UPMC
PeiP2

LM250
2013-2014

TD 6 : Séries de Fourier

Exercice 1. *Développement en* $\sin^2$

Montrer la formule suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| = \frac{8}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\sin^2(nx)}{4n^2 - 1}.$$

Exercice 2. *Formules diverses*

1. Donner le développement en série de Fourier de la fonction 2π-périodique définie sur $[0, 2\pi[$ par $f(x) = e^{ax}$ avec $a \neq 0$.
2. Calculer $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{a}{a^2+n^2}$. En déduire $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$.
3. Que vaut la limite $\lim\limits_{a \to +\infty} \sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{a}{a^2+n^2}$?

Exercice 3. *Série absolument convergente et série de Fourier*

1. Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes dont la série est absolument convergente. Montrer que la série de fonction $\sum\limits_{\substack{TG \\ n \in \mathbb{Z}}} c_n e^{inX}$ converge normalement.
2. On note f la limite de la série de fonction. Montrer que f est continue et que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) = c_n.$$

Exercice 4. *Régularité de* f *et décroissance des coefficients de Fourier*

1. Soit f une fonction 2π-périodique et C^k. Montrer que ses coefficients de Fourier vérifient $C_n(f) = o(|n|^{-k})$.
2. Réciproquement, soit $\varepsilon > 0$ et $k \in \mathbb{N}$. Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes telle que $c_n = o(|n|^{-(k+1+\varepsilon)})$. Montrer que la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx},$$

est 2π-périodique et qu'elle est C^k.