

Combinatoire et Optimisation
UE 4M068
notes partielles de cours

◇ année 2017 ◇

Michel Pocchiola (pocchiola@math.jussieu.fr)

Copyright © 2017 Michel Pocchiola
All Rights Reserved

Résumé

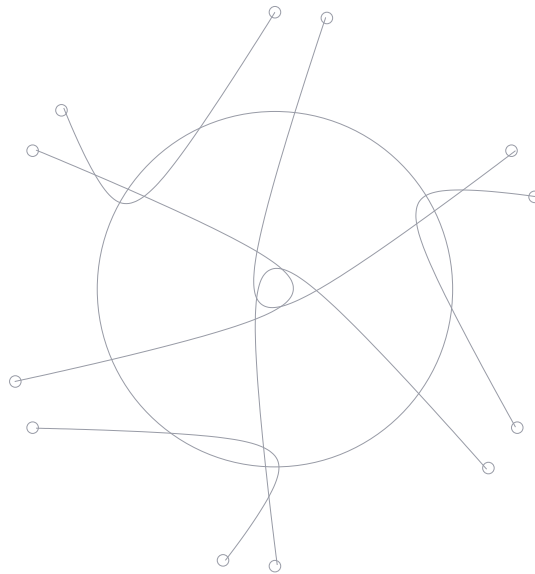


Table des matières

1	Mots de Łukasiewicz	5
2	Graphes, arbres, arbres ordonnés et arbres binaires	16
3	Arbres binaires de recherche	42
4	Treillis des faces d'un polytope	54
5	Forêts, arbres et arbres couvrants	85
6	Matroides	97
7	Dimension de Vapnik-Chervonenkis d'un hypergraphe	110
8	Optimisation linéaire - l'algorithme du simplexe	115
9	Cuttings, partitions simpliciales et recherche simpliciale	126
10	A suivre	131

1 Mots de Łukasiewicz

Monoïde - monoïde libre - langage de Łukasiewicz - nombres de Catalan - algèbre universelle - exemples : monoïdes, groupes, treillis - algèbre universelle libre -

Łukasiewicz dealt with philosophy (especially at the early stage of his scientific research) and above all, with mathematical logic. Although he received education in philosophy, he had an excellent intuitive understanding of mathematics.

Łukasiewicz's achievements in mathematical logic allow us to treat him as one of the most outstanding representatives of this field in the twentieth century. In particular, he might have been one of the most eminent creators of propositional calculi. His achievements include : (1) **the elaboration of a special logical notation (called parenthesis-free symbolism, Łukasiewicz symbolism or Polish notation) that was excellent to conduct investigations on logical calculi in the Warsaw School of Logic**; (2) the creation of many-valued logics; (3) research—based on many-valued logics—on modal connectives and the construction of the so-called systems of Ł-modal logic; (4) the elaboration of a series of axiomatic systems for classical logic calculus (in particular, axiomatic implication-negation system for propositional calculus); (5) investigations into the metalogical properties of various systems of propositional calculus. [3, page 61]



- (1-) Un **monoïde** est un ensemble non vide muni d'un loi de composition interne binaire associative et unifère.
- (2-) Un **ensemble partiellement ordonné** est un ensemble muni d'un **ordre partiel**, i.e., muni d'une relation binaire réflexive, antisymétrique et transitive.
- (3-) Un **ensemble totalement ordonné** est un ensemble muni d'un **ordre total**, i.e., muni d'un ordre partiel tel que pour toute paire x, y d'éléments, le couple (x, y) ou le couple (y, x) appartient à la relation.



Monoïde libre de base donnée. Pour tout ensemble X , le monoïde **libre** X^* engendré par X ou de base X est défini comme suit. Les éléments de X^* sont les n -uplets d'éléments de X pour n variant dans l'ensemble des entiers naturels, i.e.,

$$X^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} X^n,$$

et le composé ou produit uv d'une paire d'éléments u, v de X^* est obtenu par concaténation, c'est-à-dire que si $u = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X^n$ et $v = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in X^m$, alors

$$uv = (x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) \in X^{n+m}.$$

Ceci définit un monoïde dont l' (unique) élément neutre est le 0-uplet $()$.

Il est d'usage d'utiliser les termes **lettre**, **alphabet**, **mot**, **mot vide** et **langage** pour un élément de X , pour la base X , pour un élément de X^* , pour l'élément neutre de X^* , pour un sous-ensemble de X^* . Il est également d'usage d'écrire x en lieu et place du 1-uplet (x) . Ainsi le n -uplet (x_1, x_2, \dots, x_n) s'écrit $x_1x_2 \dots x_n$. Le mot vide est noté 1 ou encore ϵ .

La **longueur** $|u|$ du mot u est le nombre d'occurrences des lettres qui le composent. Le nombre d'occurrences de la lettre a dans le mot u est noté $|u|_a$ (parfois appelé la longueur de u en la lettre a). Ainsi

$$|u| = \sum_{a \in X} |u|_a.$$

Le mot vide est le seul mot de longueur 0.

Soit $u \in X^*$. Un mot v est un **facteur** de u si il existe des mots $a, b \in X^*$ tels que $u = avb$. Si $a = 1$, alors v est un **facteur gauche** ou **facteur préfixe**; si $b = 1$, alors v est un **facteur droit** ou **facteur postfixe**; si $v \neq u$, alors v est un **facteur propre**. Une occurrence dans le mot u d'un facteur v de u est appelée un **segment** de u .

Finalement v est un **sous-mot** de u si il existe des mots $w_0, w_1, \dots, w_n \in X^*$ et des lettres $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ tels que $u = w_0x_1w_1 \dots x_nw_n$ et $v = x_1x_2 \dots x_n$.

Exercice 1.1. Quel est le nombre de facteurs gauches d'un mot de longueur n ? de facteurs gauches propres? 1.1

Exercice 1.2. [Conjugés d'un mot.] Soit w un mot de longueur $n \geq 1$ sur l'alphabet X et soit φ l'application de l'ensemble des facteurs gauches propres de w dans l'ensemble des mots sur X qui associe au facteur gauche propre u de w le mot vu où v est le facteur droit de w tel que $w = uv$.

Question 1.— Tabuler φ dans le cas où $w = abaaba$ avec $a, b \in X$.

Question 2.— Montrer que si φ n'est pas injective alors il existe des mots non vides a et b tels que $w = ab = ba$. 1.2

Exercice 1.3. Soit X un alphabet et soient $a, b \in X^*$, $a, b \neq 1$. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes

- (1) $a = d^r$, $b = d^s$ pour un certain mot d et certains entiers $r, s \geq 1$;

(2) $ab = ba$;

(3) $a^m = b^n$ pour certains entiers $m, n \geq 1$.

