules projectifs de type fini.
La fibre homotopique de $B\mathbf{T}^1_{\mathcal{S}}(A) \to B\mathbf{T}^1_{\mathcal{S}}(B)$ a le type d'homotopie de $\mathcal{F}$ et celle de $B\mathbf{T}^1_{\mathcal{S}}(\widehat{A}) \to B\mathbf{T}^1_{\mathcal{S}}(\widehat{B})$ a le type d'homotopie de $\widehat{\mathcal{F}}$. De plus les applications $B\mathbf{T}^1_{\mathcal{S}}(A) \to B\mathbf{T}^1_{\mathcal{S}}(\widehat{A})$ et $B\mathbf{T}^1_{\mathcal{S}}(B) \to B\mathbf{T}^1_{\mathcal{S}}(\widehat{B})$ induisent une application $\mathcal{F} \to \widehat{\mathcal{F}}$ qui est homotope à l'application j.
Les suites exactes longues des fibrations homotopiques $B\mathbf{T}^1_{\mathcal{S}}(A) \to B\mathbf{T}^1_{\mathcal{S}}(B)$ et $B\mathbf{T}^1_{\mathcal{S}}(\widehat{A}) \to B\mathbf{T}^1_{\mathcal{S}}(\widehat{B})$ conduisent au diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \pi_{r+1}(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, "j_{r+1}"] & \pi_{r+1}(B\mathbf{T}^1_{\mathcal{S}}(A)) \arrow[r] \arrow[d, "i_{r+1}"] & \pi_{r+1}(B\mathbf{T}^1_{\mathcal{S}}(B)) \arrow[r] \arrow[d, "i'_{r+1}"] & \pi_r(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, "j_r"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \pi_{r+1}(\widehat{\mathcal{F}}) \arrow[r] & \pi_{r+1}(B\mathbf{T}^1_{\mathcal{S}}(\widehat{A})) \arrow[r] & \pi_{r+1}(B\mathbf{T}^1_{\mathcal{S}}(\widehat{B})) \arrow[r] & \pi_r(\widehat{\mathcal{F}}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Or $i : A \to \widehat{A}$ et $j : B \to \widehat{B}$ sont des isomorphismes analytiques le long de $\mathcal{S}$. D'après [K2], p. 400-402, on sait que dans ce cas, les foncteurs $\widehat{A} \otimes_A - : \mathbf{T}^1_{\mathcal{S}}(A) \to \mathbf{T}^1_{\mathcal{S}}(\widehat{A})$ et $\widehat{B} \otimes_B - : \mathbf{T}^1_{\mathcal{S}}(B) \to \mathbf{T}^1_{\mathcal{S}}(\widehat{B})$ sont des équivalences de catégories. Il en résulte que i_r et i'_r sont des isomorphismes pour tout $r \geq 0$. Par le lemme des cinq, on en déduit que j_r est un isomorphisme pour tout $r \geq 0$.
Ceci permet de définir le connectant de la suite exacte de Mayer-Vietoris de K-théorie de foncteurs comme la composition des homomorphismes

$$K_r(\mathcal{S}^{-1}\widehat{\varphi}) \longrightarrow K_r(\widehat{\mathcal{F}}) \xrightarrow{j_r^{-1}} \pi_r(\mathcal{F}) \longrightarrow K_{r-1}(\varphi) \ .$$

5. Cas des corps de nombres et du foncteur norme.

Soit F/L une extension de corps de nombres, d'anneaux d'entiers $A = \mathcal{O}_F$, $B = \mathcal{O}_L$. Le morphisme d'anneaux $i_A : A \to \widehat{A}$ est un isomorphisme analytique le long de $S = \mathbf{N} \setminus \{0\}$. On a $\mathcal{S}^{-1}A = F$ et $\mathcal{S}^{-1}\widehat{A} = \mathbf{A}_F$.

Soit $\varphi : \mathbf{Proj}(A) \to \mathbf{Proj}(B)$ un foncteur additif. Pour harmoniser les notations, notons $\varphi_{\widehat{A}/\widehat{B}} = \widehat{\varphi}$, $\varphi_{F/L} = \mathcal{S}^{-1}\varphi$ et $\varphi_{\mathbf{A}_F/\mathbf{A}_L} = \mathcal{S}^{-1}\widehat{\varphi}$ les foncteurs introduits en 4.3, c'est-à-dire :
$\varphi_{\widehat{A}/\widehat{B}} : \mathbf{Proj}(\widehat{A}) \to \mathbf{Proj}(\widehat{B})$,
$\varphi_{F/L} : \mathbf{Proj}(F) \to \mathbf{Proj}(L)$
et $\varphi_{\mathbf{A}_F/\mathbf{A}_L} : \mathbf{Proj}(\mathbf{A}_F) \to \mathbf{Proj}(\mathbf{A}_L)$.

La suite exacte longue de Mayer-Vietoris de K-théorie de foncteurs 4.4 s'écrit

$$\cdots \longrightarrow K_1(\varphi_{\mathbf{A}_F/\mathbf{A}_L}) \xrightarrow{\partial} K_0(\varphi) \longrightarrow K_0(\varphi_{F/L}) \times K_0(\varphi_{\widehat{A}/\widehat{B}}) \xrightarrow{\mu_0} K_0(\varphi_{\mathbf{A}_F/\mathbf{A}_L}).$$

Convenons également des allègements de notations suivants.

${}_{\varphi}K_r(A) = \ker K_r(A) \to K_r(B)$, $\;K_r(A)\varphi = \text{coker } K_r(A) \to K_r(B)$,
${}_{\varphi}K_r(F) = \ker K_r(F) \to K_r(L)$, $\;K_r(F)\varphi = \text{coker } K_r(F) \to K_r(L)$,
${}_{\varphi}K_r(\widehat{A}) = \ker K_r(\widehat{A}) \to K_r(\widehat{B})$, $\;K_r(\widehat{A})\varphi = \text{coker } K_r(\widehat{A}) \to K_r(\widehat{B})$,
${}_{\varphi}K_r(\mathbf{A}_F) = \ker K_r(\mathbf{A}_F) \to K_r(\mathbf{A}_L)$, $\;K_r(A)\varphi = \text{coker } K_r(\mathbf{A}_F) \to K_r(\mathbf{A}_L)$,

Cette suite exacte de Mayer-Vietoris de K-théorie de foncteurs peut être précisée, notamment en degrés 0 et 1. Pour cela rappelons le résultat suivant, dû à C. Soulé.

Théorème 5.1. ([Sou]) *Soit F un corps de nombres d'anneaux d'entiers A. Alors pour $r > 0$, l'application $K_r(A) \to K_r(F)$ est injective.*

Ce résultat nous permet de découper la suite de Mayer-Vietoris en morceaux sous la forme suivante.

