Annales des examens et partiels de l'UE 4M068
années 2018, 2017 et 2016

L'examen comporte 3 exercices.
Une très grande attention sera accordée à la qualité de la rédaction.

◇ Préliminaires ◇

(1-) La suite de Fibonnaci $F_0, F_1, F_2, \ldots$ est la suite d'entiers naturels définie par les relations $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(2-) Un graphe G est **biparti** si il existe une bipartition de l'ensemble des sommets de G telle que toute arête de G a une extrémité dans chacune des deux parties de la bipartition.

(3-) Soit G un graphe simple et sans boucles. Un **couplage** de G est un sous-ensemble d'arêtes de G deux à deux non-adjacentes. [Deux arêtes sont adjacentes si elles ont une extrémité commune.] Un couplage **parfait** de G est un couplage de G tel que tout sommet est incident à une arête du couplage.

(4-) Soit $G = (V, E)$ un graphe simple sans boucles.
L'ensemble des arêtes de G incidentes au sommet v est noté $\delta(v)$.
Le vecteur caractéristique de $F \subset E$ est le vecteur $\chi_F \in \mathbb{R}^E$ défini par $\chi_F(e) = 1$ si $e \in F$; 0 sinon.
On note $\mathcal{V}(G)$ l'enveloppe convexe des vecteurs caractéristiques des couplages de G et $\mathcal{H}(G)$ le polyèdre de $\mathbb{R}^E$ défini par le système de contraintes linéaires

$$\begin{cases} x(e) \geq 0 & \text{pour toute arête } e \text{ de } G \\ \sum_{e\in\delta(v)} x(e) \leq 1 & \text{pour tout sommet } v \text{ de } G. \end{cases}$$

On note $\mathcal{V}_\star(G)$ l'enveloppe convexe des vecteurs caractéristiques des couplages parfaits de G et $\mathcal{H}_\star(G)$ le polyèdre de $\mathbb{R}^E$ défini par le système de contraintes linéaires

$$\begin{cases} x(e) \geq 0 & \text{pour toute arête } e \text{ de } G \\ \sum_{e\in\delta(v)} x(e) = 1 & \text{pour tout sommet } v \text{ de } G. \end{cases}$$

(5-) Dans un graphe un **parcours** de longueur $k \geq 0$ est une suite alternée

$$v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots e_k v_k$$

de sommets et d'arêtes de longueur $2k + 1$ où, pour $i \geq 1$, v_{i-1} et v_i sont les extrémités de l'arête e_i. Le sommet v_0 est le **sommet initial** du parcours et v_k est son **sommet terminal.** Le parcours est dit fermé si $v_0 = v_k$. L'inverse du parcours $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots e_k v_k$ est le parcours $v'_0 e'_1 v'_1 e'_2 v'_2 \ldots e'_k v'_k$ avec $v'_i = v_{k-i}$ et $e'_i = e_{k-i+1}$.
Un parcours fermé $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots e_k v_k$ est dit **simple** si les v_i, $0 \leq i \leq k-1$, sont distincts deux à deux.

(6-) Une matrice doublement stochastique est une matrice carré à coefficients réels positifs dont la somme des coefficients de toute ligne et de toute colonne est égale à 1.
Une matrice de permutation est une matrice doublement stochastique à coefficients entiers (nécessairement 0 ou 1).

◇◇

Exercice 1. Quel rapport y a-t-il entre les cycles d'un graphe et ses parcours fermés simples?

Montrer que les cycles d'un graphe G sont de longueurs paires si et seulement si les parcours fermés de G sont de longueurs paires. (Indication : on pourra pour le parcours fermé $v_0e_1v_1e_2\ldots e_kv_k$, $k \geq 1$, considérer une paire ij d'indices qui minimise $j-i$ dans l'ensemble des paires ij, $i<j$, telles que $v_i = v_j$ ... sans oublier de démontrer qu'une telle paire existe.)

Montrer qu'un graphe G d'ordre ≥ 2 est biparti si et seulement si ses cycles sont de longueurs paires. (Indication pour la condition suffisante : on pourra démontrer que deux parcours ayant des extrémités communes ont des longueurs de même parité puis démontrer que la relation binaire "être les extrémités d'un parcours de longueur paire", définie sur l'ensemble des sommets, est une relation d'équivalence dont le nombre de classes d'équivalence est de 2 par composante connexe de G d'ordre ≥ 2.)

Soit G un graphe biparti d'ordre n ayant k composantes connexes. Quel est le nombre de bipartitions de l'ensemble des sommets de G pour lesquelles G est biparti?

Exercice 2. Montrer que le nombre de couplages d'un graphe linéaire d'ordre n est le nombre de Fibonnaci de rang n. Quel est le nombre de couplages d'un graphe cyclique d'ordre n?

Quel est le nombre d'arêtes d'un couplage maximal d'un graphe cyclique d'ordre $n \geq 3$?

Soit $G = (V, E)$ un graphe cyclique d'ordre $2k+1$ et soit x^* le vecteur de $\mathbb{R}^E$ défini par $x^*(e) = 1/2$ pour tout $e \in E$. Montrer que $x^* \in \mathcal{H}(G)$ mais que $x^* \notin \mathcal{V}(G)$.

Exercice 3. Soit $G = (V, E)$ un graphe simple sans boucles.

Question 1.– Montrer que $\mathcal{V}_\star(G) \subset \mathcal{H}_\star(G) \subset [0,1]^E$, que $\mathcal{V}(G) \subset \mathcal{H}(G) \subset [0,1]^E$ et exhiber un simplexe de codimension 0 inclus dans $\mathcal{V}(G)$.

Soit $x \in \mathcal{H}_\star(G)$ et soit F l'ensemble des arêtes e de G telles que $x(e) > 0$.

Question 2.– Sous l'hypothèse "F contient l'ensemble des arêtes d'un cycle C de longueur paire" montrer que C s'écrit $M + N$ où M et N sont des couplages parfaits disjoints de C. En déduire que

- **(1-)** le vecteur $x_\epsilon = x + \epsilon(\chi_M - \chi_N)$ appartient à $\mathcal{H}_\star(G)$ pour $\epsilon \in \mathbb{R}$ assez petit en valeur absolue (on précisera une borne); puis que
- **(2-)** x n'est pas un sommet de $\mathcal{H}_\star(G)$.

Question 3.– Sous l'hypothèse "G est biparti et x est un sommet du polytope $\mathcal{H}_\star(G)$" montrer que F est une forêt puis que F est un couplage parfait.

Question 4.– Déduire des questions précédentes que si G est biparti alors $\mathcal{H}_\star(G) = \mathcal{V}_\star(G)$ puis que toute matrice doublement stochastique est combinaison convexe de matrices de permutation.

Soit G' une copie de G et soit $G^\star$ le graphe obtenu à ajoutant à la somme de G et de G' les arêtes vv' où v décrit V et où v' est la copie de v. On note E'' l'ensemble des arêtes vv' de $G^\star$.

Question 5.– On suppose que G est biparti. Soit $x \in \mathcal{H}(G)$, soit x' la copie de x relativement à G' et soit $y \in \mathbb{R}^{E''}$ défini par $y(vv') = 1 - \sum_{e \in \delta(v)} x(e)$. Montrer que $G^\star$ est biparti et que le vecteur $(x, x', y) \in \mathbb{R}^{E+E'+E''}$ appartient à $\mathcal{H}_\star(G^\star)$. En déduire que $x \in \mathcal{V}(G)$.

Question 6.– Montrer que G est biparti si et seulement si $\mathcal{V}(G) = \mathcal{H}(G)$. (Indication : on pourra utiliser l'exercice 2.)

L'examen comporte 4 exercices.
Une très grande attention sera accordée à la qualité de la rédaction.

$\diamond$ Préliminaires $\diamond$

(1-) Une **partition** d'un ensemble non vide E est un ensemble de parties non vides de E, d'intersection deux à deux vide et d'union E.

(2-) Soit P un ensemble fini non vide muni d'un ordre partiel $\leq$.
Une **chaine** de P est un ensemble non vide d'éléments de P deux à deux comparables.
Une **décomposition** de P est une partition de P dont les éléments sont des chaines. Par exemple l'ensemble des singletons de P est une décomposition de P. Noter que tout ensemble de chaines disjointes deux à deux peut être complété en un décomposition de P en ajoutant des singletons (✍).
Une **antichaine** de P est un ensemble d'éléments de P deux à deux non comparables. Noter également que l'intersection d'une chaine et d'une antichaine est soit vide soit un singleton (✍).

(3-) Un **graphe** est une paire (V, E) où V est un ensemble fini non vide et où E est un sous-ensemble de l'ensemble des parties à deux éléments de V.

$\diamond\diamond$

Exercice 1. Montrer que l'affinisé du vectorialisé en un point d'un espace affine est isomorphe à cet espace affine.

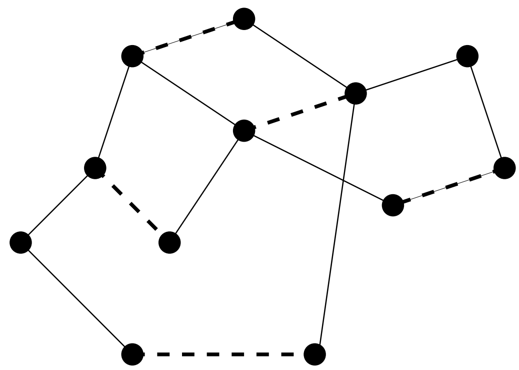
Exercice 2. Soit G un graphe, M un couplage de G et C un chemin de G de longueur (son nombre d'arêtes) $m \geq 0$.

Le chemin C est dit M-augmentant si (1) m est impair, (2) aucune des extémités de C n'est couverte par M et (3) le cardinal de l'ensemble des arêtes de C appartenant à M est $(m-1)/2$.

Question 1.– Montrer que si C est M-augmentant alors M', la différence symétrique ensembliste entre M et l'ensemble des arêtes de C, est un couplage. Dans ce dernier cas quel est le cardinal de M' en fonction du cardinal de M?

Question 2.– Montrer que M est de cardinalité maximale si et seulement si il n'existe pas de chemin M-augmentant.