(Par définition pour tout mot m et tout entier $k \geq 1$, $m^k = m$ si $k = 1$; mm^{k-1} sinon.

Indication : On pourra observer que si $ab = ba$ alors $a = b$ ou a est préfixe propre de b ou b est préfixe propre de a .)

1.3

Le langage de Łukasiewicz. Soit X un alphabet à deux lettres, disons a et b , dont l'une est distinguée, disons a . Le langage de Łukasiewicz sur X est le langage \mathcal{L} des mots $u \in X^*$ tels que

- (1-) $|u|_b = |u|_a + 1$; et
- (2-) $|v|_a \geq |v|_b$ pour tout facteur gauche propre v de u .

Les mots de Łukasiewicz sont de longueurs impaires. Voici ceux de longueurs 1,3,5 et 7 :

1	b
3	abb
5	$aabbb$
	$ababb$
7	$aaabbbb$
	$aababbb$
	$abaabbb$
	$abababb$
	$aabbabb$
9 ...	

Théorème 1.1. *Pour tous mots $u, v \in \mathcal{L}$, le mot $auv \in \mathcal{L}$. De plus, pour tout mot $u \in \mathcal{L}$, $u \neq b$, il existe une unique paire de mots $v, w \in \mathcal{L}$ tels que $u = avw$.*

Démonstration. $\color{red}{\dashrightarrow}$ —

□

Soit \mathcal{L}_n l'ensemble des mots de Łukasiewicz de longueur $2n + 1$. En particulier $\mathcal{L}_0 = \{b\}$. Du théorème précédent nous déduisons que l'application de $\cup_{p+q=n} \mathcal{L}_p \times \mathcal{L}_q$ dans \mathcal{L}_{n+1} qui associe à la paire (u, v) le mot auv est bien définie et bijective. Par suite la suite ℓ_n des cardinaux des \mathcal{L}_n est entièrement définie par la condition initiale $\ell_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$\ell_{n+1} = \sum_{p+q=n} \ell_p \ell_q. \quad (1)$$

Une forme close pour ℓ_n est alors immédiate pour qui connaît la notion de développement en série entière des fonctions usuelles, cf [2, Chap. IX].

Théorème 1.2. *Le nombre de mots de Łukasiewicz de longueur $2n + 1$ est égal au coefficient de x^n dans le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction*

$$u(x) = \frac{1}{2x}(1 - \sqrt{1 - 4x})$$

Ce nombre est appelé le n -ième nombre de Catalan et sa valeur est

$$\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Démonstration. $\color{red}{\dashrightarrow}$ —

□

En particulier les nombres de Łukasiewicz de longueurs 1-21, 101, 201 sont

n	ℓ_n
0	1
1	1
2	2
3	5
4	14
5	42
6	132
7	429
8	1430
9	4862
10	16796
50	1978261657756160653623774456
100	896519947090131496687170070074100632420837521538745909320

Théorème 1.3.

$$\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{4^n}{n^{3/2}}.$$

Démonstration. ✎ Utiliser la formule de stirling.

□

Exercice 1.4. [Échantillon aléatoire de taille r] Un sous-ensemble aléatoire de r éléments d'un ensemble donné de n éléments est obtenu en numérotant les éléments de 1 à n puis, pour k variant de 1 à n , en insérant dans un ensemble initialement vide l'élément numéroté k avec probabilité p_k où les p_k sont définies par les relations de récurrence $p_1 = r/n$ et $p_{k+1} = (r - r_k)/(n - k)$ avec pour r_k le nombre d'éléments du sous-ensemble aléatoire construit à l'étape k . Montrer que la probabilité ainsi définie sur l'ensemble des sous-ensembles de r éléments de l'ensemble donné est bien définie et uniforme. 1.4

Exercice 1.5. [Mot de Łukasiewicz aléatoire] Soit \mathcal{A} l'ensemble des mots sur l'alphabet $\{a, b\}$ contenant un b de plus que de a et soit \mathcal{A}_n l'ensemble des mots de \mathcal{A} de longueur $2n + 1$.

Question 1.— Ecrire explicitement les éléments de $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1$ et \mathcal{A}_2 .

Question 2.— Quel est le cardinal de \mathcal{A}_n ?

A tout mot $w = u_1 u_2 \dots u_m$ de longueur m sur l'alphabet $\{a, b\}$ on associe la ligne polygonale $C(w) = P_0 P_1 P_2 \dots P_m$ définie

$$P_0 = (0, 0)$$

$$P_{i+1} = P_i + \begin{cases} (1, 1) & \text{si } u_{i+1} = a \\ (1, -1) & \text{si } u_{i+1} = b. \end{cases}$$

Question 3.— Dessiner les lignes polygonales $C(w)$ pour $w \in \mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1$ et \mathcal{A}_2 .

Deux mots w et w' sont dit **conjugués** si il existe des mots u et v tels que $w = uv$ et $w' = vu$.

Question 4.— Montrer que pour tout mot w de \mathcal{A} il existe un seul conjugué de w qui soit un mot de Łukasiewicz sur l'alphabet $\{a, b\}$. Ce conjugué est noté $\Phi(w)$ par la suite.

Question 5.— Soit w un mot de Łukasiewicz sur l'alphabet $\{a, b\}$. Quel est le cardinal de l'ensemble des mots w' de \mathcal{A} tel que $\Phi(w') = w$? En déduire que le nombre de mots de Łukasiewicz de longueur $2n + 1$ est le nombre de Catalan de rang n , i.e.,

$$\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Question 6.— Déduire des questions précédentes un algorithme de génération d'un mot de Łukasiewicz de longueur $2n + 1$ aléatoire pour la loi uniforme. Etudier la complexité de votre algorithme. 1.5

Algèbre universelle ou Ω -algèbre. Nous suivons le Jacobson Tome II [1, Chap. 2].

Un **ensemble de symboles d'opérateurs** est un ensemble Ω muni d'une application arité $\text{ar} : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$. L'ensemble des symboles d'opérateurs d'arité n est noté $\Omega(n)$.

Un opérateur d'arité n sur un ensemble A est une application de A^n dans A .