Proposition 5.2. *Soit F/L une extension de corps de nombres, d'anneaux d'entiers $A = \mathcal{O}_F$ et $B = \mathcal{O}_L$. Soit $\varphi : \mathbf{Proj}(A) \to \mathbf{Proj}(B)$ un foncteur additif. Pour $r \geq 0$, on a la suite exacte*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & {}_{\varphi}K_{r+1}(A) \arrow[r, "\Delta"] & {}_{\varphi}K_{r+1}(F) \times {}_{\varphi}K_{r+1}(\widehat{A}) \arrow[r, "\mu_{r+1}"] & {}_{\varphi}K_{r+1}(\mathbf{A}_F) \arrow[dll, "\partial"] \\
 & K_r(\varphi) \arrow[r, "i_r"] & K_r(\varphi_{F/L}) \times K_r(\varphi_{\widehat{A}/\widehat{B}}) \arrow[r, "\mu_r"] & K_r(\varphi_{\mathbf{A}_F/\mathbf{A}_L})
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Considérons le diagramme commutatif suivant dans lequel les lignes et les colonnes sont extraites des suites exactes de Mayer-Vietoris.

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & {}_{\varphi}K_{r+1}(A) \arrow[dd, "\Delta"] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
\cdots \arrow[r] \arrow[dd] & K_{r+1}(\varphi_{F/L}) \times K_{r+1}(\varphi_{\widehat{A}/\widehat{B}}) \arrow[rr] \arrow[dd] & & K_{r+1}(F) \times K_{r+1}(\widehat{A}) \arrow[r, "(\varphi_F \times \varphi_{\widehat{A}})_{r+1}"] \arrow[dd, "\widehat{\mu}_{r+1}"] & K_{r+1}(L) \times K_{r+1}(\widehat{B}) \arrow[dd] \\
 & & {}_{\varphi}K_{r+1}(F) \times {}_{\varphi}K_{r+1}(\widehat{A}) \arrow[ur] \arrow[dd, "\mu_{r+1}"] & & \\
\cdots K_{r+2}(\mathbf{A}_L) \arrow[r] \arrow[dd, "\partial_B"] & K_{r+1}(\varphi_{\mathbf{A}_F/\mathbf{A}_L}) \arrow[rr, "\widehat{\iota}"] \arrow[dr, "\iota_{r+1}"] \arrow[dd, "\partial'"] & & K_{r+1}(\mathbf{A}_F) \arrow[r, "(\varphi_{\mathbf{A}_F})_{r+1}"] \arrow[dd] & K_{r+1}(\mathbf{A}_L) \arrow[dd] \\
 & & {}_{\varphi}K_{r+1}(\mathbf{A}_F) \arrow[ur] \arrow[dl, "\partial"'] & & \\
\cdots K_{r+1}(B) \arrow[r] \arrow[d, "j_{r+1}"] & K_r(\varphi) \arrow[rr] \arrow[d, "i_r"] & & K_r(A) \arrow[r, "\varphi_r"] & K_r(B) \\
\cdots K_{r+1}(L) \times K_{r+1}(\widehat{B}) \arrow[r] & K_r(\varphi_{F/L}) \times K_r(\varphi_{\widehat{A}/\widehat{B}}) \arrow[d, "\mu_r"] & & & \\
 & K_r(\varphi_{\mathbf{A}_F}) & & &
\end{tikzcd}$$

Pour $r \geq 0$, l'homomorphisme $K_{r+1}(B) \to K_{r+1}(L)$ est injectif (Soulé). Par conséquent, l'homomorphisme $j_{r+1} : K_r(B) \to K_r(L) \times K_r(\widehat{B})$ est également injectif et $\partial_B = 0$. Par chasse dans le diagramme, on construit un homomorphisme $\partial : {}_{\varphi}K_{r+1}(\mathbf{A}_F) \to K_r(\varphi)$ de même image que ∂'. Soit μ_{r+1} la restriction de $\widehat{\mu}_{r+1}$ à ${}_{\varphi}K_{r+1}(F) \times {}_{\varphi}K_{r+1}(\widehat{A})$.
On a

$$\ker \partial = \iota_{r+1}(\ker \partial') = \mu_{r+1}({}_{\varphi}K_{r+1}(F) \times {}_{\varphi}K_{r+1}(\widehat{A})) = {}_{\varphi}K_{r+1}(F) \cdot {}_{\varphi}K_{r+1}(\widehat{A}) = \mathrm{im}\ (\mu_{r+1}).$$

Notons $\Delta : {}_{\varphi}K_{r+1}(A) \to {}_{\varphi}K_{r+1}(F) \times {}_{\varphi}K_{r+1}(\widehat{A})$ l'homomorphisme défini par $\Delta(z) = (z, z)$, en identifiant ${}_{\varphi}K_{r+1}(A)$ à un sous-groupe de ${}_{\varphi}K_{r+1}(F)$ et de ${}_{\varphi}K_{r+1}(\widehat{A})$. Il est clair que $\ker \mu_{r+1} = \mathrm{im}\ (\Delta)$. Ceci achève la démonstration.

La suite exacte de Mayer-Vietoris du foncteur norme.

Détaillons la suite exacte 5.2 pour le foncteur norme $\mathbf{N}_{A/B}$ et pour $r = 0$.

Proposition 5.3. *Soit F/L une extension de corps de nombres, d'anneaux d'entiers $A = \mathcal{O}_F$ et $B = \mathcal{O}_L$. Les groupes de K-théorie des foncteurs*
$\mathbf{N}_{F/L} : \mathbf{Proj}(F) \to \mathbf{Proj}(L)$,
$\mathbf{N}_{\widehat{A}/\widehat{B}} : \mathbf{Proj}(\widehat{A}) \to \mathbf{Proj}(\widehat{B})$ *et*
$\mathbf{N}_{\mathbf{A}_F/\mathbf{A}_L} : \mathbf{Proj}(\mathbf{A}_F) \to \mathbf{Proj}(\mathbf{A}_L)$ *induits par le foncteur norme $\mathbf{N}_{A/B}$ sont déterminés ainsi*

$$K_0(\mathbf{N}_{F/L}) = L^*_N,$$

$$K_0(\mathbf{N}_{\widehat{A}/\widehat{B}}) = (\mathcal{U}_L)_N,$$

$$K_0(\mathbf{N}_{\mathbf{A}_F/\mathbf{A}_L}) = (\mathbf{J}_L)_N\,.$$

Démonstration. Notons toujours $N : F^* \to L^*$ la norme. La suite exacte de Bass 2.2 du foncteur $\mathbf{N}_{F/L}$ montre immédiatement qu'on a $K_0(\mathbf{N}_{F/L}) = L^*_N$.
La suite exacte de Bass du foncteur $\mathbf{N}_{\widehat{A}/\widehat{B}}$ s'écrit:

$$K_1(\widehat{A}) \xrightarrow{N} K_1(\widehat{B}) \longrightarrow K_0(\mathbf{N}_{\widehat{A}/\widehat{B}}) \longrightarrow K_0(\widehat{A}) \xrightarrow{N} K_0(\widehat{B}).$$