Question 3.– Utiliser les questions précédentes pour montrer que le couplage, indiqué en pointillé, du graphe dessiné ci-dessous n'est pas de cardinalité maximale, puis pour le modifier



afin d'obtenir un couplage de cardinalité maximale.

Exercice 3. Soit P un ensemble fini muni d'un ordre partiel. Montrer que le nombre minimal d'antichaines d'union P est le cardinal maximal d'une chaine. (Indication : introduire pour tout entier naturel i l'ensemble A_i des éléments de P de hauteur i où la hauteur d'un élément s de P est définie comme étant le cardinal maximal d'une chaine d'élément maximal s.)

Exercice 4. Soit $P = \{1, 2, \ldots, n\}$ muni d'un ordre partiel $\preceq$ et soit G le graphe biparti de bipartition $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, et d'arêtes les $a_i b_j$ tels que $i \prec j$.

Question 1.– Montrer que pour tout couplage J de G il existe une décomposition D de P telle que $|J| + |D| = n$. (Indication : on pourra montrer que les $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, $k \geq 2$, maximaux pour l'inclusion, tels que $a_{i_1} b_{i_2} \in J, a_{i_2} b_{i_3} \in J, \ldots, a_{i_{k-1}} b_{i_k} \in J$ sont des chaines disjointes deux à deux.)

Question 2.– Montrer que pour tout transversal C de G, minimal pour la relation d'inclusion, il existe une antichaine U de P telle que $|C| + |U| = n$ (Indication : on pourra montrer que les ensembles $I = \{i \mid a_i \in C\}$ et $J = \{j \mid b_j \in C\}$ sont disjoints et introduire $P - (I + J)$.)

Question 3.– En déduire (en utilisant le théorème de König) le théorème de Dilworth : le cardinal minimal d'une décomposition est égal au cardinal maximal d'une antichaine.

L'examen comporte 5 exercices.
Une très grande attention sera accordée à la qualité de la rédaction.

$\diamondsuit$ Terminologie des ensembles partiellement ordonnés, epos en abrégé $\diamondsuit$

(1-) Un epo est un ensemble d'éléments muni d'une relation d'ordre partiel $\prec$.
(2-) Un epo est borné si il admet un plus petit élément $\hat{0}$ et un plus grand élément $\hat{1}$.
(3-) Les atomes d'un epo borné sont les éléments minimaux de l'epo privé de $\hat{0}$.
(4-) Les co-atomes d'un epo borné sont les éléments maximaux de l'epo privé de $\hat{1}$.
(5-) Une chaîne d'un epo est un sous-ensemble fini d'éléments totalement ordonné par $\prec$; sa longueur est sa cardinalité moins 1.
(6-) Un epo borné est (finiment) gradué si ses chaînes sont de longueurs uniformément bornées et si ses chaines maximales sont toutes de même longueur; dans ce cas la hauteur $h(x)$ d'un élément x est la longueur des chaines maximales de l'intervalle d'extrémités $\hat{0}$ et x (où comme d'usage l'intervalle d'extrémités les éléments $x \prec y$ d'un epo est l'ensemble des z tels que $x \prec z \prec y$).
(7-) Un treillis est un epo tel que toute paire a, b d'éléments admet un plus grand minorant, noté $a \wedge b$, et un plus petit majorant, noté $a \vee b$. Un treillis borné est atomique si tout élément du treillis est le plus petit majorant d'un ensemble fini d'atomes. Un treillis borné est co-atomique si tout élément du treillis est le plus grand minorant d'un ensemble fini de co-atomes.
(8-) Un treillis géométrique est un treillis borné, gradué, atomique et dont la fonction hauteur h est sous-modulaire :

$$h(x) + h(y) \geq h(x \vee y) + h(x \wedge y)$$

$\diamondsuit\diamondsuit$

Exercice 1. Montrer que l'ensemble partiellement ordonné par inclusion des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension fini est un treillis géométrique. (On précisera les lois internes associées et la fonction hauteur.) Est-il co-atomique?

Exercice 2. Soit $e_1, e_2, \ldots, e_n$ une base de $\mathbb{R}^n$. Montrer que le cône $\mathbb{R}^n$ est engendré par les $n+1$ vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_n, e_{n+1}$ où $e_{n+1} = -\sum_1^n e_i$.

Exercice 3. Soit P un polytope, soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des facettes de P et soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des sommets de P. Montrer que le treillis des faces de P ne dépend que de la relation d'incidence sommet-facette, i.e., l'ensemble des paires $(v, \sigma) \in \mathcal{V} \times \mathcal{F}$ telles que $v \in \sigma$.

Exercice 4. Soit Q l'enveloppe convexe des 7 points de paramètres $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ de la courbe des moments γ de $\mathbb{R}^5$. Quel est le nom d'un tel polytope? Quelle est la dimension de Q? Quels sont ses sommets? Quel est le nombre de simplexes de dimension 4 dont les sommets sont des sommets de Q? Combien parmi ces simplexes sont des facettes de Q? Donner deux exemples de quintuplets de sommets de Q dont les enveloppes convexes ne sont pas (resp. sont) des facettes de Q.

Exercice 5. Soit M un matroide sur E de fonction rang r.

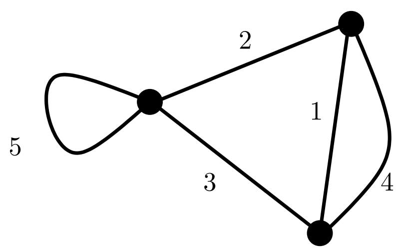
Question 1.– Soient $A, X, Y \in \mathcal{P}(E)$ avec $A \subset X$ et $A \subset Y$. Montrer que si $r(X) = r(Y) = r(A)$ alors $r(X+Y) = r(A)$. En déduire que pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$ l'ensemble $\mathcal{F}_A$ des $X \supset A$ tels que $r(X) = r(A)$ vérifie les propriétés suivantes

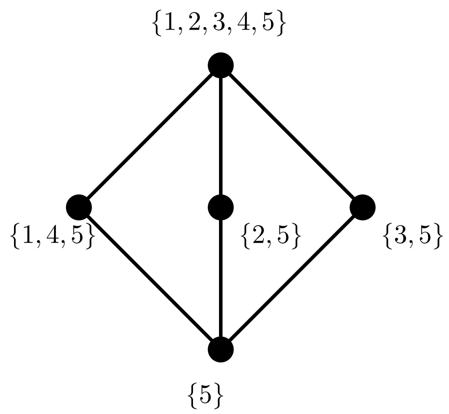
(1-) $\bigcup \mathcal{F}_A \in \mathcal{F}_A$;
(2-) $\mathcal{F}_A = \{X \in \mathcal{P}(E) \mid A \subset X \subset \bigcup \mathcal{F}_A\}$;
(3-) $\bigcup \mathcal{F}_A = \{x \in E \mid r(A+x) = r(A)\}$.

La fonction **clôture** de M est l'application $\sigma : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ qui associe à A le plus grand (pour la relation d'inclusion) sur-ensemble X de A tel que $r(X) = r(A)$.

Les **fermés** de M sont les $\sigma(A)$, $A \in \mathcal{P}(E)$.

Par exemple les fermés du matroide des circuits du graphe dessiné ci-dessous à gauche sont les ensembles : $\{5\}$, $\{1,4,5\}$, $\{2,5\}$, $\{3,5\}$ et $\{1,2,3,4,5\}$.





Question 2.– Expliquer pourquoi la fonction clôture est bien définie et montrer que pour tous $X, Y \in \mathcal{P}(E)$ et tous $x, y \in E$ on a

(1-) $X \subset \sigma(X)$;
(2-) $X \subset Y \implies \sigma(X) \subset \sigma(Y)$;
(3-) $\sigma(X) = \sigma(\sigma(X))$;
(4-) $y \in \sigma(X+x) - \sigma(X) \implies x \in \sigma(X+y) - \sigma(X)$.

Question 3.– Montrer que l'ensemble des fermés de M ordonné par inclusion est un treillis géométrique fini de loi internes $F \wedge G = F \cap G$, $F \vee G = \sigma(F+G)$ et de fonction hauteur $h(X) = r(X)$. Réciproquement montrer que tout treillis géométrique fini est isomorphe à l'ensemble ordonné par inclusion des fermés d'un matroide.

Question 4.– Montrer que toute application $\sigma : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ vérifiant les quatres assertions de la deuxième question est la fonction clôture d'un matroide sur E.

L'examen comporte 5 exercices. Les exercices 2, 3, 4 et 5 sont connexes.
Une très grande attention sera accordée à la qualité de la rédaction.

◇ Rappels et notations ◇

(1-) $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega(n)$ un ensemble de symboles d'opérateurs.

(2-) X un ensemble de variables.

(3-) $W(\Omega, X)$ l'ensemble des mots sur $\Omega(0) \cup X$ muni de sa structure naturelle de Ω-algèbre universelle, i.e., $\omega(w_1, w_2, \dots, w_n) = \omega w_1 w_2 \dots w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $\omega \in \Omega(n)$ et tout $w_1, w_2, \dots, w_n \in W(\Omega, X)$.
Rappelons que la valence d'un mot de $W(\Omega, X)$ est la somme des valences des lettres qui le composent, la valence d'une lettre étant égale à 1 si la lettre est une variable; $1 - n$ si la lettre est un symbole d'opérateur d'arité n.

(4-) $F(\Omega, X)$ est la sous-algèbre de $W(\Omega, X)$ engendrée par $\Omega(0) \cup X$.

Theorem 1. *Soit $w \in W(\Omega, X)$. Alors $w \in F(\Omega, X)$ si et seulement si sa valence est 1 et la valence de tout facteur droit de w est strictement positive. Le sous-ensemble de $F(\Omega, X)$ des éléments de longueur 1 est $X \cup \Omega(0)$. Si $w \in F(\Omega, X)$ est de longueur > 1, alors w commence avec un $\omega \in \Omega(n)$, $n \geq 1$, et w s'écrit de manière unique sous la forme $\omega w_1 w_2 \cdots w_n$ avec $w_i \in F(\Omega, X)$.* □

(5-) $F(\Omega) = F(\Omega, \varnothing)$.

(6-) E est un ensemble fini à $n \geq 1$ éléments.