Une Ω -algèbre est un ensemble non-vide A muni d'une application de Ω dans l'ensemble de opérateurs sur A telle que l'image d'un symbole d'opérateur d'arité n est un opérateur d'arité n :

$$\omega \in \Omega(n) \mapsto \omega_A \in A^{A^n}.$$

On écrira simplement ω pour ω_A (si cela ne prête pas à confusion) et on pourra utiliser la notation de Łukasiewicz

$$\omega a_1 a_2 \dots a_n$$

pour désigner l'image $\omega(a_1, a_2, \dots, a_n)$ du n -uplet (a_1, a_2, \dots, a_n) par l'opérateur ω . La notation de Łukasiewicz ne prête pas à confusion lorsque l'on enchaîne les opérateurs. Par exemple, si ω est 5-aire, φ ternaire, τ binaire, ψ unaire, et λ nullaire, alors

$$\tau(\varphi(a_1, a_2, \omega(a_3, \lambda, a_4, a_5, \psi(a_6))), a_7)$$

s'écrit $\tau\varphi a_1 a_2 \omega a_3 \lambda a_4 a_5 \psi a_6 a_7$ dans la notation de Łukasiewicz, et on voit aisément (♣) que si l'on sait que ω est 5-aire, φ ternaire, τ binaire, ψ unaire, et λ nullaire l'expression parenthésée ci-dessus est la seule qui s'écrit $\tau\varphi a_1 a_2 \omega a_3 \lambda a_4 a_5 \psi a_6 a_7$ après suppression des parenthèses et des virgules.

Exercice 1.6. Soit A une Ω -algèbre. Soit $\varpi_j^{(i)}$ un symbole d'opérateur d'arité i . Ecrire

$$\varpi_1^{(2)} \varpi_2^{(3)} \varpi_3^{(2)} \varpi_4^{(0)} \varpi_5^{(4)} a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \varpi_6^{(3)} a_7 a_8 a_9$$

avec parenthèses et virgules.

1.6

Exemples. Un **monoïde** est une Ω -algèbre où l'ensemble des symboles d'opérateurs Ω est composé d'un opérateur binaire ω et d'un opérateur nullaire 1 qui satisfont des axiomes suivants : $\omega\omega abc = \omega a\omega bc$ (associativité de ω) et $\omega a 1 = a = \omega 1 a$ (1 est élément neutre).

Un **groupe** est une Ω -algèbre où l'ensemble des symboles d'opérateurs Ω est composé d'un opérateur binaire ω , d'un opérateur unaire ι et d'un opérateur nullaire 1 qui satisfont des axiomes suivants : $\omega\omega abc = \omega a\omega bc$ (associativité de ω), $\omega a 1 = a = \omega 1 a$ (1 est élément neutre) et $\omega a \iota a = 1 = \omega \iota a a$ (existence d'un inverse).

Un **treillis** est une Ω -algèbre où Ω est composé de deux symboles d'opérateurs binaires \wedge et \vee (il est d'usage d'utiliser la notation infixée $a \vee b$ et $a \wedge b$ pour les images de la paire

(a, b) par ces opérateurs) qui satisfont les axiomes suivants :

$$a \wedge b = b \wedge a \qquad a \vee b = b \vee a \qquad (A1)$$

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) \qquad (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) \qquad (A2)$$

$$a \wedge a = a \qquad a \vee a = a \qquad (A3)$$

$$(a \wedge b) \vee a = a \qquad (a \vee b) \wedge a = a \qquad (A4)$$

Exercice 1.7. Montrer que $a \wedge b = b$ si et seulement si $b \vee a = a$.

1.7

Théorème 1.4. Soit L un treillis. Alors la relation $a \geq b$ si $a \wedge b = b$ (ou de manière équivalente $a \vee b = a$) est une relation d'ordre partiel sur L telle que toute paire d'éléments admet une borne supérieure (= un plus petit majorant) et une borne inférieure (= un plus grand minorant), à savoir $a \vee b$ et $a \wedge b$. Réciproquement si L est un ensemble non-vide partiellement ordonné tel que toute paire (a, b) d'éléments admet une borne supérieure $\sup(a, b)$ et une borne inférieure $\inf(a, b)$ alors les opérateurs binaires \sup et \inf définissent une structure de treillis sur L avec \sup et \inf dans le rôle de \vee et \wedge .

Démonstration. \Leftarrow

□

Algèbre universelle libre. Soit Ω un ensemble de symboles d'opérateurs et soit X un ensemble de **variables** disjoint de Ω . On note $W(\Omega, X)$ l'ensemble des mots sur $\Omega \cup X$ et on définit la **valence** d'un mot $w = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_n$ de $W(\Omega, X)$, $\tau_i \in X \cup \Omega$, comme étant la somme des valences des τ_i où la valence d'une variable est 1 et la valence d'un symbole d'opérateur est 1 moins son arité.

$W(\Omega, X)$ est muni de la structure d' Ω -algèbre définie par

$$\omega(w_1, w_2, \dots, w_n) = \omega w_1 w_2 \dots w_n$$

pour $\omega \in \Omega(n)$.

L' Ω -algèbre libre engendré par X , notée $F(\Omega, X)$, est définie comme la sous-algèbre engendrée par X . En d'autres termes $F(\Omega, X)$ est l'intersection des $M \subseteq W(\Omega, X)$ tels que

(1-) $X \subset M$;

(2-) Pour tout entier n pour tout symbole d'opérateur ω d'arité n et pour tout n -uplet (w_1, w_2, \dots, w_n) d'éléments de M le mot $\omega w_1 w_2 \dots w_n \in M$.

Les éléments de $F(\Omega, X)$ sont appelés des Ω -termes sur X .

Exercice 1.8. Que peut-t-on dire de l'ensemble des termes de l'algèbre universelle libre $F(\Omega, X)$ avec $X = \{b\}$ et $\Omega = \Omega(2) = \{a\}$?

1.8

Théorème 1.5. Soit $w \in W(\Omega, X)$. Alors $w \in F(\Omega, X)$ si et seulement si sa valence est 1 et la valence de tout facteur droit de w est strictement positive. Le sous-ensemble de $F(\Omega, X)$ des éléments de longueur 1 est $X \cup \Omega(0)$. Si $w \in F(\Omega, X)$ est de longueur > 1 , alors w commence avec un $\omega \in \Omega(n)$, $n \geq 1$, et w s'écrit de manière unique sous la forme $\omega w_1 w_2 \cdots w_n$ avec $w_i \in F(\Omega, X)$.

Démonstration. \Leftarrow

□

Exercice 1.9. Soit $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots\}$ avec ω_i d'arité i . Montrer que le nombre de termes de longueurs $n + 1$ de $F(\Omega, \emptyset)$ est le coefficient de x^n dans le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}.$$

Quel est ce nombre ?