D'après 1.1, $K_1(\widehat{A}) = \mathcal{U}_F$ et $K_1(\widehat{B}) = \mathcal{U}_L$. Pour montrer la relation $K_0(\mathbf{N}_{\widehat{A}/\widehat{B}}) = (\mathcal{U}_L)_N$, il suffit de montrer que la norme $N : K_0(\widehat{A}) \to K_0(\widehat{B})$ est injective. Mais d'après 1.3, $K_0(\widehat{A})$ s'identifie au produit borné $\prod^{(b)}_{w \in V(F)} K_0(A_w)$. Ce dernier est un sous groupe de $\prod_{w \in V(F)} K_0(A_w) = \mathbf{Z}^{V(F)}$. De même, $K_0(\widehat{B})$ est un sous-groupe de $\prod_{v \in V(L)} K_0(B_v) =$

$\mathbf{Z}^{V(L)}$. Dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} K_0(\widehat{A}) \arrow[r, "N"] \arrow[d] & K_0(\widehat{B}) \arrow[d] \\ \mathbf{Z}^{V(F)} \arrow[r, "N'"] & \mathbf{Z}^{V(L)} \end{tikzcd}$$

les flèches verticales et la flèche N' sont des injections. Il en résulte que la norme $N = N_{\widehat{A}/\widehat{B}}$ est également injective. On en déduit l'égalité $K_0(\mathbf{N}_{\widehat{A}/\widehat{B}}) = (\mathcal{U}_L)_N$.

Pour montrer la dernière égalité $K_0(\mathbf{N}_{\mathbf{A}_F/\mathbf{A}_L}) = (\mathbf{J}_L)_N$, on considère la suite exacte

$$K_1(\mathbf{A}_F) \xrightarrow{N} K_1(\mathbf{A}_L) \longrightarrow K_0(N_{\mathbf{A}_F/\mathbf{A}_L}) \longrightarrow K_0(\mathbf{A}_F) \xrightarrow{N} K_0(\mathbf{A}_L).$$

Le calcul 1.3 et un raisonnement analogue à celui ci-dessus montre que la norme $N : K_0(\mathbf{A}_F) \to K_0(\mathbf{A}_L)$ est également injective. La formule $K_0(\mathbf{N}_{\mathbf{A}_F/\mathbf{A}_L}) = (\mathbf{J}_L)_N$ en résulte.

Pour décrire la suite exacte de Mayer-Vietoris 5.2 du foncteur $\mathbf{N}_{A/B}$, gardons les conventions déjà employées, où on note indifféremment $N : X \to Y$ la norme entre les groupes correspondants. On a donc ${}_NX = \ker N$ et $Y_N = \mathrm{coker} N$.

Théorème 5.4 (suite exacte des noyaux-conoyaux)
Soit F/L une extension de corps de nombres. On a une suite exacte

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & {}_NA^* \arrow[r, "\Delta"] & {}_NF^* \times {}_N\mathcal{U}_F \arrow[r, "\mu_1"] & {}_N\mathbf{J}_F \arrow[dll, "\partial"'] & & \\ & K_0(\mathbf{N}_{A/B}) \arrow[r, "i"] & L_N^* \times (\mathcal{U}_L)_N \arrow[r, "\mu"] & (\mathbf{J}_L)_N \arrow[r, "\partial'"] & Cl(B)_N \arrow[r] & 1. \end{tikzcd}$$

Démonstration. Le résultat 5.2 fournit la suite exacte jusqu'au terme $(J_L)_N$. Pour l'exactitude en $(J_L)_N$ et la surjectivité de ∂', on procède au délaçage de la K-théorie algébrique ([B], [K1], [Wa]). La suite exacte longue de Mayer-Vietoris de K-théorie des foncteurs se prolonge aux entiers négatifs et débute par

$$\longrightarrow K_0(\mathbf{N}_{\mathbf{A}_F/\mathbf{A}_L}) = (J_L)_N \xrightarrow{\partial'} K_{-1}(\mathbf{N}_{A/B}) = Cl(B)_N \longrightarrow K_{-1}(\mathbf{N}_{F/L}) \times K_{-1}(\mathbf{N}_{\widehat{A}/\widehat{B}}) = 0 \longrightarrow \cdots$$

ce qui montre la surjectivité de ∂'.

Corollaire 5.5. *Soit F/L une extension de corps de nombres.*
a) Le groupe $K_0(\mathbf{N}_{A/B})$ s'insère dans les deux suites exactes ci-dessous.

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[r] & B_N^* \arrow[r, "\sigma"] & K_0(\mathbf{N}_{A/B}) \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, equal] & {}_NCl(A) \arrow[r] & 1 \\
 & {}_N\mathbf{J}_F \arrow[rr, "\partial"] & & K_0(\mathbf{N}_{A/B}) \arrow[r, "i"] & L_N^* \times (\mathcal{U}_L)_N \arrow[r, "\mu"] & (\mathbf{J}_L)_N
\end{tikzcd}$$

b) Posons $\alpha = \rho\partial$ et $\beta = i\sigma$. On a un isomorphisme de groupes

$$\textit{coker } \alpha \cong \ker \mu / \textit{im } \beta. \tag{5.5}$$

Décrivons les morphismes ∂, i et μ du diagramme 5.5 (les morphismes σ et ρ ont été décrits en 3.4).

Pour décrire ∂ et i, on identifie $K_0(\mathbf{N}_{A/B})$ avec le groupe $\mathcal{K}_0(\mathbf{N}_{A/B})$ du théorème 3.4. Soit $z = (z_w)_{w\in V(F)}$ un élément de $\mathbf{J}_F$, avec z_w dans F_w^* de valuation $r_w \in \mathbf{Z}$. Soit $\mathfrak{p}_w$ l'idéal de la valuation w. Introduisons l'idéal fractionnaire I_z de F défini par $I_z = \prod_{w\in V(F)} \mathfrak{p}_w^{r_w}$. La relation $N(I_z) = I_{N(z)}$ montre que si z appartient à ${}_N\mathbf{J}_F$, alors $N(I_z)$ est un élément de B^*. On en déduit que $[1_B, I_z]$ appartient à $\mathcal{K}_0(\mathbf{N}_{A/B})$ et que

$$\partial(z) = [1_B, I_z].$$

Soit $[t, I]$ un élément de $\mathcal{K}_0(\mathbf{N}_{A/B})$. Posons $[t] = t \bmod N(F^*)$, donc $[t] \in L_N^*$. Soit v une place finie de L, d'uniformisante $\pi_v \in L_v$. Notons $r \in \mathbf{Z}$ la valuation de $t \in L_v$ et introduisons l'unité $u_v(t) = t\pi^{-r}$ de B_v^*. On pose $[u_v(t)] = u_v(t) \bmod N(A_w^*)$, où w est une place de A au-dessus de v. Enfin $[u(t)]$ désigne la famille $([u_v(t)])_{v\in V(L)}$. On a alors

$$i([t, I]) = ([t], [u(t)]).$$

Pour $([t], [u])$ dans $L_N^* \times (\mathcal{U}_L)_N$, on a enfin

$$\mu([t], [u]) = ([t/u_v])_{v\in V(L)}.$$

Remarque 5.6. (J. Berrick, M. Lim) Dans le diagramme ci-dessous, les lignes sont exactes car extraites des suites de Mayer-Vietoris de K-théorie d'anneaux.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & B^* \arrow[r] & L^* \times \mathcal{U}_L \arrow[r] & \mathbf{J}_L \arrow[r] & Cl(B) \arrow[r] & 1 \\
1 \arrow[r] & A^* \arrow[r] \arrow[u, "\phi_1"] & F^* \times \mathcal{U}_F \arrow[r] \arrow[u, "\phi_1"] & \mathbf{J}_F \arrow[r] \arrow[u, "\phi_1"] & Cl(A) \arrow[r] \arrow[u, "\phi_0"] & 1
\end{tikzcd}$$