(7-) $\mathbb{R}^E$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de E dans $\mathbb{R}$.

(8-) La base canonique de $\mathbb{R}^E$ est la famille des vecteurs caractéristiques χ^e des éléments e de E, i.e.,

$$\chi^e(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } f = e; \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les coordonnées de $w \in \mathbb{R}^E$ dans la base des χ^e est la famille des $w(e)$:

$$w = \sum_{e\in E} w(e)\chi^e.$$

(9-) Pour $X \subset E$, le vecteur caractéristique de X est le vecteur $\chi^X \in \mathbb{R}^E$ défini par

$$\chi^X(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } e \in X; \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Notez que $\chi^X = \sum_{e\in X} \chi^e$.

(10-) Soit $w \in \mathbb{R}^E$. Pour $X \subset E$ on pose $w(X) = \sum_{e\in X} w(e)$.

(11-) Soit M un matroide sur E de fonction rang rg. Nous rappelons que pour tout $X \subset E$ et tout $e \in E$:

(a) X est un indépendant si et seulement si $\mathrm{rg}(X) = |X|$; et

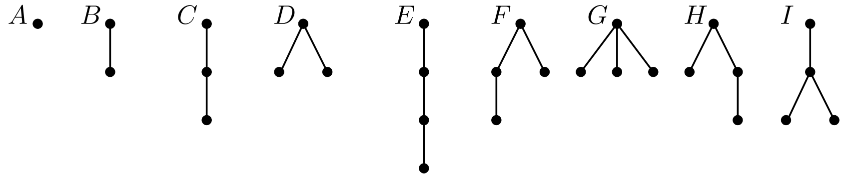
(b) $\mathrm{rg}(X + e) = \mathrm{rg}(J + e)$ pour tout indépendant J inclus dans X de cardinalité le rang de X.

(12-) Nous rappelons que le matroide des circuits d'un graphe est le matroide sur l'ensemble des arêtes du graphe dont les indépendants sont les ensembles d'arêtes des forêts du graphe.

◇◇

Exercice 1. Soit $\mathcal{T} = F(\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots\})$ où ω_i est d'arité i, soit $\oplus$ l'opérateur binaire sur $\mathcal{T}$ défini par $u \oplus v = \omega_{n+1}\tau_1 \ldots \tau_n v$ où $u = \omega_n \tau_1 \ldots \tau_n$ avec $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \in \mathcal{T}$ et $n \geq 0$ (avec la convention habituelle $\tau_1 \ldots \tau_0 = 1$, le mot vide) et soit $\mathcal{A} = F(\{\omega_0, \omega_2\})$.

Question 1.– Montrer que l'opérateur $\oplus$ est bien défini, d'image $\mathcal{T} - \{\omega_0\}$ et injectif. En déduire une application bijective de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{A}$. Calculer les images par cette application bijective des termes représentatifs des arbres ordonnés d'ordre au plus 4 et dessiner les arbres binaires que ces images représentent.
Pour mémoire nous rappelons que la liste des arbres ordonnés d'ordre au plus 4 est la suivante



Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des termes de $\mathcal{A}$ de la forme $\omega_2 \tau \omega_0$, $\tau \in \mathcal{A}$.

Question 2.– Montrer que $\omega_0\omega_0$ est facteur droit de tout terme de $\mathcal{B}$.

Soit $\otimes$ l'opérateur binaire sur $\mathcal{B}$ défini par $u \otimes v = w$ où w est le terme obtenu à partir de u en substituant à l'avant dernière occurence du symbole ω_0 dans u le terme v. Par exemple si $u = \omega_2\omega_2\omega_0\omega_0\omega_2\omega_0\omega_0$ et $v = \omega_2\omega_0\omega_0$ alors $u \otimes v = \omega_2\omega_2\omega_0\omega_0\omega_2\omega_2\omega_0\omega_0\omega_0$.

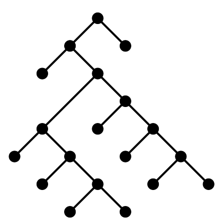
Question 3.– Montrer que l'opérateur $\otimes$ est bien défini et injectif. Quelle est son image?

Soit Φ l'application de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{B}$ définie récursivement par

$$\Phi(w) = \begin{cases} \omega_2\omega_0\omega_0 & \text{si } w = \omega_0; \\ \Phi(u) \otimes \Phi(v) & \text{si } w = u \oplus v. \end{cases}$$

Question 4.– Montrer par récurrence sur la longueur de w que $\Phi(w)$ est bien définie, calculer les images par Φ des termes représentatifs des arbres ordonnés d'ordre au plus 4, et dessiner les arbres binaires que ces images représentent.

Question 5.– Montrer que Φ est bijective. Donner une définition récursive de l'inverse de Φ similaire à la définition récursive de Φ. Calculer l'image réciproque par Φ du terme représentatif de l'arbre binaire suivant



Exercice 2. Soit $G = (V, E, \varphi)$ le graphe défini par $V = \{1, 2, 3\}$, $E = \{a, b, c, d\}$, et $\varphi(a) = \{1, 2\}$, $\varphi(b) = \{2, 3\}$, $\varphi(c) = \{1, 3\}$, $\varphi(d) = \{1\}$.

Faire un dessin de G. Quels sont les indépendants du matroide des circuits de G? Quel est le rang de ce matroide? Quels sont les rangs des parties $\varnothing$, $\{d\}$ et $\{a, b, c\}$?

Exercice 3. Soit $w \in \mathbb{R}^E$ et soit $e_1, e_2, \ldots, e_n$ une énumération des éléments de E. Posons

$$U_i = \{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$$

pour $i = 0, 1, \ldots, n$. En particulier $U_0 = \varnothing$.

Montrer que $w = \sum_{i=1}^n \lambda_i^w \chi^{U_i}$ où $\lambda_i^w = w(e_i) - w(e_{i+1})$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$, et $\lambda_n^w = w(e_n)$. (En d'autres termes la famille des χ^{U_i}, $i \in [\![n]\!]$, est une base de $\mathbb{R}^E$ et les coordonnées dans cette base du vecteur w sont les λ_i^w.) En déduire que pour tout $X \subset E$

$$w(X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^w |U_i \cap X|.$$

Exercice 4. Soit $w \in \mathbb{R}^E$ et soit M un matroide sur E de rang r et de fonction rang $\mathrm{rg}()$. Pour tout $e \in E$ la **valuation** de e est $w(e)$ et pour tout $X \subset E$ la **valuation** de X est $w(X)$.

Une **base gloutonne** de M est une base de M dont une énumération des éléments $b_1, b_2, \ldots, b_r$ est défini inductivement par

$$b_i \in \operatorname{argmax}\{w(e) : e \notin \{b_1, b_2, \ldots, b_{i-1}\}, \{b_1, b_2, \ldots, b_{i-1}, e\} \text{ est un indépendant}\}.$$

Une telle énumération est dite **gloutonne**.

Question 1.– Soit $b_1, b_2, \ldots, b_r$ une énumération gloutonne des éléments d'une base gloutonne de M et soit $e_1, e_2, \ldots, e_r$ une énumération des éléments d'une base de M suivant les valeurs décroissantes de leurs valuations, i.e., $w(e_1) \geq w(e_2) \geq \cdots \geq w(e_r)$. Montrer que pour tout i on a $w(b_i) \geq w(e_i)$. En déduire que les bases gloutonnes sont exactement les bases de valuation maximale.

Question 2.– Soit $e_1, e_2, \ldots, e_n$ une énumération des éléments de E selon les valeurs décroissantes de leurs valuations, i.e., $w(e_1) \geq w(e_2) \geq \cdots \geq w(e_n)$. Posons

$$U_i = \{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$$

pour $i = 0, 1, \ldots, n$, et

$$I = \{e_i \mid \mathrm{rg}(U_i) > \mathrm{rg}(U_{i-1})\}.$$

Montrer que

(1-) I est une base gloutonne;
(2-) $w(I) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^w \,\mathrm{rg}(U_i)$ où $\lambda_i^w = w(e_i) - w(e_{i+1})$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$, et $\lambda_n^w = w(e_n)$;

Exercice 5. Soit $M = (E, \mathcal{J})$ un matroide de rang r et de fonction rang $\mathrm{rg}()$. Soit P_M l'enveloppe convexe dans $\mathbb{R}^E$ des vecteurs caractéristiques des éléments de $\mathcal{J}$.

Le but de l'exercice est de montrer que P_M est l'ensemble des solutions du système d'inéquations linéaires d'inconnue $x \in \mathbb{R}^E$ suivant

$$(**) \quad \begin{cases} \sum_{e \in E} I(e,X)x(e) & \leq & \mathrm{rg}(X) & (\forall X \in \mathcal{P}(E)) \\ x(e) & \geq & 0 & (\forall e \in E) \end{cases}$$

où $I(e,X) = 1$ si $e \in X$; 0 sinon.

Soit Q_M le polyèdre défini par le système $(**)$.

Question 1.– Dessiner en perspective le polytope P_M, expliciter les inéquations de $(**)$, donner une $\mathcal{H}$-présentation minimale de Q_M et vérifier ainsi que $P_M = Q_M$ dans le cas particulier où M est le matroide des circuits d'un graphe cyclique sur 3 sommets.

Question 2.– Montrer que

(1-) $P_M \subset Q_M \subset [0,1]^E$;
(2-) $\mathrm{Vert}(P_M) = \{\chi^J \mid J \in \mathcal{J}\}$ et $\mathrm{Vert}(P_M) \subset \mathrm{Vert}(Q_M)$;
(3-) un sommet entier de Q_M est un sommet de P_M.