1.9

Solution 1.1.	↗
1.1	
Solution 1.2.	↗
1.2	
Solution 1.3.	↗
1.3	
Solution 1.4.	↗
1.4	
Solution 1.5.	↗
1.5	
Solution 1.6.	↗
1.6	
Solution 1.7.	↗
1.7	
Solution 1.8.	↗
1.8	
Solution 1.9.	↗
1.9	

Références

- [1] N. Jacobson. *Basic Algebra II*. Freeman, 1980.
- [2] J. Lelong-Ferrand and J. Arnaudiès. *Cours de mathématiques - Tome 2 - Analyse*. Dunod Université, 3 edition, 1978.
- [3] R. Murawski. *The Philosophy of Mathematics and Logic in the 1920s and 1930s in Poland*, volume 48 of *Science Networks Historical Studies*. Birkhäuser, 2014.

2 Graphes, arbres, arbres ordonnés et arbres binaires

- Terminologie relative aux graphes - dessin de graphes - graphes isomorphes - graphes linéaires, graphes cycliques, graphes complets, graphes bipartis complets - sous-graphes, chemins et cycles d'un graphe - graphe connexe, composantes connexes d'un graphe - graphe planaire et graphe plan : relation d'Euler, Crossing Lemma - arbre - graphe orienté - arborescence et arbre ordonné - arbre binaire

Graphes. Un **graphe** G est un triplet (V, E, φ) où V est un ensemble fini non vide, E un ensemble fini disjoint de V et φ une application de E dans l'ensemble des parties à un ou deux éléments de V .

Il est d'usage d'utiliser le mot **sommet** (ou **nœud**) pour un élément de V , le mot **arête** pour un élément de E , l'expression **fonction d'attachement** pour la fonction φ , et de dire que G est un **graphe sur** V pour dire que V est l'ensemble des sommets de G .

Une **incidence** est une paire $(v, e) \in V \times E$ telle que $v \in \varphi(e)$; dans ce cas on dit que v est incident à e ou encore que v est une extrémité de e .

Théorème 2.1. Soit $G = (V, E, \varphi)$ un graphe et soit I l'ensemble des incidences de G . Alors le triplet (V, E, I) détermine de manière unique φ .

Démonstration.  —

□

Ainsi on pourra définir un graphe par la donnée de l'ensemble de ses sommets, l'ensemble de ses arêtes et l'ensemble de ses incidences en lieu et place de sa fonction d'attachement.

La **multiplicité** d'une arête est le nombre d'arêtes ayant le même ensemble de sommets incidents. Une arête **simple** est une arête de multiplicité 1. Une arête **multiple** est une arête de multiplicité au moins 2. Une **boucle** est une arête incidente à un seul sommet. Un **graphe simple** est un graphe sans boucles et sans arêtes multiples. Un graphe **d'ordre** n est un graphe sur un ensemble de taille (ou cardinalité) n .

Exercice 2.1. Quel est le nombre de graphes simples sur un ensemble à $n \geq 1$ éléments à renommage près des arêtes? 2.1

Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes qui lui sont incidentes, une boucle étant comptée deux fois. Une **feuille** est un sommet de degré 1. Par exemple le graphe de sommets u, v, w, z , d'arêtes a, b, c, d, e, f et de fonction d'attachement $\varphi(a) = \{u\}$, $\varphi(b) = \{u, v\}$, $\varphi(c) = \{u, v\}$, $\varphi(d) = \{v, w\}$, $\varphi(e) = \{w, u\}$, $\varphi(f) = \{w, z\}$ est formé d'une boucle a , de deux arêtes multiples b et c et de trois arêtes simples d, e et f ; la multiplicité des arêtes b et c est 2; le degré du sommet u est 5; le sommet z est une feuille.

Il est commode pour définir un graphe de le représenter par un dessin dans le plan composé de points pour les sommets du graphe et d'arcs de Jordan pour les arêtes du graphe, arcs soumis, afin de représenter la fonction d'attachement, à la règle suivante : les extrémités des arcs de Jordan sont les points représentatifs des extrémités des arêtes, cf. Figure 1. De plus, afin d'éviter toute ambiguïté, les intersections éventuelles entre des arcs sont en général en nombre fini et transverses.

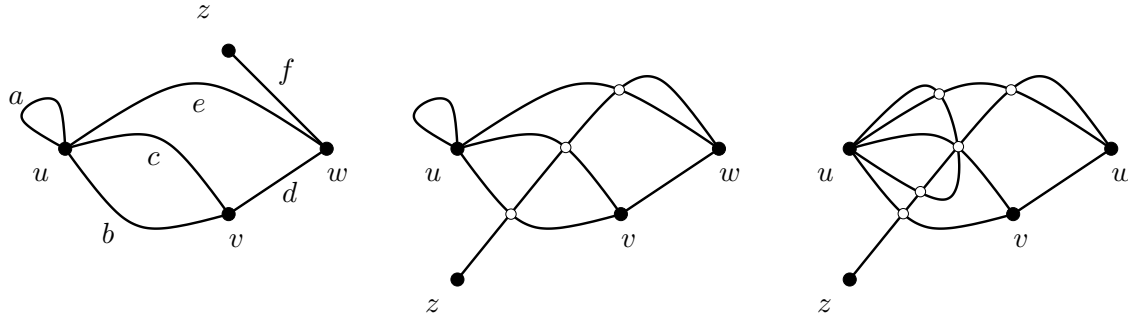


FIGURE 1 – Trois dessins du graphe de sommets u, v, w, z , d'arêtes a, b, c, d, e, f et de fonction d'attachement $\varphi(a) = \{u\}$, $\varphi(b) = \{u, v\}$, $\varphi(c) = \{u, v\}$, $\varphi(d) = \{v, w\}$, $\varphi(e) = \{w, u\}$, $\varphi(f) = \{w, z\}$

Deux graphes sont **isomorphes** si ils sont égaux à renommage près des sommets et des arêtes, i.e., s'il existe une correspondance bijective entre leurs ensembles de sommets et leurs ensembles d'arêtes qui commute avec leurs fonctions d'attachements ou, de manière équivalente, qui conserve les incidences. En d'autres termes, les graphes $G = (V, E, \varphi)$ et $G' = (V', E', \varphi')$ sont isomorphes si il existe des bijections $f : V \rightarrow V'$ et $g : E \rightarrow E'$ telles que pour tout $(v, e) \in V \times E$ la paire (v, e) est une incidence de G si et seulement si la paire $(f(v), g(e))$ est une incidence de G' . Une telle correspondance bijective entre les ensembles de sommets et d'arêtes est appelé un **isomorphisme** entre les deux graphes ; un **automorphisme** si les deux graphes sont les mêmes.