On note indifféremment ϕ_1 les homomorphismes induits en K-théorie par les foncteurs φ, $\varphi_{F/L}$, $\varphi_{\widehat{A}/\widehat{B}}$ et $\varphi_{\mathbf{A}_F/\mathbf{A}_L}$ sur le groupe K_1. En considérant ce diagramme comme un complexe double de premier quadrant, la suite spectrale cohomologique associée à ce complexe converge vers 0. Pour $0 \leq p \leq 3$, on en déduit des isomorphismes

$$E^2_{p,1} \cong E^2_{p+2,0}.$$

Dans le cas du foncteur norme, c'est-à-dire si $\varphi = \mathbf{N}_{A/B}$, l'isomorphisme $E^2_{2,1} \cong E^2_{4,0}$ est l'isomorphisme $coker(\alpha) \cong \ker(\mu)/\mathrm{im}(\beta)$ de 5.5.

Pour $r > 1$, compte tenu du théorème de Soulé [Sou], un analogue du diagramme ci-dessus est le suivant :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & K_r(B) \arrow[r] & K_r(L) \times K_r(\widehat{B}) \arrow[r] & K_r(\mathbf{A}_L) \arrow[r] & 1 \\
1 \arrow[r] & K_r(A) \arrow[r] \arrow[u, "\phi_r"] & K_r(F) \times K_r(\widehat{A}) \arrow[r] \arrow[u, "\phi_r"] & K_r(\mathbf{A}_F) \arrow[r] \arrow[u, "\phi_r"] & 1
\end{tikzcd}$$

Le même raisonnement conduit à des isomorphimes $E^2_{1,2} \cong E^2_{3,0}$ et $E^2_{2,1} \cong 0$.

Cas des extensions galoisiennes.

Dans le cas d'une extension galoisienne de groupe de Galois G, on a des isomorphismes

$$K_0(\mathbf{N}_{F/L}) \cong \widehat{H}^0(G, F^*),$$

$$K_0(\mathbf{N}_{\widehat{A}/\widehat{B}}) \cong \widehat{H}^0(G, \mathcal{U}_F)$$

et

$$K_0(\mathbf{N}_{\mathbf{A}_F/\mathbf{A}_L}) \cong \widehat{H}^0(G, \mathbf{J}_F).$$

La suite exacte 5.4 s'écrit donc ainsi :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & {}_N A^* \arrow[r, "\Delta"] & {}_N F^* \times {}_N \mathcal{U}_F \arrow[r, "\mu_1"] & {}_N \mathbf{J}_F \arrow[dll, "\partial"'] & & \\
K_0(\mathbf{N}_{A/B}) \arrow[r, "i"] & \widehat{H}^0(G, F^*) \times \widehat{H}^0(G, \mathcal{U}_F) \arrow[r, "\mu"] & \widehat{H}^0(G, \mathbf{J}_F) \arrow[r, "\partial'"] & Cl(B)_N \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

L'algèbre homologique va nous permettre de pousser plus avant les calculs. Fixons pour cela quelques notations.
Notons

$$h_0 : \widehat{H}^0(G, F^*) \to \widehat{H}^0(G, \mathbf{J}_F)$$

et

$$j_0 : \widehat{H}^0(G,\mathcal{U}_F) \to \widehat{H}^0(G,\mathbf{J}_F)$$

les morphismes de groupes induits par les inclusions canoniques $F^* \to \mathbf{J}_F$ et $\mathcal{U}_F \to \mathbf{J}_F$. Pour $(x,y) \in \widehat{H}^0(G,F^*) \times \widehat{H}^0(G,\mathcal{U}_F)$, on a donc $\mu(x,y) = h_0(x)j_0(y)^{-1}$.

Dans le paragraphe suivant, nous aurons besoin de la description précise du sous-groupe im j_0 $\cap$ im h_0 de $\widehat{H}^0(G,\mathbf{J}_F)$. Nous avons rassemblé dans la proposition 5.7 divers résultats sans doute bien connus sur ce groupe. Pour la commodité du lecteur, nous en proposons des démonstrations.

Proposition 5.7. *Soit F/L une extension galoisienne de corps de nombres, de groupe de Galois G.*

1) L'homomorphisme j_0 ci-dessus est injectif.

2) On a une suite exacte

$$1 \longrightarrow im\ h_0\ \cap\ im\ j_0 \longrightarrow im\ j_0 \longrightarrow G_{ab}.$$

3) Lorsque l'extension est cyclique, l'homomorphisme h_0 est injectif.

4) Lorsque l'extension est cyclique ramifiée de degré premier ℓ, im $h_0 \cap$ im j_0 est un $\mathbf{F}_\ell$-espace vectoriel de dimension $t-1$, où t est le nombre de places finies de L ramifiées dans F.

Démonstration.
1) Injectivité de j_0. Soient v une place de L et w une place de F au-dessus de v. On pose $G_w = Gal(F_w/L_v)$. On désigne par $V(L)$ l'ensemble des places finies de L et par $\mathcal{R}(F/L)$ l'ensemble des places finies de L ramifiées dans F.
Montrons en premier lieu qu'on a des isomorphismes de groupes

$$\widehat{H}^0(G,\mathcal{U}_F) \cong \oplus_{v\in\mathcal{R}(F/L)}\widehat{H}^0(G_w,A_w^*)$$

et

$$\widehat{H}^0(G,\mathbf{J}_F) \cong \oplus_{v\in V(L)}\widehat{H}^0(G_w,F_w^*).$$

On décompose le module galoisien $\mathcal{U}_F$ en produit direct de modules galoisiens

$$\mathcal{U}_F = \prod_{v\in V(L)} A_v^*$$

avec

$$A_v^* = \prod_{w\in V(F),w|v} A_w^*$$

d'où

$$\widehat{H}^0(G,\mathcal{U}_F) = \prod_{v\in V(L)} \widehat{H}^0(G,A_v^*).$$

Mais $A_v^* = \mathrm{Ind}\,{}_G^{G_v}$ est un module induit et d'après le lemme de Shapiro, on a

$$\widehat{H}^0(G,A_v^*) = \widehat{H}^0(G_v,A_w^*).$$

Pour conclure, on remarque que $\widehat{H}^0(G_v, A_w^*) = B_v^*/N(A_w^*)$ et que si v est non ramifiée dans F, $B_v^* = N(A_w^*)$ ([N], V.1.2, p. 319). Pour v non ramifiée, on a ainsi $\widehat{H}^0(G, A_v^*) = 0$. Il reste donc

$$\widehat{H}^0(G, \mathcal{U}_F) = \oplus_{v \in \mathcal{R}(F/L)} \widehat{H}^0(G_v, A_w^*).$$

Le calcul de $\widehat{H}^0(G, \mathbf{J}_F)$ s'effectue de manière analogue, par passage à la limite inductive sur l'ensemble des places finies de L. Introduisons les modules galoisiens $F_v^* = \prod_{w|v} F_w^*$ et $A_v^* = \prod_{w|v} A_w^*$. Soit S un ensemble fini de places de L. On pose $\mathbf{J}_F^S = \prod_{v \in S} F_v^* \times \prod_{v \notin S} A_v^*$ de sorte que $\mathbf{J}_F = \varinjlim_{S} \mathbf{J}_F^S$.