Soit $w \in \mathbb{R}^E$ à valeurs positives. Introduisons

(1-) le programme linéaire

$$(\mathrm{PL}_w) \quad \begin{cases} \max_{x \in \mathbb{R}^E} & \sum_{e \in E} w(e)x(e) & & & \\ \text{s.c} & \sum_{e \in E} I(e,X)x(e) & \leq & \mathrm{rg}(X) & (\forall X \in \mathcal{P}(E)) \\ & x(e) & \geq & 0 & (\forall e \in E) \end{cases}$$

(2-) le programme linéaire dual (PL_w^*) de (PL_w);
(3-) une énumération $e_1, e_2, \ldots, e_n$ des éléments de M selon les valeurs décroissantes de leurs valuations, i.e., $w(e_1) \geq w(e_2) \geq \cdots \geq w(e_n)$;
(4-) la suite des $U_i = \{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$, $i \in [\![n]\!]$;
(5-) la base gloutonne B associée à cette énumération (cf. Exercice 4);
(6-) $x^* \in \mathbb{R}^E$ le vecteur caractéristique de B;
(7-) $y^* \in \mathbb{R}^{\mathcal{P}(E)}$ le vecteur défini par $y^*(X) = 0$ si X n'est pas l'un des U_i et $y^*(U_i) = \lambda_i^w$ où λ_i^w est la coordonnée d'indice i de w dans la base des $\chi^{U_i}, i \in [\![n]\!]$ (cf. Exercice 3).

Question 3.– Montrer que x^* et y^* sont solutions admissibles des programmes linéaires (PL_w) et (PL_w^*), respectivement.

Question 4.– Montrer que x^* et y^* sont des solutions optimales.

Question 5.– Montrer que $P_M = Q_M$.

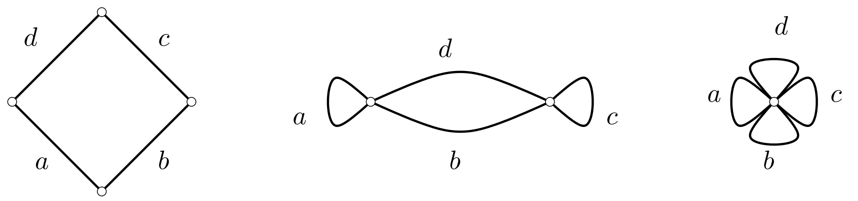
L'examen comporte 3 exercices. Une très grande attention sera accordée à la qualité de la rédaction.

◇ Rappels et notations ◇

(1-) Un **complexe simplicial** Δ sur un ensemble E est un ensemble de parties de E tel que si $\sigma \in \Delta$ et $\tau \subset \sigma$ alors $\tau \in \Delta$. Un complexe simplicial est **pur** si ses éléments maximaux pour la relation d'inclusion ont la même cardinalité.

(2-) Nous rappelons que le matroide des circuits d'un graphe est le matroide sur l'ensemble des arêtes du graphe dont les indépendants sont les ensembles d'arêtes des forêts du graphe.

(3-) Nous rappelons que si G est un graphe et si F est un sous-ensemble de l'ensemble des arêtes de G alors $G\backslash F$ est le graphe obtenu à partir de G en identifiant les extrémités des arêtes de F. Ainsi



G $G\backslash\{a,c\}$ $G\backslash\{a,b,c\}$

◇◇

Exercice 1. Soit G un graphe connexe muni d'une valuation $w : E \to \mathbb{R}$ sur l'ensemble E de ses arêtes. Montrer que les arbres couvrants gloutons de G sont exactement les arbres couvrants de valuation minimale.

Soit G un graphe connexe muni d'une valuation $w : E \to \mathbb{R}$ injective sur l'ensemble E de ses arêtes. Montrer que

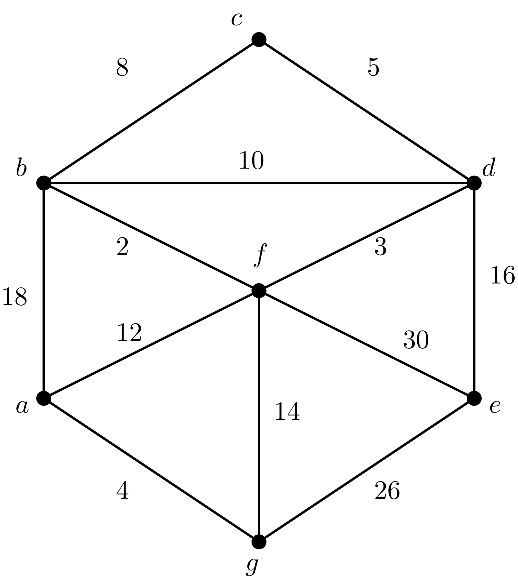
(1-) G admet un unique arbre couvrant de valuation minimale; et que
(2-) pour tout sommet v de G l'arête de valuation minimale dans l'ensemble des arêtes incidentes à v et qui ne sont pas des boucles appartient à l'ensemble des arêtes de l'arbre couvrant de valuation minimale de G.

Pour G graphe connexe muni d'une valuation $w : E \to \mathbb{R}$ injective sur l'ensemble E de ses arêtes on note φ_G l'application qui à tout sommet v de G associe l'arête de valuation minimale dans l'ensemble des arêtes incidentes à v et qui ne sont pas des boucles.

Soit G un graphe connexe muni d'une valuation $w : E \to \mathbb{R}$ injective sur l'ensemble E de ses arêtes. On défnit une suite $E_0, E_1, \ldots$ de parties de E comme suit

(1-) $E_0 = \varphi_{G_0}(V_0)$ où $G_0 = G$ et V_0 est l'ensemble des sommets de G_0; et
(2-) $E_{i+1} = \varphi_{G_{i+1}}(V_{i+1})$ où $G_{i+1} = G_i \backslash E_i$ et V_{i+1} est l'ensemble des sommets de G_{i+1}.

Question 1.– Calculer la suite des G_i, φ_{G_i} et E_i dans le cas où G est le graphe suivant :



Question 2.– "L'union des E_i est l'ensemble des arêtes de l'arbre couvrant de valuation minimale de G": vrai ou faux? (Justifier votre réponse.)

Exercice 2. Soit $G = (V, E, \varphi)$ le graphe défini par $V = \{1, 2, 3\}$, $E = \{a, b, c, d\}$, et $\varphi(a) = \{1, 2\}$, $\varphi(b) = \{2, 3\}$, $\varphi(c) = \{1, 3\}$, $\varphi(d) = \{1\}$.

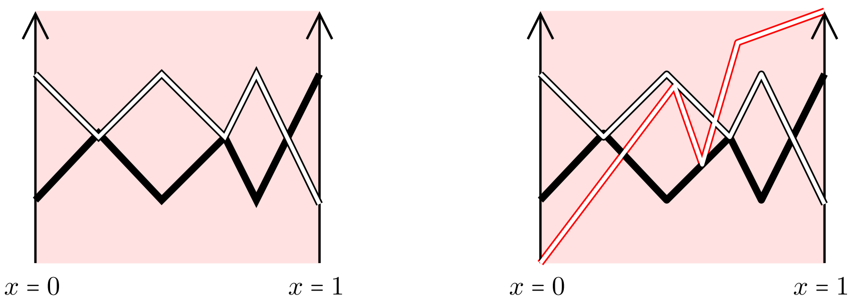
Faire un dessin de G. Quels sont les indépendants du matroide des circuits de G? Quel est le rang de ce matroide? Quels sont les rangs des parties $\varnothing$, $\{d\}$ et $\{a, b, c\}$? Quelles sont les bases du matroide dual?

Exercice 3. Une **pseudodroite** est le graphe $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1]\}$ d'une fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(1) = -f(0)$.

Un **arrangement de pseudodroites** est un ensemble fini Γ de pseudodroites tel que

(1-) l'intersection de toute paire d'éléments distincts de Γ est un ensemble fini de points d'absicces $\neq 0, 1$ formé d'un unique point d'intersection transverse, appelé **point de croisement**, et éventuellement d'un ou de plusieurs points d'intersection non transverse, appelés **points de contact**;

(2-) l'intersection de tout triplet d'éléments distincts de Γ est vide; cf. Fig. 1



(a) (b)

Figure 3: (a) Un arrangement de deux pseudodroites avec deux points de contact et (b) un arrangement de trois pseudodroites avec quatre points de contact

Question 1.– Quel est le nombre de points de croisement d'un arrangement de n pseudodroites?

Le **support** d'un arrangement de pseudodroites Γ est la réunion de ses pseudodroites $\bigcup \Gamma$.

Deux arrangements de pseudodroites Γ et Γ' sont **adjacents** si Γ et Γ' ont le même support et si la différence symétrique de leurs ensembles de points de contact est un ensemble à deux éléments. Dans ce cas l'unique point de contact de Γ qui n'appartient pas à Γ' est noté $M(\Gamma, \Gamma')$.

Soit S le support d'un arrangement de pseudodroites et soit G le graphe dont l'ensemble des sommets est l'ensemble des arrangements de support S et dont l'ensemble des arêtes est l'ensemble des paires d'arrangements adjacents.

Question 2.– Décrire le graphe G lorsque S est le support d'un arrangement de deux pseudodroites dont le nombre de points de contact est $0, 1, 2, 3, \ldots$.

Question 3.– Montrer que le graphe G est régulier. Quel est son degré?

Soit $G^\star$ le graphe orienté obtenu en orientant les arêtes de G selon la règle suivante: l'arête $\{\Gamma, \Gamma'\}$ est orientée de Γ vers Γ' si l'abscisse du point $M(\Gamma, \Gamma')$ est inférieure à l'abscisse du point $M(\Gamma', \Gamma)$.

Question 4.– Montrer que le graphe $G^\star$ est acyclique.

Question 5.– Montrer que le graphe $G^\star$ admet un unique sommet de degré entrant nul, caractérisé par la propriété suivante: l'abscisse du point de croisement de toute paire de pseudodroites est supérieure aux abscisses de leurs points de contact.

Soit S le support d'un arrangement de pseudodroites, soit $a \in [0,1]$ et soit K_a le complexe simplicial des sous-ensembles des ensembles de points de contact d'abscisse $\leq a$ des arrangements de pseudodroites de support S.

Question 6.– Décrire K_a lorsque S est le support d'un arrangement de deux pseudodroites dont le nombre de points de contact est $0, 1, 2, 3, \ldots$.

Question 7.– Montrer que K_a est pur.

L'examen comporte 2 exercices.
Une très grande attention sera accordée à la qualité de la rédaction.

