Fonction C^∞

Montrer que la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
- **si $x > 0$, alors $g(x) = \exp(-1/x^2)$,**
- **si $x \leqslant 0$, alors $g(x) = 0$,**

est C^∞ sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad g^{(k)}(0) = 0.$$

On utilisera le lemme suivant :

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $x \in I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I, C^1 sur $I \setminus \{x\}$. Si la limite $\lim_{y \to x} f'(y)$ existe, alors f est C^1 sur I tout entier et on a

$$f'(x) = \lim_{y \to x} f'(y).$$

On démontre ensuite par récurrence la version plus forte :

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $x \in I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I, C^∞ sur $I \setminus \{x\}$. Si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la limite $\lim_{y \to x} f^{(k)}(y)$ existe, alors f est C^∞ sur I et on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^{(k)}(x) = \lim_{y \to x} f^{(k)}(y).$$

Revenons-en à l'exercice. Comme la fonction $-1/X^2$ est C^∞ de $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ et la fonction exp est $\mathbb{C}^\infty$ de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, les théorèmes usuels de cours montrent que la fonction g est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, g est aussi clairement C^∞ sur $\mathbb{R}_-^*$, car sur cet intervalle, elle coïncide avec la fonction nulle.

On est donc dans un cadre propice pour essayer d'utiliser les résultats rappelés ci-dessus. Il faut maintenant montrer que les dérivées successives de g admettent des limites en 0. On commence par montrer un lemme :

<u>Lemme</u> : Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_k \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$g^{(k)}(x) = P_k(1/x) \exp(-1/x^2).$$

<u>Démonstration</u> : On procède par récurrence sur k. On pose HR(k) l'hypothèse de récurrence à l'ordre k : il existe un polynôme $P_k \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$g^{(k)}(x) = P_k(1/x) \exp(-1/x^2).$$

initialisation : pour $k = 0$, on a $g^{(0)}(x) = g(x) = 1 \times \exp(-1/x^2)$ dès que $x > 0$. Donc l'hypothèse est vérifiée avec $P_0(X) = 1$.

hérédité : supposons HR(k) pour un certain $k \in \mathbb{N}$, montrons HR$(k+1)$. Il suffit de calculer, pour $x > 0$, $g^{(k+1)}(x) = (g^{(k)})'(x)$, en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$g^{(n+1)}(x) = \big(P_k(1/x)\exp(-1/x^2)\big)' = \big(P_k'(1/x) \times \big(-1/x^2\big) + P_k(1/x) \times \big(2/x^3\big)\big)\exp(-1/x^2).$$

Ainsi, HR$(k+1)$ est vérifiée en posant $P_{k+1}(X) = -X^2 P_k'(X) + 2X^3 P_k(X)$.

On calcule maintenant les limites en 0 des dérivées successives. Clairement, si $x < 0$, et $k \in \mathbb{N}$, alors $g^{(k)}(x) = 0$ (dérivée k-ème de la fonction nulle). Ainsi,

$$\lim_{x \to 0^-} g^{(k)}(x) = 0.$$

Maintenant, en faisant le changement de variable $y = 1/x$ on vérifie que pour $x > 0$,

$$\lim_{x \to 0^+} f^{(k)}(x) = \lim_{x \to 0^+} P_k(1/x)\exp(-1/x^2) = \lim_{y \to +\infty} P_k(y)\exp(-y^2) = 0,$$

d'après les relations de comparaisons usuelles entre exponentielle et fonctions polynômiales.

En conclusion les limites suivantes existent :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{y \to 0} g^{(k)}(y) = 0,$$

ainsi la fonction g est bien C^∞ sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad g^{(k)}(0) = 0.$$