On a par conséquent $\widehat{H}^0(G, \mathbf{J}_F) = \varinjlim_{S} \widehat{H}^0(G, \mathbf{J}_F^S)$.

Or

$$\widehat{H}^0(G, \mathbf{J}_F^S) = \oplus_{v \in S} \widehat{H}^0(G, F_v^*) \times \oplus_{v \notin S} \widehat{H}^0(G, A_v^*).$$

Par ailleurs, si v est une place de L non ramifiée dans F, on a vu que $\widehat{H}^0(G, A_v^*) = 0$. L'ensemble des places ramifiées étant fini, on a $\mathcal{R}(F/L) \subset S$ pour S assez grand et dans ce cas, on a

$$\widehat{H}^0(G, \mathbf{J}_F^S) = \oplus_{v \in S} \widehat{H}^0(G, F_v^*),$$

d'où

$$\widehat{H}^0(G, \mathbf{J}_F) = \oplus_{v \in V(L)} \widehat{H}^0(G, F_v^*).$$

L'emploi du lemme de Shapiro conduit à l'isomorphisme $\widehat{H}^0(G, F_v^*) = \widehat{H}^0(G_w, F_w^*)$, ce qui donne finalement

$$\widehat{H}^0(G, \mathbf{J}_F) \cong \oplus_{v \in V(L)} \widehat{H}^0(G_w, F_w^*).$$

Montrons à présent l'injectivité de l'homomorphisme j_0. D'après les calculs qui précèdent, il suffit de vérifier que pour toute place v de L et toute place w de F au-dessus de v, l'homomorphisme

$$\widehat{H}^0(G_w, A_w^*) \to \widehat{H}^0(G_w, F_w^*)$$

est injectif. La suite exacte courte de valuation

$$1 \to A_w^* \to F_w^* \to \mathbf{Z} \to 0$$

conduit à la suite exacte

$$\widehat{H}^{-1}(G_w, \mathbf{Z}) \to \widehat{H}^0(G_w, A_w^*) \to \widehat{H}^0(G_w, F_w^*).$$

L'opération de G_w sur $\mathbf{Z}$ étant triviale, le groupe $\widehat{H}^{-1}(G_w, \mathbf{Z})$ est un quotient du noyau de la multiplication par $\#G_w$ dans $\mathbf{Z}$. Ce noyau est évidemment nul donc $\widehat{H}^{-1}(G_w, \mathbf{Z}) = 0$, ce qui fournit l'injectivité recherchée.

2) Démonstration de la suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathrm{im}\ h_0 \ \cap\ \mathrm{im}\ j_0 \longrightarrow \mathrm{im}\ j_0 \longrightarrow G_{ab}.$$

Rappelons que dans ce texte, nous désignons par $\mathbf{J}_F$ le groupe des idèles aux places finies du corps F. Notons $\mathbf{J}'_F$ le groupe des idèles de F à toutes les places de F (y compris les places à l'infini). Soit r le nombre de places infinies de L ramifiées dans F. On a

$$\widehat{H}^0(G, \mathbf{J}'_F) = \mathbf{C}_2^r \times \widehat{H}^0(G, \mathbf{J}_F).$$

Introduisons les applications

$$h'_0 : \widehat{H}^0(G, F^*) \to \widehat{H}^0(G, \mathbf{J}'_F)$$

$$j'_0 : \widehat{H}^0(G, \mathcal{U}_F) \to \widehat{H}^0(G, \mathbf{J}'_F)$$

et

$$i : \widehat{H}^0(G, \mathbf{J}_F) \to \widehat{H}^0(G, \mathbf{J}'_F).$$

On a $i \circ h_0 = h'_0$ et $i \circ j_0 = j'_0$.
La suite exacte courte

$$1 \to F^* \to \mathbf{J}'_F \to C_F \to 1$$

fournit la suite exacte

$$\widehat{H}^{-1}(G, C_F) \longrightarrow \widehat{H}^0(G, F^*) \xrightarrow{h'_0} \widehat{H}^0(G, \mathbf{J}'_F) \xrightarrow{s_0} \widehat{H}^0(G, C_F) \longrightarrow \widehat{H}^1(G, F^*).$$

D'après le théorème de Tate-Nakayama et la théorie globale du corps de classes, le cup-produit fournit un isomorphisme $\widehat{H}^0(G, C_F) \cong \widehat{H}^{-2}(G, \mathbf{Z})$ et ce dernier groupe est égal à $H_1(G, \mathbf{Z}) = G_{ab} = G/[G, G]$. Par ailleurs, d'après le théorème 90 de Hilbert, $H^1(G, F^*) = 0$. On a donc la suite exacte

$$\widehat{H}^0(G, F^*) \xrightarrow{h'_0} \widehat{H}^0(G, \mathbf{J}'_F) \xrightarrow{s_0} G_{ab} \longrightarrow 1.$$

L'application composée

$$\varphi_0 : \widehat{H}^0(G, \mathcal{U}_F) \to \widehat{H}^0(G, C_F)$$

définie par $\varphi_0 = s_0 \circ j'_0$ est donc à valeurs dans G_{ab} et de noyau isomorphe à

$$\ker s_0 \cap \operatorname{im} j'_0 = \operatorname{im} h'_0 \cap \operatorname{im} j'_0.$$

Mais $\operatorname{im} h'_0 \cong \operatorname{im} h_0$ et $\operatorname{im} j'_0 \cong \operatorname{im} j_0$ car i est injective, d'où le résultat.

3) Injectivité de h_0. C'est le principe de Hasse ([N-S-W], p. 375)

4) Détermination de $\operatorname{im} h_0 \cap \operatorname{im} j_0$.
Posons $\varphi_r = s_r \circ j_r$ avec

$$j_r : \widehat{H}^r(G, \mathcal{U}_F) \to \widehat{H}^r(G, \mathbf{J}'_F)$$

et

$$s_r : \widehat{H}^r(G, \mathbf{J}'_F) \to \widehat{H}^r(G, C_F)$$

et donnons l'expression de φ_2. D'après le lemme de Shapiro, on a les égalités

$$\widehat{H}^2(G,\mathcal{U}_F) \cong \oplus_{v\in\mathcal{R}(F/L)} H^2(G_w, A_w^*)$$

et

$$\widehat{H}^2(G,\mathbf{J}'_F) \cong \oplus_{v\in V(L)} H^2(G_w, F_w^*),$$

où pour toute place v de L , w est une place de F au-dessus de v.