◇ Rappels ◇

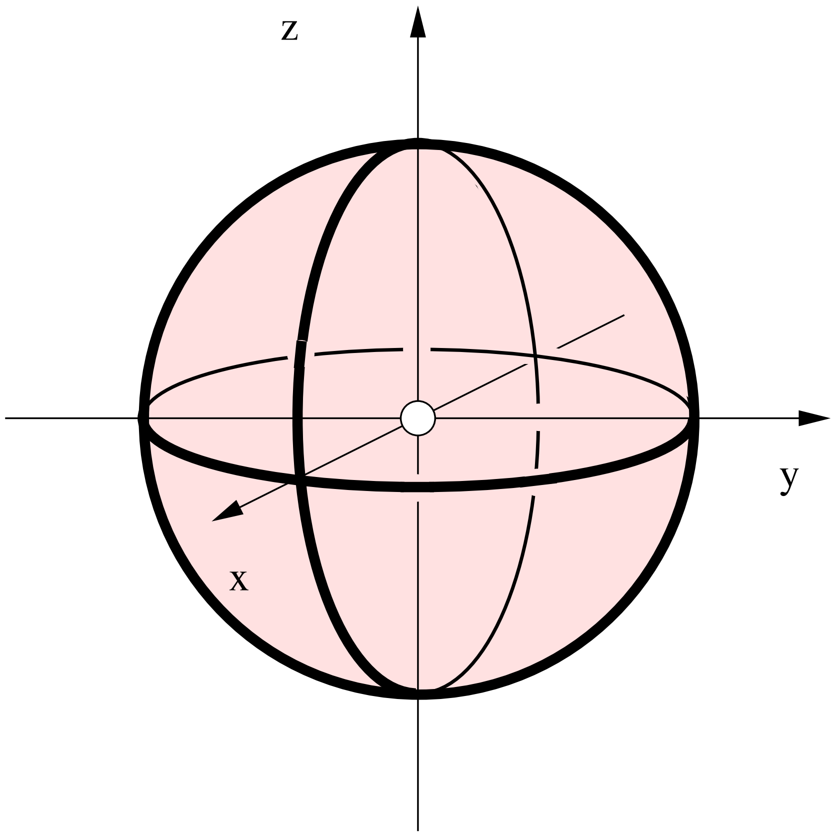
(1-) L'ordre lexicographique $\prec$ sur les suites finies d'entiers naturels est défini de manière récursive comme suit $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \prec (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ si l'une des trois conditions suivantes est vérifiée

(a) $n = 0$ et $m \neq 0$;

(b) $n \neq 0, m \neq 0$ et $x_1 < y_1$;

(c) $n \neq 0, m \neq 0$, $x_1 = y_1$ et $(x_2, \ldots, x_n) \prec (y_2, \ldots, y_m)$

(2-) $\mathbb{S}^2$ est la sphère unité de $\mathbb{R}^3$, i.e., l'ensemble des $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.



(3-) Les nombres s, a et f de sommets, arêtes et faces d'un graphe connexe dessiné sans croisements sur $\mathbb{S}^2$ sont liés par la relation $f - a + s = 2$, dite relation d'Euler.

◇◇

Exercice 1. [**Arrangement de grands cercles**] Un **grand cercle** est l'intersection de la sphère unité $\mathbb{S}^2$ de $\mathbb{R}^3$ et d'un plan de $\mathbb{R}^3$ passant par l'origine $(0,0,0)$ de $\mathbb{R}^3$.

Question 1.– Quel est le nombre de points d'intersections de deux grands cercles? (Inutile de justifier votre réponse.) 1

Un **arrangement** est un ensemble fini d'au moins deux grands cercles.

Soit Γ un arrangement. Comme d'usage $\bigcup\Gamma$ désigne l'union ensembliste des éléments de Γ.

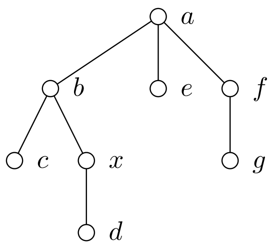
Les **sommets, arêtes** et **faces** de l'arrangement Γ sont, respectivement, les points d'intersection de deux éléments de Γ, les composantes connexes du complémentaire dans $\bigcup\Gamma$ de l'ensemble des sommets de Γ et les composantes connexes du complémentaire dans $\mathbb{S}^2$ de $\bigcup\Gamma$. La **multiplicité** d'un sommet est le nombre d'éléments de Γ auxquels le sommet appartient et le **degré** d'une face est le nombre d'arêtes incluses dans la frontière de la face. Soit n_i le nombre de sommets de Γ de multiplicité i et soit f_i le nombre de faces de Γ de degré i.

Question 2.– On suppose que Γ est l'arrangement défini par les trois plans d'équations $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$. Quels sont les nombres de sommets, d'arêtes et de faces de Γ? Quelles sont les valeurs des n_i et des f_i? Quelle est l'enveloppe convexe des sommets de Γ? Même série de questions avec l'arrangement défini par les trois plans d'équations $x = 0$, $y = 0$ et $x + y = 0$. Enfin même série de questions avec un arrangement de n grands cercles pour lequel $f_2 \neq 0$. (On justifiera ses réponses par de simples dessins.) 9

Question 3.– Exprimer la multiplicité d'un sommet en fonction du degré de ce sommet dans le graphe de sommets les sommets de l'arrangements et d'arêtes les paires de sommets reliés par une arête de l'arrangement. Exprimer $\sum_i in_i$ et $\sum_i if_i$ en fonction du nombre d'arêtes de l'arrangement. Montrer en utilisant la relation d'Euler que $\sum_i(3-i)n_i + \sum_i(3-i)f_i = 6$. Que peux-t-on en déduire sur le nombre de sommets de multiplicité 2? 5

Exercice 2. [**Énumération des arborescences.**] Soit T un arbre ordonné d'ordre n. On note $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ la suite croissante pour l'ordre préfixe des nœuds de T et on introduit la suite d'entiers $(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n)$ où ℓ_k est le nombre de nœuds de l'unique chemin dans l'arbre T joignant le nœud ν_k à sa racine ν_1. L'entier ℓ_k est appelé le **niveau** du nœud ν_k et la suite $(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n)$ est appelée le **chiffre** de T. On notera que le chiffre d'un arbre ordonné ne dépend que de la classe d'isomorphisme de l'arbre ordonné.

Par exemple la suite croissante pour l'ordre préfixe des nœuds de l'arbre ordonné

$T_0 =$ 

est (a, b, c, x, d, e, f, g) et son chiffre est $(1, 2, 3, 3, 4, 2, 2, 3)$.

Question 1.– Montrer que le chiffre d'un arbre ordonné détermine sa classe d'isomorphisme. Dessiner un arbre ordonné de chiffre $(1, 2, 3, 3, 2, 3, 4, 4, 3, 2)$. 4

Une **arborescence** est un arbre orienté dont toutes les arêtes sont orientées vers un même nœud, nœud appelé la racine de l'arborescence. L'arborescence sous-jacente à un arbre ordonné est celle obtenue à partir de l'arbre ordonné en oubliant l'ordre partiel sur les arêtes.

Question 2.– Soit A une arborescence. Quel est le nombre d'arbres ordonnés d'arborescence sous-jacente A en fonction des degrés entrants des nœuds de A? (Votre réponse doit donner 12 dans le cas où A est l'arborescence sous-jacente à T_0.) 4

Le **chiffre** d'une arborescence A est le maximum, pour l'ordre lexicographique sur les suites d'entiers, de l'ensemble des chiffres des arbres ordonnés dont A est l'arborescence sous-jacente.

Question 3.– Calculer le chiffre C_0 de l'arborescence sous-jacente à l'arbre ordonné T_0 et dessiner un arbre ordonné de chiffre C_0. 2

Question 4.– Soit P_n la suite décroissante pour l'ordre lexicographique des chiffres des arborescences d'ordre n. Quel est le premier terme de P_n? Quel est le dernier terme de P_n? Quel est le successeur d'un terme donné de P_n en fonction de ce terme? Indication : Voici des exemples de chiffes et de leurs successeurs

chiffre	successeur
$(1, 2, 3, 2, 2, 2)$	$(1, 2, 2, 2, 2, 2)$
$(1, 2, 3, 4, 2, 2)$	$(1, 2, 3, 3, 3, 3)$
$(1, 2, 3, 4, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$	$(1, 2, 3, 4, 2, 3, 4, 2, 3, 4, 2, 3)$
$(1, 2, 3, 4, 5, 5, 2, 2, 2, 2)$	$(1, 2, 3, 4, 5, 4, 5, 4, 5, 4)$

Cette dernière question demande plus de réflexion : à défaut de trouver la réponse vous ferez état de vos réflexions. 5

L'examen comporte quatres exercices connexes relatifs au permutaèdre. Il est conseillé de traiter les exercices dans l'ordre de l'énoncé : notations et résultats de l'exercice 3 sont réutilisés dans l'exercice 4. On pourra admettre une question pour traiter les suivantes.
La présentation et la clarté des raisonnements seront prises en compte de manière essentielle dans l'appréciation des copies. Pensez à justifier tous vos résultats.

Rappels et notations

(1-) $[\![n]\!] = \{1, 2, \ldots, n\}$.
(2-) $\mathfrak{S}_n$ est l'ensemble des permutations de $[\![n]\!]$.
(3-) Soit E un ensemble fini de cardinalité n.
L'espace vectoriel des applications de E dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathbb{R}^E$. On utilisera la notation indicielle x_e plutôt que la notation fonctionnelle $x(e)$ pour désigner l'image de $e \in E$ par $x \in \mathbb{R}^E$ et on identifiera à l'occasion $\mathbb{R}^E$ avec $\mathbb{R}^n$ moyennant le choix d'une bijection de E dans $[\![n]\!]$. En particulier on identifie $\mathbb{R}^{[\![n]\!]}$ et $\mathbb{R}^n$ via l'application identité de $[\![n]\!]$.
(4-) $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n) = (1, 2, \ldots, n) \in \mathbb{R}^n$.
(5-) Le **permutaèdre** P_n est l'enveloppe convexe des $\vartheta\pi = (\vartheta_{\pi(1)}, \vartheta_{\pi(2)}, \ldots, \vartheta_{\pi(n)})$, $\pi \in \mathfrak{S}_n$.