Exercice 2.2. Montrer que deux graphes $G = (V, E, \varphi)$ et $G' = (V', E', \varphi')$ sont isomorphes si et seulement si il existe une bijection $f : V \rightarrow V'$ telle que pour toute paire de sommets (u, v) de G le nombre d'arêtes de G d'extrémités u et v est égal au nombre d'arêtes de G' d'extrémités $f(u)$ et $f(v)$. 2.2

Un **graphe linéaire d'ordre** $n \geq 1$ est un graphe isomorphe au graphe suivant

$$\begin{cases} V &= \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \\ E &= \{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\} \\ \varphi(e_i) &= \{v_i, v_{i+1}\} \end{cases} \quad (1)$$

Les sommets v_1 et v_n sont ses **extrémités** et le graphe est dit **joindre** v_1 à v_n (ou v_n à v_1).

Un **graphe cyclique d'ordre** $n \geq 1$ est un graphe isomorphe au graphe suivant

$$\begin{cases} V &= \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \\ E &= \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \\ \varphi(e_i) &= \{v_i, v_{i+1}\} \end{cases} \quad (2)$$

avec la convention $v_{n+1} = v_1$.

Exercice 2.3. Quel est le nombre de graphes linéaires/cycliques sur un ensemble de taille $n \geq 1$ à renommage près des arêtes? 2.3

Exercice 2.4. Quel est le groupe des automorphismes d'un graphe linéaire d'ordre n ?
Même question avec un graphe cyclique d'ordre n . 2.4

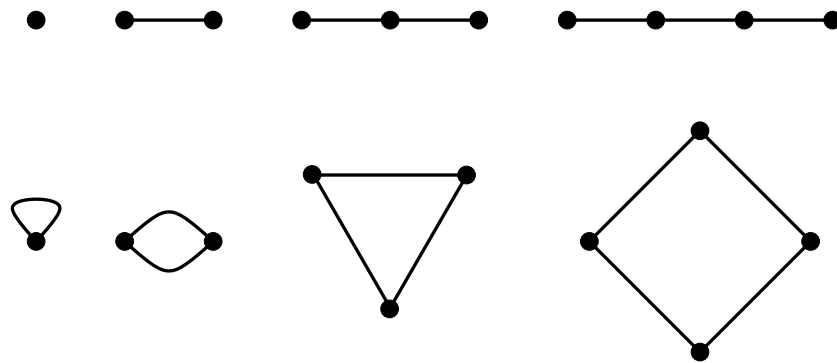


FIGURE 2 – Graphes linéaires et cycliques d'ordres 1, 2, 3 et 4

Un **sous-graphe** d'un graphe $G = (V, E, \varphi)$ est un graphe (V', E', φ') tel que $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ et φ' est la restriction de φ au domaine E' et au co-domaine des parties à 1 ou 2 éléments de V' .

Un **chemin/cycle** dans un graphe est un sous-graphe linéaire/cyclique de ce graphe.

Un graphe est **connexe** s'il existe un chemin dans le graphe joignant les éléments de toute paire de sommets du graphe. Les **composantes connexes** d'un graphe sont ses sous-graphes connexes maximaux.

Exercice 2.5. Soit G un graphe d'ordre n ayant k arêtes et c composantes connexes. Montrer que $c + k \geq n$. 2.5

Soit V un ensemble fini non-vide de cardinalité n . Le **graphe complet** sur V est le graphe simple sur V dont les arêtes sont les paires non ordonnées d'éléments de V . Sa classe d'isomorphisme est notée K_n .

Soit A et B deux ensembles finis non-vides, d'intersection vide et de cardinalité n et m , respectivement. Le **graphe biparti** complet de bipartition A, B et le graphe simple sur $A \cup B$ d'arêtes les paires non ordonnées formées d'un élément de A et d'un élément de B . Sa classe d'isomorphisme est notée $K_{n,m}$.

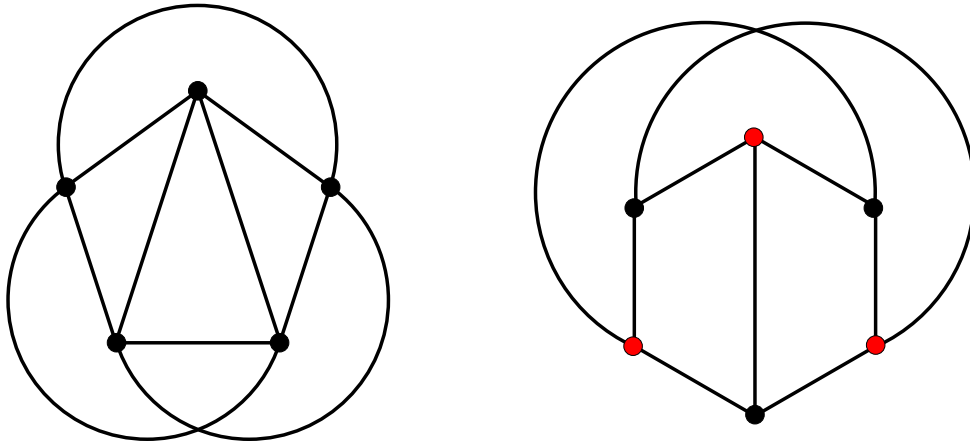


FIGURE 3 – Dessins de K_5 et $K_{3,3}$

Graphes planaires, graphes plans. Soit $G = (V, E, \varphi)$ un graphe et soit $G' = (V', E', \varphi')$ un dessin de G dans le plan.

Le **nombre de croisements** de G' , noté $\text{cr}(G')$, est la somme des $\varphi(\{e, e'\})$ où $\{e, e'\}$ décrit l'ensemble des parties à deux éléments de E' et où $\varphi(\{e, e'\})$ est le nombre de points d'intersection des intérieurs des arêtes e et e' . Le **nombre de croisements** (crossing number) de G , noté $\text{Cr}(G)$, est le minimum des $\text{cr}(G')$ lorsque G' décrit l'ensemble des dessins de G , cf. Figure 4. En particulier G est dit **planaire** si $\text{Cr}(G) = 0$.

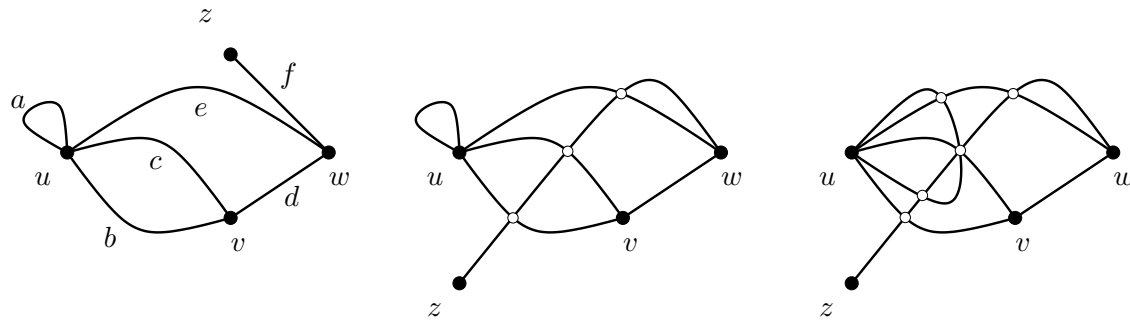


FIGURE 4 – Trois dessins d'un même graphe ; leurs nombres de croisements sont 0, 3, et 7 ; ce graphe est donc planaire.