La théorie du corps de classes fournit des isomorphismes canoniques

$$\widehat{H}^2(G,C_F) \cong 1/\#G\ \mathbf{Z}/\ \mathbf{Z}$$

et

$$\widehat{H}^2(G_w,F_w^*) \cong 1/\#G_w\ \mathbf{Z}/\ \mathbf{Z}.$$

Compte tenu de ces isomorphismes, l'application s_2 est donnée par

$$s_2((z_v)_{v\in V(F/L)}) = \sum_{v\in V(F/L)} z_v.$$

Dans cette égalité, l'expression $\sum_{v\in V(F/L)} z_v$ a un sens car l'ordre de G_w divise l'ordre de G.

D'autre part, la suite exacte courte de valuation conduit à l'injectivité de l'homomorphisme

$$\widehat{H}^2(G_w, A_w^*) \to \widehat{H}^2(G_w, F_w^*),$$

ce qui montre que j_2 est injective. Par conséquent, l'homomorphisme φ_2 est donnée par

$$\varphi_2((z_v)_{v\in\mathcal{R}(F/L)}) = \sum_{v\in\mathcal{R}(F/L)} z_v.$$

En particulier, $\ker\varphi_2 \neq \widehat{H}^2(G,\mathcal{U}_F)$.

Puisque G est cyclique, il existe $\gamma \in H^2(G,\mathbf{Z})$ tel que les homomorphismes verticaux $\gamma\cup -$ du diagramme ci-dessous sont des isomorphismes.

$$\begin{tikzcd}
\widehat{H}^0(G,\mathcal{U}_F) \arrow[r, "\varphi_0"] \arrow[d, "\gamma\cup-"'] & \widehat{H}^0(G,C_F) \arrow[d, "\gamma\cup-"] \\
\widehat{H}^2(G,\mathcal{U}_F) \arrow[r, "\varphi_2"'] & \widehat{H}^2(G,C_F)
\end{tikzcd}$$

Par naturalité des cup produits, ce diagramme est commutatif.

De ce diagramme et de $\ker\varphi_2 \neq \widehat{H}^2(G,\mathcal{U}_F)$, on déduit $\ker\varphi_0 \neq \widehat{H}^0(G,\mathcal{U}_F)$. Mais $\widehat{H}^0(G,C_F)$ est isomorphe à G qui est simple, car d'ordre premier. Par conséquent, φ_0 est surjectif et on a la suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathrm{im}\ h_0\ \cap\ \mathrm{im}\ j_0 \longrightarrow \mathrm{im}\ j_0 \longrightarrow G \longrightarrow 1.$$

Par ailleurs, d'après 1) im j_0 est isomorphe à $\widehat{H}^0(G,\mathcal{U}_F)$. On a vu que ce dernier groupe est isomorphe à $\oplus_{v\in\mathcal{R}(F/L)}\widehat{H}^0(G_w, A_w^*)$. D'après [Se], corollaire 7 et sa remarque p. 95, $\widehat{H}^0(G_w, A_w^*)$ est cyclique d'ordre ℓ et donc im $j_0 \cong \mathbf{C}_\ell^t$ est un $\mathbf{F}_\ell$-espace vectoriel de dimension t. La suite exacte ci-dessus implique donc l'égalité suivante :

$$\dim_{\mathbf{F}_\ell}(\mathrm{im}\ h_0\ \cap\ \mathrm{im}\ j_0)\ = t-1.$$

6. Quelques applications.

Nous supposons à présent et jusqu'à la fin de cet article que F/L est une extension cyclique de corps de nombres, d'anneaux d'entiers $A = \mathcal{O}_F$, $B = \mathcal{O}_L$. Rappelons que $I_G Cl(A)$ désigne le sous-module de $Cl(A)$ engendré par les éléments de la forme $(1-g)a$, $a \in Cl(A)$ et que

$$_NCl(A) = \ker N : Cl(A) \to Cl(B).$$

Lemme 6.1. *a) Avec les notations de 5.5, dans le cas d'une extension cyclique, on a un isomorphisme de groupes*

$$\textit{coker}\ \alpha\ \cong\ {}_NCl(A)/I_G Cl(A).$$

b) Pour une extension cyclique $F/\mathbf{Q}$, coker α est isomorphe au groupe des co-invariants du groupe des classes.

Démonstration. a) Désignons par g un générateur du groupe de Galois G. Soit z un élément de $\mathbf{J}_F$. Désignons par I_z l'idéal fractionnaire $\prod_w \mathfrak{p}_w^{v(z_w)}$. Le morphisme de groupes

$$\overline{\alpha} : \mathbf{J}_F \to Cl(A)$$

défini par $\overline{\alpha}(z) = [I_z]$ est surjectif et satisfait la relation $\overline{\alpha}(gz) = g\overline{\alpha}(z)$ pour tout g de G et tout z de $\mathbf{J}_F$.

La restriction α de $\overline{\alpha}$ à $_N\mathbf{J}_F$ est à valeurs dans $_NCl(A)$. Soit $z \in {}_N\mathbf{J}_F$. D'après le théorème 90 de Hilbert sous la forme $H^1(G,\mathbf{J}_F) = 1$, il existe un élément u de $\mathbf{J}_F$ tel que $z = (1-g)u$. On en déduit $\alpha(z) = (1-g)[I_u]$ donc $\alpha(z) \in I_G Cl(A)$. Ceci montre l'inclusion im $\alpha \subset I_G Cl(A)$.

Soit $(1-g)[I]$ un élément de $I_G Cl(A)$. Par surjectivité de $\overline{\alpha}$, il existe $u \in \mathbf{J}_F$ tel que $[I] = [I_u]$. Posons $z = (1-g)u$. On a $z \in {}_NCl(A)$ et $\alpha(z) = (1-g)[I]$. Ceci montre l'inclusion $I_G Cl(A) \subset$ im α.

b) Si $L = \mathbf{Q}$, $_NCl(A) = Cl(A)$ et coker $(\alpha) = Cl(A)/I_G Cl(A) = Cl(A)_G$.

Proposition 6.2. *Si le groupe de Galois G est cyclique, les homomorphismes naturels*

$$h : L^*/B^*N(F^*) \to \mathbf{J}_L/B^*N(\mathbf{J}_F)$$

et

$$j : \mathcal{U}_L/B^*N(\mathcal{U}_F) \to \mathbf{J}_L/B^*N(\mathbf{J}_F)$$

sont injectifs.