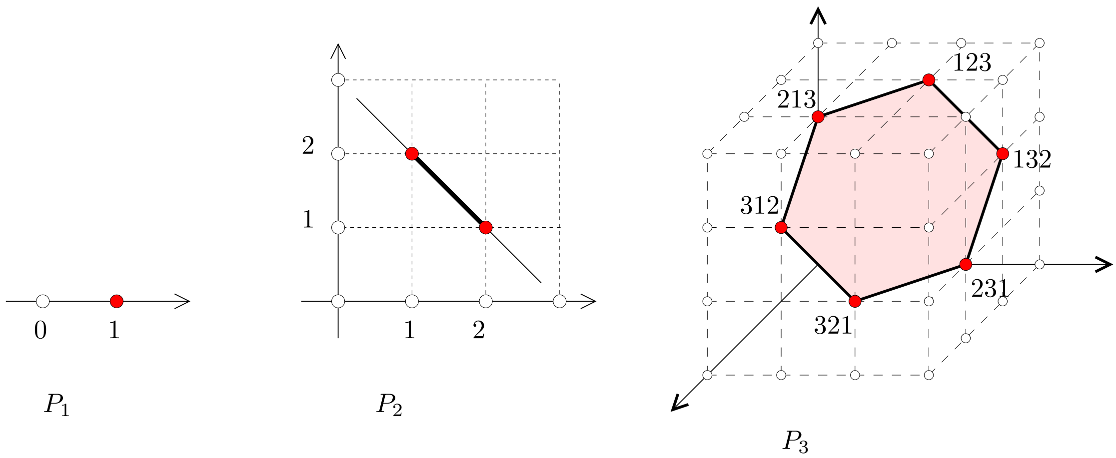


Figure 4: Les permutaèdres P_1, P_2 et P_3.

On admetttra que P_n est un polytope de dimension $n-1$ inclus dans l'hyperplan d'équation

$$\sum_{i \in [\![n]\!]} x_i = \sum_{i \in [\![n]\!]} \vartheta_i = \frac{n(n+1)}{2},$$

que ses sommets sont exactement les $\vartheta\pi$, $\pi \in \mathfrak{S}_n$, et que le système d'équations et d'inéquations

$$\begin{cases} \sum_{i \in [\![n]\!]} x_i = \sum_{i \in [\![n]\!]} \vartheta_i \\ \sum_{i \in A} x_i \geq \sum_{i \in [\![a]\!]} \vartheta_i, \end{cases} \qquad (\star)$$

où a décrit $[\![n-1]\!]$ et où A décrit l'ensemble des sous-ensembles de $[\![n]\!]$ de cardinalité a est une écriture (présentation, formulation) minimale de P_n.

Exercice 1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence sur $[\![n]\!]$ définie par $(i,j) \in \mathcal{R}$ si $x_i = x_j$. Donner une formule pour le cardinal de l'ensemble des $x\pi$, $\pi \in \mathfrak{S}_n$, en fonction des cardinaux p_i des classes d'équivalence de la relation $\mathcal{R}$. Que donne votre formule pour $x = (1,2,3,4)$, $x = (1,1,3,4)$, $x = (1,1,2,2)$ et $x = (1,1,1,1)$?

Exercice 2. Quels sont les nombres de sommets et de facettes du permutaèdre? Le permutaèdre est-il simple?

Exercice 3. Pour $a \in \mathbb{R}^n$ on note $\widehat{a}$ le vecteur croissant des coordonnées de a, i.e., il existe $\pi \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\widehat{a} = a\pi$ et $\widehat{a}_1 \le \widehat{a}_2 \le \cdots \le \widehat{a}_n$.

Soient $a, b \in \mathbb{R}^n$. On dit que a **majore** b et on écrit $a \ge b$ si pour tout $j \in [\![n]\!]$

$$\sum_{i \in [\![j]\!]} \widehat{a}_i \ge \sum_{i \in [\![j]\!]} \widehat{b}_i$$

avec égalité pour $j = n$, i.e., $\sum_{i \in [\![n]\!]} \widehat{a}_i = \sum_{i \in [\![n]\!]} \widehat{b}_i$.

Question 1.– Montrer que la relation $\ge$ est transitive. Est-elle antisymétrique?

Question 2.– Montrer que le permutaèdre P_n est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^n$ qui majore ϑ :

$$P_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \ge \vartheta\}.$$

Question 3.– Soit $a \in \mathbb{R}^n$, soient $i, j \in [\![n]\!]$, $i \ne j$, et soient $u, v \in \mathbb{R}$ tels que $u \le \min\{a_i, a_j\}$, $v \ge \max\{a_i, a_j\}$ et $u + v = a_i + a_j$. Montrer que a majore le vecteur b défini par

$$b_k = \begin{cases} u & \text{si } k = i; \\ v & \text{si } k = j; \\ a_k & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 4. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Le **comparateur** C_{ij}, $i, j \in [\![n]\!]$, $i < j$, est l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ qui associe au vecteur $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ le vecteur $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ défini par

$$y_k = \begin{cases} \min\{x_i, x_j\} & \text{si } k = i; \\ \max\{x_i, x_j\} & \text{si } k = j; \\ x_k & \text{sinon.} \end{cases}$$

En d'autres termes y est obtenu à partir de x en substituant aux coefficients d'indices i et j de x les scalaires $\min\{x_i, x_j\}$ et $\max\{x_i, x_j\}$.

Un **réseau de comparateurs** est un suite finie de comparateurs.

A tout réseau $\mathrm{C}_{u_1v_1}, \ldots, \mathrm{C}_{u_kv_k}$ de k comparateurs est associé un dessin de graphe dans le plan constitué de n segments horizontaux, appelés **canaux**, d'extrémités les points $P_i = (0, n-i+1)$ et $Q_i = (k+1, n-i+1)$ pour i variant de 1 à n et de k segments verticaux orientés vers le bas, appelés **comparateurs**, d'extrémités les points d'intersection m_i et M_i des droites verticales d'équations $x = i$ et des canaux d'extrémités gauches les points P_{u_i} et P_{v_i} pour i variant de 1 à k, cf. Figure 5. Les points m_i et M_i décomposent alors les canaux en $n + 2k$ segments appelés **fils**. Nous utiliserons les notations suivantes pour désigner les fils en fonction de leurs extrémités gauches ou droites

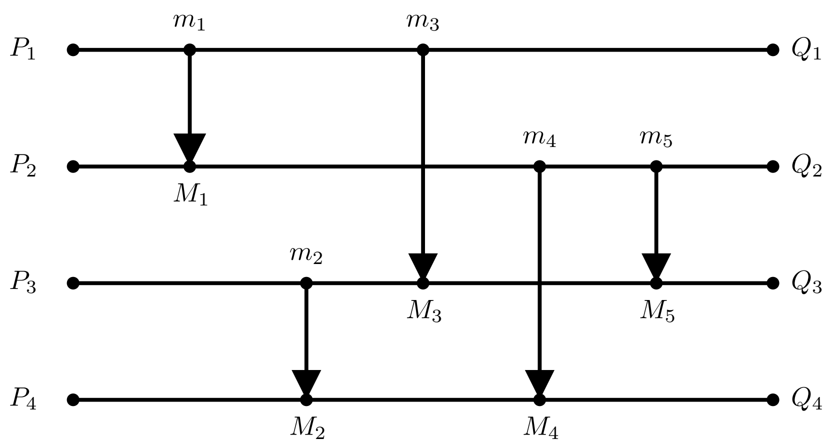


Figure 5: Dessin du réseau de comparateurs $\mathrm{C}_{12}, \mathrm{C}_{34}, \mathrm{C}_{13}, \mathrm{C}_{24}, \mathrm{C}_{23}$

(1-) $\lambda(i)$ pour le fil d'extrémité gauche le point P_i;
(2-) $\mu(i)$ pour le fil d'extrémité droite le point Q_i;
(3-) $\alpha(i)$ et $\beta(i)$ pour les fils d'extrémités droites les points m_i et M_i; et
(4-) $\gamma(i)$ et $\delta(i)$ pour ceux d'extrémités gauches les points m_i et M_i; cf. Figure 6.

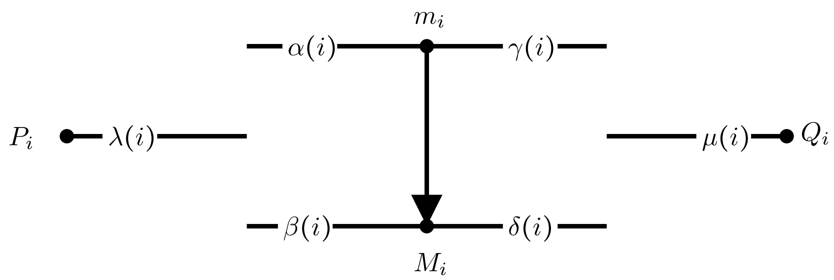


Figure 6: Fils d'extrémités les points m_i, M_i, P_i et Q_i

L'ensemble des fils du réseau $\mathcal{R}$ est noté $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}$. Finalement nous désignons par $p_{\mathcal{R}}$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^{\mathcal{F}_{\mathcal{R}}}$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par $p_{\mathcal{R}}(x) = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ où $y_i = x_{\lambda(i)}$.

Un **réseau de tri** de taille k est un réseau $\mathrm{C}_{u_1v_1}, \mathrm{C}_{u_2v_2}, \ldots, \mathrm{C}_{u_kv_k}$ de k comparateurs tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ le vecteur $\widehat{x}$ est le dernier terme de la suite de $k+1$ vecteurs $(z^0, z^1, \ldots, z^k)$ définie par $z^0 = x$ et la relation de récurrence $z^i = C_{u_iv_i}(z^{i-1})$.

Question 1.– Montrer que le réseau de comparateurs $\mathrm{C}_{12}, \mathrm{C}_{34}, \mathrm{C}_{13}, \mathrm{C}_{24}, \mathrm{C}_{23}$ défini sur $\mathbb{R}^4$ est un réseau de tri.