La Figure 3 montre un dessin à un croisement de K_5 et un dessin à un croisement de $K_{3 \times 3}$. Ces deux graphes ne sont pas planaires. Voici pourquoi.

Un **graphe plan** est un dessin sans croisements d'un graphe planaire. Les **faces** d'un graphe plan sont les composantes connexes du complémentaire dans le plan de la réunion de ses arêtes. Sommets et arêtes inclus dans la clôture topologique d'une face sont dits **incidents** à la face. Le **bord** d'une face est le graphe plan de sommets les sommets incidents à la face et d'arêtes les arêtes incidentes à la face. La **taille** d'une face est le nombre de cotés d'arête qui lui sont incidentes. Par exemple les faces du graphe plan le plus à gauche de la Figure 4 sont au nombre de quatre et leurs tailles sont 1, 2, 3 et 6, l'arête wz étant comptée deux fois pour la face non bornée.

Théorème 2.2 (Relation d'Euler). *Les nombres f, e et v de faces, arêtes et sommets d'un graphe plan connexe sont reliés par la relation $f - e + v = 2$, dite relation d'Euler.*

Démonstration.  —

□

Une **triangulation** du plan est un graphe plan dont les faces sont des triangles topologiques, i.e., des faces dont le bord est un cycle d'ordre 3. Tout graphe plan sans boucles dont les faces sont incidentes à au moins trois sommets peut être complété en une triangulation par ajout d'arêtes.

Théorème 2.3. *Les nombres de faces et d'arêtes d'une triangulation du plan à n sommets sont égaux à $2n - 4$ et $3n - 6$, respectivement. De plus toute triangulation du plan contient au moins un sommet de degré au plus 5.*

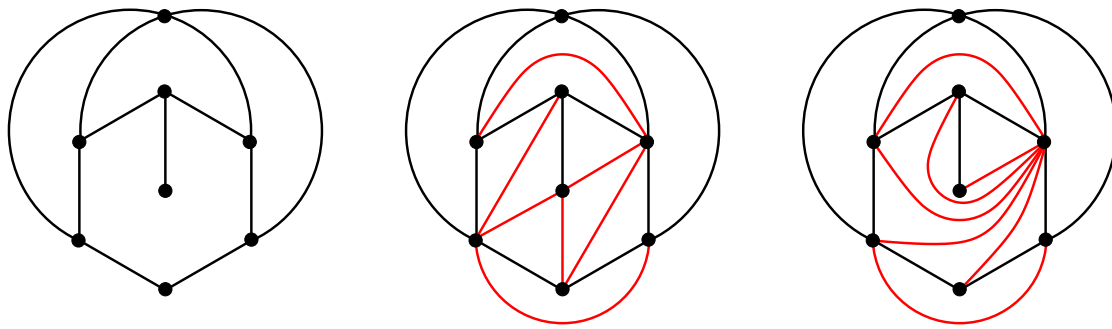


FIGURE 5 – Complétion d'un graphe plan en une triangulation par ajout d'arêtes

Démonstration. $\color{red}{\dashrightarrow}$ —

□

Théorème 2.4. *Le nombre d'arêtes d'un graphe simple planaire à $n \geq 3$ sommets est au plus $3n - 6$. De plus si le graphe ne contient aucun cycle de longueur trois alors le nombre d'arêtes est au plus $2n - 4$.*

Démonstration. $\color{red}{\dashrightarrow}$ —

□

Corollaire 2.5. *K_5 et de $K_{3,3}$ ne sont pas planaires.*

Démonstration. $\color{red}{\dashrightarrow}$ —

□

Exercice 2.6. Un graphe est dit coloriable avec k couleurs si il existe une application de l'ensemble des sommets du graphe dans un ensemble de k couleurs telle que les couleurs de deux sommets adjacents soient distinctes. Montrer que tout graphe planaire est coloriable avec 5 couleurs. (Hint : procéder par induction sur le nombre de sommets en utilisant le deuxième partie du Théorème 2.3 et la non planarité de K_5 .) 2.6


Théorème 2.6. *Le nombre de croisements d'un graphe simple à $n \geq 3$ sommets et m arêtes est minoré par $m - 3n + 6$.*

Démonstration. $\color{red}{\dashrightarrow}$ —

□

Notons que le nombre de croisements d'un graphe simple à $n \geq 0$ sommets et m arêtes est minoré par $m - 3n$ pour toute valeur de n .

Théorème 2.7 (Crossing Lemma [8, Leighton'83], [2, Ajtai, Chvátal, Newborn and Szemerédi'82]). *Le nombre de croisements d'un graphe simple G à n sommets et $m \geq 4n$ arêtes est minoré par $m^3/64n^2$.*

Démonstration. Nous suivons la preuve du Aigner-Ziegler [1], attribuée à Micha Sharir. C'est un exemple de preuve probabiliste [7, 3].  — □

En particulier si le nombre de croisements d'un graphe simple à n sommets est un $O(n^2)$ alors le nombre d'arêtes est un $O(n^{4/3})$.

Une première application du lemme des croisements. Une **incidence** entre un ensemble P de points du plan euclidien et un ensemble L de droites du plan euclidien est une paire $(p, l) \in P \times L$ telle que $p \in l$. Le nombre d'incidences entre un ensemble de n points du plan euclidien et un ensemble de n droites du plan euclidien est un $O(n^{4/3})$, [10, Szemerédi and Trotter'83] : considérer le graphe de sommets les n points et d'arêtes les paires de points consécutifs sur les n droites et observer que le nombre de

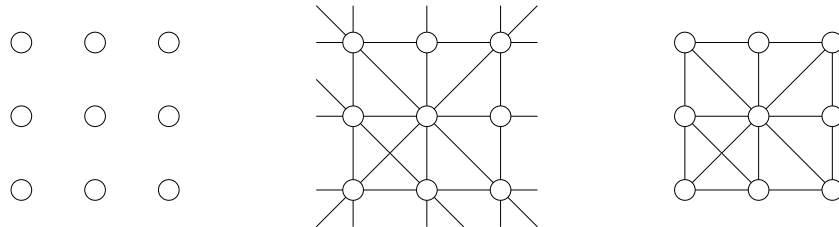


FIGURE 6 – Incidences point-droite

croisements de ce graphe est au plus quadratique en n et que le nombre d'incidences est majoré par la somme des degrés des sommets de ce graphe, i.e., est majoré par 2 fois le nombre d'arêtes de ce graphe (méthode de Székely [9]).