Démonstration. Considérons le diagramme suivant dans lequel les lignes sont exactes.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & B^*/B^* \cap N(\mathcal{U}_F) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{j}_0"'] & \widehat{H}^0(G,\mathcal{U}_F) \arrow[r, "p_{\mathcal{U}}"] \arrow[d, "j_0"'] & \mathcal{U}_L/B^*N(\mathcal{U}_F) \arrow[r] \arrow[d, "j"] & 1 \\
1 \arrow[r] & B^*/B^* \cap N(\mathbf{J}_F) \arrow[r] & \widehat{H}^0(G,\mathbf{J}_F) \arrow[r, "p"] & \mathbf{J}_L/B^*N(\mathbf{J}_F) \arrow[r] & 1 \\
1 \arrow[r] & B^*/B^* \cap N(F^*) \arrow[r] \arrow[u, "\tilde{h}_0"] & \widehat{H}^0(G,F^*) \arrow[r, "p_F"] \arrow[u, "h_0"'] & L^*/B^*N(F^*) \arrow[r] \arrow[u, "h"'] & 1
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, les homomorphismes $\tilde{h}_0$ et $\tilde{j}_0$ sont surjectifs. L'homomorphisme j_0 est injectif et, grâce au principe de Hasse, il en est de même pour l'homomorphisme h_0 . En appliquant le lemme du serpent aux deux premières lignes, on démontre à la fois l'injectivité de $\tilde{j}_0$ et celle de j. On raisonne de même pour $\tilde{h}_0$ et h.

Rappelons sans démonstration un résultat banal.

Lemme 6.3.
Soient M_1 et M_2 deux sous-groupes d'un groupe abélien M et soit N un sous-groupe de $M_1 \cap M_2$. Alors on a un isomorphisme de groupes $M_1 \cap M_2/N \cong M_1/N \cap M_2/N$.

Lemme 6.4. *Avec les notations de 5.5 et 5.7, dans le cas d'une extension cyclique, on a des isomorphismes de groupes*

$$\ker \mu \;\cong\; im\ h_0 \;\cap\; im\ j_0$$

et

$$\ker \mu / im\ \beta \;\cong\; im\ h \;\cap\; im\ j.$$

Démonstration. En notation multiplicative, l'application

$$\mu : \widehat{H}^0(G,F^*) \times \widehat{H}^0(G,\mathcal{U}_F) \to \widehat{H}^0(G,\mathbf{J}_F)$$

de la suite exacte de Mayer-Vietoris est donnée par

$$\mu(x,y) = h_0(x) j_0^{-1}(y).$$

Son noyau $\ker \mu$ est donc isomorphe au produit fibré $X \times_Z Y$ avec $X = \widehat{H}^0(G,F^*)$, $Y = \widehat{H}^0(G,\mathcal{U}_F)$, $Z = \widehat{H}^0(G,\mathbf{J}_F)$. L'extension F/L étant cyclique, on a vu que les homomorphismes h_0 et j_0 sont injectifs. Par conséquent, ce produit fibré n'est autre que $\mathrm{im}\ h_0 \cap \mathrm{im}\ j_0$. Ceci montre

$$\ker \mu \cong \mathrm{im}\ h_0 \;\cap\; \mathrm{im}\ j_0.$$

Considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\widehat{H}^0(G,A^*) \arrow[dr, "\beta"] \arrow[drr, "\beta_{\mathcal{U}}"] \arrow[ddr, "\beta_F"'] & & & \operatorname{coker}\beta_{\mathcal{U}} \arrow[ddd, "j"] \\
& \ker\mu \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{H}^0(G,\mathcal{U}_F) \arrow[ur] \arrow[d, "j_0"] & \\
& \widehat{H}^0(G,F^*) \arrow[r, "h_0"'] \arrow[dl] & \widehat{H}^0(G,\mathbf{J}_F) \arrow[dr] & \\
\operatorname{coker}\beta_F \arrow[rrr, "h"'] & & & \operatorname{coker}(h_0\circ\beta_F)
\end{tikzcd}$$

On a $\ker\mu \cong \text{im } h_0 \cap \text{im } j_0$, d'où

$$\ker\mu/\text{im } \beta \cong (\text{im } h_0 \cap \text{im } j_0)/\text{im } (h_0\beta_F) \cong$$

$$\cong \text{im } h_0/\text{im } (h_0\beta_F) \ \cap \ \text{im } j_0/\text{im } (h_0\beta_{\mathcal{U}}) \ = \ \text{im } h \cap \text{im } j.$$

Remarque 6.5. On a coker $\beta_F = L^*/B^*N(F^*)$, coker $\beta_{\mathcal{U}} = \mathcal{U}_L/B^*N(\mathcal{U}_F)$ et coker $h_0\circ\beta = \mathbf{J}_L/B^*N(\mathbf{J}_F)$.
Les homomorphismes h et j étant injectifs, nous nous autoriserons à écrire im $h\cap$im j sous la forme

$$\text{im } h \cap \text{im } j \ \cong \ L^*/B^*N(F^*) \ \cap \ \mathcal{U}_L/B^*N(\mathcal{U}_F),$$

vu comme sous-groupe de $\mathbf{J}_L/B^*N(\mathbf{J}_F)$.

Théorème 6.6. *Soit F/L est une extension cyclique de corps de nombres d'anneaux d'entiers $A = \mathcal{O}_F$, $B = \mathcal{O}_L$. On désigne par $I_GCl(A)$ le sous-module de $Cl(A)$ engendré par les éléments de la forme $(1-g)a$, $a \in Cl(A)$ et on pose ${}_NCl(A) = \ker N : Cl(A) \to Cl(B)$. On a alors un isomorphisme de groupes*

$$ {}_NCl(A)/I_GCl(A) \ \cong \ \text{im } h \ \cap \ \text{im } j. \tag{6.6.}$$

En particulier, pour une extension $F/\mathbf{Q}$ cyclique, si on désigne par $Cl(A)_G$ le groupe des co-invariants du groupe des classes de A et par $\hat{\mathbf{Z}}^*$ le produit $\prod_p \mathbf{Z}_p^*$, on a un isomorphisme de groupes

$$Cl(A)_G \ \cong \ \mathbf{Q}^*/\mathbf{Z}^*N(F^*) \ \cap \ \widehat{\mathbf{Z}}^*/\mathbf{Z}^*N(\mathcal{U}_F),$$

ce dernier étant vu comme sous-groupe de $\mathbf{J}_{\mathbf{Q}}/\mathbf{Z}^*N(\mathbf{J}_F)$.

La démonstration résulte immédiatement de 5.5, 6.1 et 6.4.

Corollaire 6.7. *Sous les hypothèses 6.6 et avec les notations de 5.7, on a une suite exacte*

$$1 \longrightarrow B^*/(B^* \cap N(F^*)) \longrightarrow \text{im } h_0 \ \cap \ \text{im } j_0 \longrightarrow {}_NCl(A)/I_GCl(A) \longrightarrow 1.$$

Démonstration. Dans le diagramme de la démonstration 6.2, on vérifie par chasse dans le diagramme que la restriction de p à im h_0 $\cap$ im j_0 a pour image im h $\cap$ im j et pour noyau $\ker p = B^*/(B^* \cap N(F^*))$. On a donc une suite exacte courte

$$1 \longrightarrow B^*/(B^* \cap N(F^*)) \longrightarrow \mathrm{im}\ h_0\ \cap\ \mathrm{im}\ j_0 \longrightarrow \mathrm{im}\ h\ \cap\ \mathrm{im}\ j \longrightarrow 0.$$

On conclut grâce à 6.6.