Soit $\mathcal{R} = (\mathrm{C}_{u_1v_1}, \mathrm{C}_{u_2v_2}, \ldots, \mathrm{C}_{u_kv_k})$ un réseau de $k \geq 0$ comparateurs et soit $\mathcal{Q}_{\mathcal{R}}$ le polyèdre de $\mathbb{R}^{\mathcal{F}_{\mathcal{R}}}$ défini par le système de $n+k$ équations et $2k$ inéquations suivant

$$\left\{\begin{array}{rcll} x_{\mu(i)} & = & i & 1 \leq i \leq n \\ x_{\alpha(i)} + x_{\beta(i)} & = & x_{\gamma(i)} + x_{\delta(i)} & 1 \leq i \leq k \\ x_{\gamma(i)} & \leq & x_{\alpha(i)} & 1 \leq i \leq k \\ x_{\gamma(i)} & \leq & x_{\beta(i)} & 1 \leq i \leq k \end{array}\right. \qquad (\star\star)$$

Question 2.– Montrer que $\mathcal{Q}_{\mathcal{R}}$ est un polytope de dimension k. (Indication : on pourra introduire l'application linéaire qui au vecteur des x_e où e décrit l'ensemble des fils du réseau associe le vecteur des x_e où e décrit l'ensemble des fils d'extrémité droite un point m_i, $i \in [\![n]\!]$.)

Soit $x \in \mathcal{Q}_{\mathcal{R}}$. On définit une suite $(y^0, y^1, \dots, y^k)$ de $k+1$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$ par les relations $y^0 = p_{\mathcal{R}}(x)$ et y^{i+1} est obtenu à partir de y^i en substituant aux cœfficients d'indices u_i et v_i de y^i les scalaires $x_{\gamma(i)}$ et $x_{\delta(i)}$, i.e., pour tout $\ell \in [\![n]\!]$

$$y_\ell^{i+1} = \begin{cases} x_{\gamma(i)} & \text{si } \ell = u_i; \\ x_{\delta(i)} & \text{si } \ell = v_i; \\ y_\ell^i & \text{sinon.} \end{cases}$$

Question 3.– Calculer y^k et montrer que $y^i \geq y^{i+1}$ pour tout $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$. En déduire que $p_{\mathcal{R}}(\mathcal{Q}_{\mathcal{R}}) \subseteq P_n$.

Question 4.– On suppose maintenant que $\mathcal{R}$ est un réseau de tri. Montrer que pour tout sommet v de P_n il existe un point w de $\mathcal{Q}_{\mathcal{R}}$ tel que $p_{\mathcal{R}}(w) = v$. En déduire que $P_n = p_{\mathcal{R}}(\mathcal{Q}_{\mathcal{R}})$. Quel est l'intérêt, selon vous, de cette égalité quant à la résolution d'un programme linéaire sur le domaine P_n?

On suppose maintenant que $\mathcal{R}$ est le réseau de tri C_{12}, C_{23}, C_{12} défini sur $\mathbb{R}^3$. On utilise les entiers de 1 à 9, comme indiqué dans le dessin ci-dessous, pour désigner les fils de $\mathcal{R}$ et on introduit l'application affine f de $\mathbb{R}^{\mathcal{F}_{\mathcal{R}}} = \mathbb{R}^9$ dans $\mathbb{R}^3$ qui associe à $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9)$ le vecteur $y = (y_1, y_2, y_3)$ défini par

$$\begin{cases} y_1 = x_5 - 1 \\ y_2 = x_2 - 1 \\ y_3 = x_6 - 1. \end{cases}$$

On note g la restriction de f à l'enveloppe affine de $\mathcal{Q}_{\mathcal{R}}$.

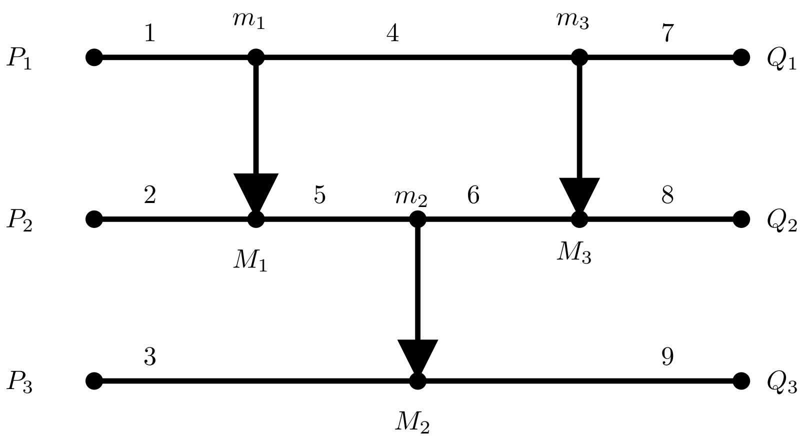


Figure 7: Dessin du réseau de tri $\mathrm{C}_{12}, \mathrm{C}_{23}, \mathrm{C}_{12}$.

Question 5.– Montrer que g est bijective. Déterminer les sommets, les arêtes et les faces du polytope $g(\mathcal{Q}_{\mathcal{R}})$ (on pourra simplement le dessiner en perspective cavalière en précisant les coordonnées de ses sommets et les équations des plans de ses facettes). Déterminer les images des sommets, arêtes et faces de $g(\mathcal{Q}_{\mathcal{R}})$ dans P_3 par la composée de g^{-1} et $p_{\mathcal{R}}$.

L'examen comporte cinq exercices. Les exercices 2 et 3 sont connexes.
La présentation et la clarté des raisonnements seront prises en compte de manière essentielle dans l'appréciation des copies. Pensez à justifier tous vos résultats.

Rappels et notations

(1-) $[\![n]\!] = \{1, 2, \ldots, n\}$.
(2-) $\mathfrak{S}_n$ est l'ensemble des permutations de $[\![n]\!]$.
(3-) $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n) = (1, 2, \ldots, n) \in \mathbb{R}^n$.
(4-) Le **permutaèdre** P_n est l'enveloppe convexe des $\vartheta\pi = (\vartheta_{\pi(1)}, \vartheta_{\pi(2)}, \ldots, \vartheta_{\pi(n)})$, $\pi \in \mathfrak{S}_n$.
(5-) La base canonique du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est la famille des $e_i = (\delta_i^1, \delta_i^2, \ldots, \delta_i^n)$, $i \in [\![n]\!]$, où $\delta_i^j = 1$ si $i = j$; 0 sinon.
La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est ordonnée selon les valeurs croissantes de l'indice i.
(6-) La base canonique du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrés d'ordre n est la famille des $E_{ij} = [\delta_{ij}^{kl}]$, $i, j \in [\![n]\!]$, où $\delta_{ij}^{kl} = 1$ si $i = k$ et $j = l$; 0 sinon.
La base canonique de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est ordonnée selon les valeurs croissantes des indices pour l'ordre lexicographique : $E_{ij} \leq E_{i'j'}$ si $i < i'$ ou si $i = i'$ et $j \leq j'$. Le rang de la matrice E_{ij} est alors le cardinal de l'ensemble des $E_{i'j'}$ tels que $E_{i'j'} \leq E_{ij}$. Ainsi E_{11} est de rang 1, E_{12} est de rang 2, etc.
(7-) Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions respectives n et p.
Soient $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base ordonnée de E, $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ une base ordonnée de F et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$.
La **matrice associée à φ dans les bases ordonnées** (e_i) **et** (f_j) est la (p, n)-matrice $M(\varphi) = [a_{ij}]_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n}$ à cœfficients dans $\mathbb{R}$, où a_{ij} est la coordonnée d'indice i de $\varphi(e_j)$ dans la base (f_i) :

$$\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} f_i.$$

Lorsque $E = F$ et $(f_i) = (e_i)$, $M(\varphi)$ est appelée la matrice de l'endomorphisme φ **dans la base** (e_i).

Exercice 1. Une permutation π de $[\![n]\!]$ est **connexe** si il n'existe pas d'entier $1 \leq k < n$ tel que $\pi([\![k]\!]) = [\![k]\!]$. Quelles sont les permutations connexes de $[\![n]\!]$ pour $n = 1$, 2 et 3? On note c_n le nombre de permutations connexes de $[\![n]\!]$. Quelles sont les valeurs de c_1, c_2 et c_3? Donner une preuve bijective de l'identité

$$\sum_{i=1}^{n} c_i (n - i)! = n!$$

(on explicitera la bijection dans les cas particuliers $n = 1, 2$ et 3.) En déduire les valeurs de c_4, c_5 et c_6.

Exercice 2. Pour $\pi \in \mathfrak{S}_n$ on note A_π la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ de l'endomorphisme g_π de $\mathbb{R}^n$ qui associe au vecteur $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ le vecteur $x\pi = (x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(n)})$.

Ecrire explicitement la famille des matrices A_π pour $n = 1, 2$ et 3. Montrer que l'ensemble des matrices A_π est exactement l'ensemble des matrices $X = [x_{ij}]$ à cœfficients entiers solutions du système

$$\left\{ \begin{array}{llll} \sum_{j \in [\![n]\!]} & x_{ij} & = & 1 & \quad 1 \leq i \leq n \\ \sum_{i \in [\![n]\!]} & x_{ij} & = & 1 & \quad 1 \leq j \leq n \\ & x_{ij} & \geq & 0 & \quad 1 \leq i, j \leq n \end{array} \right.$$

Exercice 3. Soit f_n l'application linéaire de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^{2n}$ qui associe à la matrice $[a_{ij}]$ le vecteur $(y_1, \ldots, y_{2n})$ défini par

$$y_k = \begin{cases} \sum_{j \in [\![n]\!]} a_{kj} & \text{si } k \in [\![n]\!] \\ \sum_{i \in [\![n]\!]} a_{i,k-n} & \text{sinon,} \end{cases}$$

et soit $\Omega_n = [\omega_{ij}]$ la matrice associée à f_n dans les bases canoniques de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^{2n}$.

Question 1.– Soit E_{ab} la matrice de rang k dans la base canonique ordonnée de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Exprimer k en fonction de a, b et n. Exprimer a et b en fonction du quotient et du reste de la division euclidienne de $k-1$ par n. Calculer ω_{ij}.

Question 2.– Ecrire explicitement les matrices Ω_1, Ω_2 et Ω_3. Décomposer Ω_n en blocs en utilisant les matrices I_n, $\mathbf{0}_n = [0, 0, \ldots, 0]$ et $\mathbf{1}_n = [1, 1, \ldots, 1]$. Montrer que la matrice Ω_n est totalement unimodulaire.