Une deuxième application du lemme des croisements. Soit $n \geq 2$ un entier naturel pair et soit P un ensemble de n points du plan euclidien sans triplets de points alignés. Un **segment bisecteur** de P est un segment de droite d'extrémités dans P dont

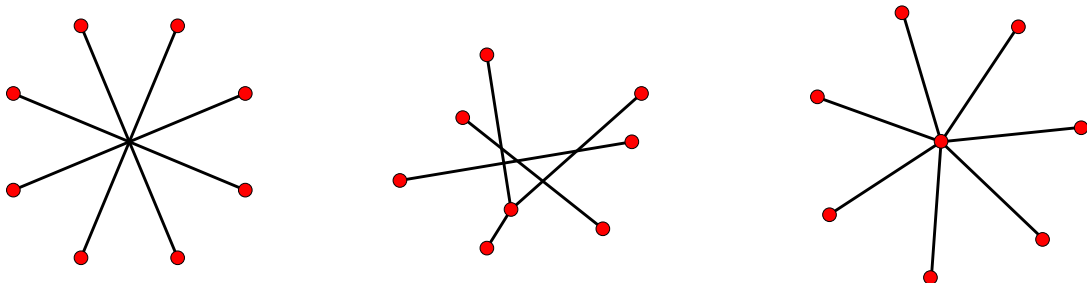


FIGURE 7 – Segments bisecteurs de trois familles de 8 points

la droite support sépare les points de P en deux parties de même taille, cf. Figure 7. Le nombre de segments bisecteurs d'un ensemble de n points du plan euclidien est un $O(n^{4/3})$, [5, T. Dey'98] : se déduit de la relation

$$P^* + \sum_{\nu \in P} \binom{(\nu^* + 1)/2}{2} = \binom{n/2}{2} \quad (*)$$

où P^* est le nombre de paires de segments bisecteurs de P sécants en un point intérieur et où ν^* est le nombre de segments bisecteurs d'extrémité ν , [4]. La relation (*) est facile à vérifier pour l'ensemble des sommets d'un polygone convexe (les segments bisecteurs sont les segments joignant deux sommets à distance maximale dans le graphe sommet-arête du polygone convexe, $\nu^* = 1$ n fois, $P^* = \binom{n/2}{2}$) ou encore pour l'ensemble des sommets d'un polygone régulier augmenté du centre de son cercle circonscrit (les segments bisecteurs sont les segments joignant un sommet du polygone à son centre, $\nu^* = 1$ $n-1$ fois, $\nu^* = n-1$ fois, $P^* = 0$) et s'établit pour tout ensemble de points par mutation (un déplacement continu des points au cours duquel un et seul triplet de points change d'orientation) en utilisant en particulier le "lemme de Lovász" : toute droite passant par un unique point ν de P partage l'ensemble des segments bisecteurs d'extrémité ν en deux parties dont les tailles diffèrent d'une unité (\neq). Erdős et al [6] conjecture que le nombre de segments bisecteurs est un $o(n^{1+\epsilon})$ pour tout ϵ . La meilleure borne inférieure dans le pire des cas établie à ce jour est $n2^{\Omega(\sqrt{\log n})}$, cf. [11, G. Tóth'01]. Pour poursuivre voir [12].

Orientation d'un graphe, graphes orientés. Soit $G = (V, E, \varphi)$ un graphe. Une **orientation** de G est la donnée pour chaque arête e de G d'une paire ordonnée

$$\chi(e) = (\iota(e), \tau(e))$$

de sommets telle que $\varphi(e) = \{\iota(e), \tau(e)\}$. Le sommet $\iota(e)$ est alors appelé le sommet **initial** de l'arête e et $\tau(e)$ est appelé le sommet **terminal** de l'arête e . Les arêtes **entrantes/sortantes** en le sommet v sont les arêtes de sommet terminal/initial le sommet v .

Un **graphe orienté** est un graphe muni d'une orientation.

Exercice 2.7. Soit G un graphe d'ordre n à k arêtes dont k' boucles. Quel est le nombre d'orientations de G en fonction de n, k et k' ? 2.7

Arbres. Une forêt est un graphe sans cycles et un arbre est une forêt connexe. En particulier, forêts et arbres sont des graphes simples.

Proposition 2.8. *Soit G un graphe simple (sans boucles et sans arêtes multiples) connexe. Alors G est un arbre si et seulement si pour toute paire de sommets de G il existe un unique chemin dans G reliant les sommets de la paire.*

Démonstration.  —

□

Arbres ordonnés. Un **arbre ordonné** est un arbre orienté dont les arêtes sont toutes orientées vers un même nœud, nœud appelé la **racine** de l'arbre, et dont l'ensemble des arêtes est partiellement ordonné par la donnée pour chaque nœud de l'arbre d'un ordre linéaire sur ses arêtes entrantes.

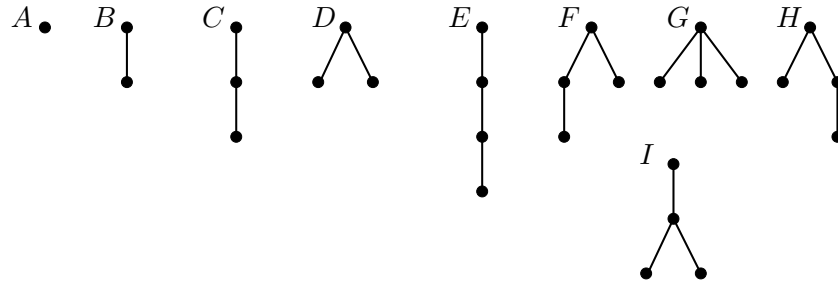


FIGURE 8 – Arbres ordonnés d'ordres 1, 2, 3 et 4 : les arêtes sont orientées vers le haut et l'ordre des arêtes entrantes en un sommet est celui de la lecture de gauche à droite.

Soit A un arbre ordonné, ν_0 sa racine, n le degré entrant de ν_0 et soit ν un nœud de A .
 ☞ Le **sous-arbre** de racine ν de A est l'arbre ordonné de racine ν , d'arêtes les arêtes de A orientées vers ν et d'ordre sur les arêtes la restriction de l'ordre sur les arêtes de A .