De 6.7 et 5.7.4, nous déduisons immédiatement

Théorème 6.8. *Soit F/L une extension cyclique de corps de nombres d'anneaux d'entiers $A = \mathcal{O}_F$ et $B = \mathcal{O}_L$. On suppose l'extension ramifiée, de degré premier ℓ et de groupe de Galois G. Désignons par t le nombre de places finies de L ramifiées dans F et par $I_G Cl(A)$ le sous-module de $Cl(A)$ engendré par les éléments de la forme $(1-g)a$, $a \in Cl(A)$. Posons*

$$_N Cl(A) := \ker N : Cl(A) \to Cl(B).$$

Alors $_N Cl(A)/I_G Cl(A)$ est un $\mathbf{F}_\ell$-espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à $t-1$.

Exemple d'emploi de la suite exacte 6.7.

Montrons comment la suite exacte 6.7 permet de retrouver un résultat connu sur le ℓ-rang des extensions de degré premier ℓ, mais de démonstration délicate.

Théorème 6.9. *Soit $F/\mathbf{Q}$ une extension cyclique de degré premier ℓ, de groupe de Galois $G = \mathbf{C}_\ell$. Notons $Cl(A)_G$ le groupe des co-invariants du groupe des classes de F sous l'opération de son groupe de Galois. Soit t le nombre de diviseurs premiers du discriminant du corps F.*
Alors le ℓ-rang du groupe des co-invariants du groupe des classes du corps F est égal à $t-1$ sauf si $\ell = 2$, F quadratique réel et s'il existe un nombre premier p congru à 3 modulo 4 et divisant le discriminant du corps F.
Dans ce dernier cas, le 2-rang du groupe des co-invariants du groupe des classes du corps F est égal à $t-2$.

Démonstration. Posons $V = \mathrm{im}\ h_0\ \cap\ \mathrm{im}\ j_0$ et $H = \mathbf{Z}^*/\mathbf{Z}^* \cap N(F^*)$. D'après 5.7.4, V est un $\mathbf{F}_\ell$-espace vectoriel de dimension $t-1$. D'après 6.7, on a une suite exacte courte de $\mathbf{F}_\ell$-espaces vectoriels

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow V \longrightarrow Cl(A)_G \longrightarrow 1.$$

Si $\ell > 2$ ou si $l = 2$ et $-1 \in N(F^*)$, $H = \{1\}$, $V \cong Cl(A)_G$ et

$$\dim_{\mathbf{F}_\ell} Cl(A)_G = \dim_{\mathbf{F}_\ell} V = t-1.$$

Rappelons que pour $\ell = 2$, on a $-1 \notin N(F^*)$ si et seulement F est réel et s'il existe un premier congru à 3 modulo 4 ramifié dans F.
Pour $\ell = 2$ et $-1 \notin N(F^*)$, on a $H = \mathbf{Z}^*$ donc $\dim_{\mathbf{F}_\ell} Cl(A)_G = \dim_{\mathbf{F}_\ell} V - 1 = t-2$.

Remarque 6.10. Le théorème 6.9 a pour origine une formule des genres. On pourra trouver des démonstrations classiques dans S. Lang [L], Chap. XIII, lemme 4.1 ou dans [H], Theorem 4, p. VII.12. Pour $\ell = 2$, on retrouve un résultat essentiellement dû à Gauss et qui s'énonce sous la forme suivante : soit Δ un discriminant fondamental de corps quadratique et soit $t = t(\Delta)$ le nombre de facteurs premiers de Δ. Le 2-rang du groupe des classes de tout corps quadratique de discriminant Δ est égal à $t - 1$, sauf si $\Delta > 0$ et si Δ possède un facteur premier congru à 3 modulo 4. Dans ce cas exceptionnel, le 2-rang du groupe des classes est égal à $t - 2$.

Bibliographie.

[B], H. Bass, *Algebraic K-theory*, Benjamin, 1968.

[B-M-S], H. Bass, J. Milnor & J.-P. Serre, Solution of the congruence subgroup problem for SL_n $(n \geq 3)$ and Sp_{2n} $(n \geq 2)$, *Publ. Math. Inst. Hautes Ét. Sci.*, **33**, 1967, 59-137.

[G], S.M. Gersten, *Higher algebraic K-theory*, Lecture Notes in Math., 341, Springer, 1973, 3-41.

[Gr], D. Grayson, Higher algebraic K-theory. II (after Daniel Quillen). *Algebraic K-theory (Proc. Conf., Northwestern Univ., Evanston, Ill., 1976)*, pp. 217–240. Lecture Notes in Math., Vol. 551, Springer, Berlin, 1976.

[H], C.S. Herz, *Seminar on Complex Multiplication*, Exposé VII, Lecture Notes in Math., 21, Springer, 1966.

[K1], M. Karoubi, Foncteurs dérivés et K-théorie, *Lecture Notes in Math.*, 136, 1970, 107-186.

[K2], M. Karoubi, Localisation de formes quadratiques 1, *Ann. Sci. É.N.S.*, **7**, 1974, 359-404.

[K3], M. Karoubi, Le théorème fondamental de la K-théorie hermitienne, *Ann. Math.*, **112**, 1980, 259-282.

[K-L], M. Karoubi & T. Lambre, Quelques classes caractéristiques en théorie des nombres, *J. reine angew. Math.*, **543**, 2002, 169-186.

[L], S. Lang, *Cyclotomic fields*, II, Graduate Texts in Mathematics 69, Springer, 1979.

[M], J. Milnor, *Introduction to algebraic K-theory*, Annals of Mathematics Studies, No. 72. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1971.

[N], J. Neukirch, *Algebraic number theory*, Springer, 1999.

[N-S-W], J. Neukirch, A. Schmidt, K. Wingberg, *Cohomology of number fields*, Springer, 2000.

[NQD] T. Nguyen Quang Do, *Quelques suites exactes en théorie des genres. Publ. Math. Univ. Franche-Comté Besançon*, 2006, 103-115.

[Q], D. Quillen, *Higher algebraic K-theory*, Lecture Notes in Math., 341, 1973, 85-147.

[Se], J.-P. Serre, *Corps Locaux*, Hermann, 1968.

[Sou], C. Soulé, K-théorie des anneaux d'entiers de corps de nombres et cohomologie étale, *Invent. Math.*, **55**, 1979, 251-295.

[Wa], J.B. Wagoner, Delooping classifying spaces in algebraic K-theory. *Topology*, **11**, 1972, 349–370.

[W1], C. Weibel, K-theory and analytic isomorphism, *Inv. Math.*, **61**, 1980, 177-197.

[W2], *An introduction to algebraic K-theory (a graduate textbook in progress)*, http://math.rutgers.edu/ weibel/Kbook.html