Soit R_n l'ensemble des matrices A à cœfficients positifs ou nuls telle que $f_n(A) = (1, 1, \ldots, 1)$.

Question 3.– Montrer que R_n est un polyèdre. Est-il borné? Montrer que les sommets de R_n sont exactement les points entiers de R_n.

Soit Q_n le polytope défini comme l'ensemble des $(x, [a_{ij}]) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ tels que

$$\begin{cases} \sum_{j \in [\![n]\!]} j a_{ij} & = & x_i & 1 \le i \le n \\ \sum_{j \in [\![n]\!]} a_{ij} & = & 1 & 1 \le i \le n \\ \sum_{i \in [\![n]\!]} a_{ij} & = & 1 & 1 \le j \le n \\ a_{ij} & \ge & 0 & 1 \le i, j \le n. \end{cases}$$

Question 4.– Montrer que P_n est la projection de Q_n sur $\mathbb{R}^n$ parallèlement à $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4. Soit M un matroide sur X, soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des indépendants de M et soit $I \in \mathcal{I}$. On pose $X' = X - I$ et on suppose que X' est non vide. Montrer $\{J \subset X' \mid J \cup I \in \mathcal{I}\}$ est l'ensemble des indépendants d'un matroide M' sur X'. Exprimer la fonction rang de M' en fonction de la fonction rang de M.

Exercice 5. Etudier le polyèdre

$$\begin{array}{ccccc} 1 - y_2 & \le & y_1 & \le & y_2 \\ 1 - y_3 & \le & y_2 & \le & y_3 \\ 1 - y_4 & \le & y_3 & \le & y_4 \\ \vdots & & & & \\ 1 - y_n & \le & y_{n-1} & \le & y_n \\ 0 & \le & y_n & \le & 1 \end{array}$$

L'examen comporte 2 exercices.
Une très grande attention sera accordée à la qualité de la rédaction.

Exercice 1. Dans cet exercice un **graphe** est un couple (V, E) où V est un ensemble fini non vide et où E est un sous-ensemble de l'ensemble des couples d'éléments distincts de V. Les éléments de V sont appelés **points** et les éléments de E sont appelés **arcs**. On utilise la notation $x \to y$ pour signifier que le couple (x, y) est un arc. La **matrice d'adjacence** du graphe (V, E) est l'application de $V \times V$ dans $\{0, 1\}$ qui associe au couple (x, y) la valeur 1 si $x \to y$; 0 sinon. Un **sous-graphe** du graphe (V, E) est un graphe (V', E') avec $V' \subset V$ et $E' \subset E$. Un **graphe linéaire** d'ordre n est un graphe isomorphe au graphe de points les entiers de 1 à n et d'arcs les couples $(i, i + 1)$ pour i variant de 1 à $n - 1$. La **fermeture transitive** d'un graphe (V, E) est le plus petit (au sens de l'inclusion) graphe (V, F) tel que

(1-) si $(p, q) \in E$ alors $(p, q) \in F$;
(2-) si $(p, q) \in F$ et $(q, r) \in F$ alors $(p, r) \in F$.

Un **cycle** de longueur k dans un graphe est une suite circulaire $p_1, p_2, \dots, p_k$ de $k \geq 2$ points distincts deux-à-deux tels que $p_i \to p_{i+1}$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, avec la convention $p_{k+1} = p_1$. Un graphe **acyclique** est un graphe sans cycles.

Le **diagramme de Hasse** d'un graphe acyclique est le plus petit (au sens de l'inclusion) graphe de même fermeture transitive.

Un **tournoi** est un graphe tel que pour toute paire de points distincts p et q, on a $p \to q$ ou $q \to p$ mais pas les deux.

Question 1.– Quel est le nombre d'arcs d'un tournoi en fonction de son nombre de points? Montrer qu'un tournoi acyclique est égal à sa fermeture transitive. Montrer que le diagramme de Hasse d'un tournoi acyclique est un sous-graphe linéaire du tournoi. Quel est son ordre? Montrer qu'un tournoi est acyclique si et seulement si il ne contient aucun cycle de longueur trois.

Question 2.– Montrer que le diagramme de Hasse d'un tournoi acyclique peut être construit en examinant $O(n \log n)$ valeurs de sa matrice d'adjacence. (Indication : on rappelle qu'un ensemble de n clés d'un univers totalement ordonné peut être trié en $O(n \log n)$ comparaisons.)

Un tournoi est **libre** si il ne contient pas de quadruplets de points distincts p, q, r, s tels

$$\begin{tikzcd} s \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & p \arrow[dl] \\ q \arrow[r] & r \arrow[u] \end{tikzcd} \qquad \text{ou} \qquad \begin{tikzcd} s & p \arrow[l] \arrow[dl] \\ q \arrow[u] \arrow[r] & r \arrow[u] \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Soit G un graphe et soit x un point de G. Le graphe obtenu à partir de G en réorientant les arcs incidents au point x (i.e., en substituant aux arcs $x \to y$ et $z \to x$ les arcs $y \to x$ et $x \to z$) est dit obtenu à partir de G par **négation** du point x.

Question 3.– Montrer qu'un tournoi est libre si et seulement si il est possible d'obtenir un tournoi acyclique par négation d'un sous-ensemble de ses points.

Question 4.– Quel est le nombre de tournois libres sur un ensemble de n points donnés? (Indication : affiner votre analyse relative à la question précédente.)

Exercice 2. [**Arbres de segments**.] Soit $\mathcal{J}$ une liste finie $J_1, J_2, \ldots, J_n$ de n intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Le problème étudié dans cet exercice est celui de concevoir une structure de données pour $\mathcal{J}$ qui supporte de manière efficace une requête du type "reporter les intervalles de $\mathcal{J}$ contenant un réel donné."

Pour $x \in \mathbb{R}$ on note $\mathcal{J}(x)$ l'ensemble des indices des intervalles de $\mathcal{J}$ contenant le réel x. Par exemple pour

$$\mathcal{J} = [J_1 = (1,2), J_2 = (1/2, 5/3), J_3 = (1,2), J_4 = (-1, 1/2), J_5 = (0, +\infty)]$$

nous pouvons écrire

$$\mathcal{J}(2/3) = \{2,5\} \qquad \mathcal{J}(3/2) = \{1,2,3,5\} \qquad \mathcal{J}(-2) = \varnothing$$

Soit $\mathcal{R}_\mathcal{J}$ la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$ définie par $(x,y) \in \mathcal{R}_\mathcal{J}$ si l'application $z \in \mathbb{R} \mapsto \mathcal{J}(z)$ est constante sur l'intervalle fermé d'extrémités x et y. L'ensemble des classes d'équivalence de la relation $\mathcal{R}_\mathcal{J}$ est notée $\mathbb{R}_\mathcal{J}$.

Question 1.– Montrer que le cardinal de $\mathbb{R}_\mathcal{J}$ est un $O(n)$. Calculer la fonction $I \in \mathbb{R}_\mathcal{J} \mapsto \mathcal{J}(I) \in \mathcal{P}(\{1,2,\ldots,n\})$ dans le cas où $\mathcal{J}$ est la liste de l'exemple donné ci-dessus, la liste $[(1,n),(2,n),(3,n),\ldots,(n-1,n)]$. Montrer que $\sum_I |\mathcal{J}(I)|$, où I décrit $\mathbb{R}_\mathcal{J}$, est un $O(n^2)$. Cette borne quadratique est-elle atteinte?

Question 2.– Proposer une structure de données de taille $O(n^2)$ constructible en temps $O(n^2)$ qui supporte une requête en temps $O(k + \log n)$ où k est le nombre d'intervalles à reporter.

Soit $x_1 = -\infty, x_2, x_3, \ldots, x_m = +\infty$ la liste triée des extrémités des n intervalles de $\mathcal{J}$ augmentée de $-\infty$ et $+\infty$. Nous définissons récursivement une famille d'intervalles ouverts $I_\nu \subseteq \mathbb{R}$, indexée par un sous-ensemble fini E d'entiers naturels, comme suit

- **(1-)** $I_1 = (x_1, x_m)$
- **(2-)** Si $I_\nu = (x_a, x_b)$ avec $b - a > 1$ alors $I_{2\nu} = (x_a, x_{[\frac{a+b}{2}]})$ et $I_{2\nu+1} = (x_{[\frac{a+b}{2}]}, x_b)$ où $[x]$ désigne la partie entière du réel x.

Pour $\nu \in E$ on note $S(\nu)$ l'ensemble des indices des intervalles J de $\mathcal{J}$ tels que $I_\nu \subseteq J$ et, dans le cas $\nu \neq 1$, $I_{[\nu/2]} \notin J$. Enfin on note $\mathcal{A}$ l'arbre binaire étiqueté défini par les deux conditions suivantes

- **(1-)** les noeuds de l'arbre sont étiquetés bijectivement par les éléments de E;
- **(2-)** l' étiquette de la racine du sous-arbre gauche (resp. droit) du noeud interne d'étiquette ν est 2ν (resp. $2\nu + 1$).

Question 3.– Calculer l'arbre $\mathcal{A}$ et les ensembles $S(\nu)$ associés à l'exemple donné au début de l'exercice.

Question 4.– On suppose que $x \neq x_j$ pour tout $j = 1, 2, \ldots, m$. Montrer que $\mathcal{J}(x)$ est la réunion disjointe d'une sous-famille des $S(\nu)$. En déduire une structure de données de taille $O(n \log n)$ constructible en temps $O(n \log n)$ qui supporte une requête (toujours portant sur un réel $x \neq$ des x_js) en temps $O(k + \log n)$ où k est le nombre d'intervalles à reporter.

Question 5.– Comment faut-il modifier la structure de données de la question précédente afin de pouvoir traiter de manière aussi efficace des requêtes portant sur tout réel?

Question 6.– Un **rectangle** de $\mathbb{R}^2$ est le produit Cartésien de deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{R}$ une liste finie de rectangles de $\mathbb{R}^2$. Etudier le problème de reporter les rectangles de $\mathcal{R}$ contenant un élément donné de $\mathbb{R}^2$.