

## INTERRO 3 - SUJET 1

**Exercice 1.**

On considère les vecteurs :

$$e_1 = (0, 1, 1), \quad e_2 = (1, 5, 1), \quad e_3 = (-5, 2, 4).$$

1. OK

2.

$$\|e_1\| = \sqrt{2} \quad \text{donc} \quad f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1).$$

Pour le calcul de  $f_2$ , on a  $\langle e_2, f_1 \rangle = 3\sqrt{2}$  et donc

$$e_2 - \langle e_2, f_1 \rangle f_1 = (1, 2, -2)$$

La norme de ce vecteur est égale à 3 donc

$$f_2 = \frac{1}{3}(1, 2, -2)$$

Pour le calcul de  $f_3$ , on a  $\langle e_3, f_1 \rangle = 3\sqrt{2}$  et  $\langle e_3, f_2 \rangle = -3$  et donc

$$e_3 - \langle e_3, f_1 \rangle f_1 - \langle e_3, f_2 \rangle f_2 = (-4, 1, -1)$$

La norme de ce vecteur est égale à  $3\sqrt{2}$  donc

$$f_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-4, 1, -1)$$

3. On note  $F = \text{Vect}(f_1, f_3)$ .

$$p_F(u) = \langle u, f_1 \rangle f_1 + \langle u, f_3 \rangle f_3$$

Or  $\langle u, f_1 \rangle = 0$  et  $\langle u, f_3 \rangle = \sqrt{2}$ . Ainsi

$$p_F(u) = \frac{1}{3}(-4, 1, -1)$$

4.

$$\inf_{v \in \text{Vect}(f_1, f_3)} \|u - v\| = \|u - p_F(u)\| = \frac{1}{3} \|(1, 2, -2)\| = 1$$