Exercice 2.8. Quel est le nombre de sous-arbres d'un arbre ordonné d'ordre n ? 2.8

☞ Pour $1 \leq k \leq n$, le **sous-arbre immédiat de rang k** de A est le sous-arbre de A de racine le nœud initial de l'arête de rang k entrante en la racine de A . Les sous-arbres immédiats de A sont les sous-arbres de racines les nœuds adjacents à la racine de A . L'arbre ordonné A est entièrement défini par la donnée de sa racine ν et de la suite A_1, A_2, \dots, A_n de ses sous-arbres immédiats, ordonnés selon les rangs croissants. Nous écrirons

$$A = \Psi_n(\nu_0, A_1, A_2, \dots, A_n).$$

L'opérateur Ψ_n est un opérateur **partiel** sur l'ensemble des $n+1$ -uplet d'arbres ordonnés : il est défini sur les $n+1$ -uplets d'arbres ordonnés disjoints deux à deux dont le premier terme est un arbre d'ordre 1.

Exercice 2.9. Dessiner l'arbre ordonné

$$\Psi_3(a, \Psi_2(b, \Psi_0(c), \Psi_0(d)), \Psi_0(e), \Psi_1(f, \Psi_0(g))).$$

Écrire sous la forme d'une composition d'opérateurs Ψ_k les arbres A, B, C, \dots, I de la Figure 8 (il vous faut nommer les sommets). 2.9

Un nœud est dit externe ou interne selon que son degré entrant est nul ou non-nul.

☞ Pour ν nœud de l'arbre de degré entrant r et pour $i \in \llbracket r \rrbracket$ on note $G_i(\nu)$ le nœud initial de l'arête entrante en ν de rang i pour l'ordre linéaire sur les arêtes entrantes en ν . Pour tout nœud ν de l'arbre il existe alors une unique suite i_1, i_2, \dots, i_m , $m \geq 0$, d'entiers ≥ 1 tels que

$$\nu = G_{i_m} G_{i_{m-1}} \dots G_{i_1}(\nu_0)$$

où ν_0 est la racine de l'arbre. Le mot $G_{i_1} \dots G_{i_m}$ sur l'alphabet des G_i est alors appelé le **chemin de recherche** du nœud ν , cf. Figure 9.

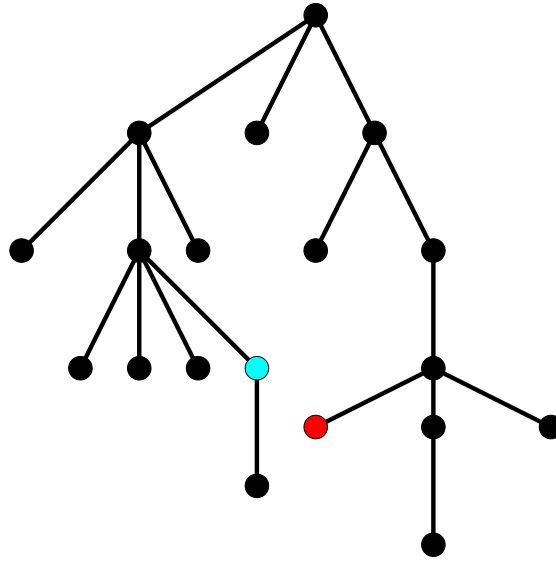


FIGURE 9 – Les chemins de recherche des nœuds cyan et rouge sont $G_1G_2G_4$ et $G_3G_2G_1G_1$

Ainsi les chemins de recherche des arbres d'ordre au plus 4 de la Figure 8 sont

arbre ordonné	ordre	Chemins de recherche
<i>A</i>	1	ϵ
<i>B</i>	2	ϵ, G_1
<i>C</i>	3	ϵ, G_1, G_1G_1
<i>D</i>		ϵ, G_1, G_2
<i>E</i>	4	$\epsilon, G_1, G_1G_1, G_1G_1G_1$
<i>F</i>		$\epsilon, G_1, G_1G_1, G_2$
<i>G</i>		ϵ, G_1, G_2, G_3
<i>H</i>		$\epsilon, G_1, G_2, G_2G_1$
<i>I</i>		$\epsilon, G_1, G_1G_1, G_1G_2$

Exercice 2.10. Soit A un arbre ordonné, C son ensemble de chemins de recherche et d le degré entrant de sa racine. Quel est l'ensemble des chemins de recherche du sous-arbre immédiat de A de rang k ? 2.10

Exercice 2.11. Montrer que deux arbres ordonnés sont isomorphes si et seulement si ils ont le même ensemble de chemins de recherche. Caractériser les langages sur $\{G_1, G_2, \dots\}$ qui sont des ensembles de chemins de recherche d'arbres ordonnés. 2.11

Codage de la classe d'isomorphisme d'un arbre ordonné par un terme d'une algèbre universelle libre. Soit $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots\}$ un ensemble de symboles d'opérateur où ω_i est d'arité i . A tout arbre ordonné A nous associons un terme $\Phi(A)$ de $F(\Omega, \emptyset)$, l' Ω -algèbre universelle libre engendré par \emptyset , comme suit :

$$\Phi(A) = \begin{cases} \omega_0 & \text{si } A \text{ est d'ordre } 1 \\ \omega_n \Phi(A_1) \Phi(A_2) \dots \Phi(A_n) & \text{si } A = \Psi_n(\nu, A_1, A_2, \dots, A_n) \end{cases}$$

En d'autres termes $\Phi(A)$ est obtenu à partir de l'expression de A comme composé d'opérateurs Ψ_n en substituant au symbole Ψ_k le symbole ω_k et en supprimant les parenthèses ouvrantes et fermantes, les virgules et les lettres désignant les nœuds de l'arbre. Par exemple à l'arbre ordonné

$$\Psi_3(a, \Psi_2(b, \Psi_0(c), \Psi_0(d)), \Psi_0(e), \Psi_1(f, \Psi_0(g))).$$

est associé le terme $\omega_3 \omega_2 \omega_0 \omega_0 \omega_0 \omega_1 \omega_0$.

Exercice 2.12. Ecrire les termes associés aux arbres A, B, \dots, I de la Figure 8. 2.12

Le théorème suivant est immédiat en observant que deux arbres ordonnés sont isomorphes si et seulement si leurs racines ont même degré entrant, disons n , et leurs n -uplets de sous-arbres immédiats sont isomorphes et en se rappelant l'univocité de la notation de Łukasiewicz.

Théorème 2.9. Deux arbres ordonnés sont isomorphes si et seulement si ils ont le même terme associé. De plus tout terme est le terme associé d'un arbre ordonné. \square

Exercice 2.13. Quel est le nombre de classes d'isomorphismes d'arbres ordonnés d'ordre $n + 1$? 2.13

Arbres binaires. Un **arbre binaire** est un arbre ordonné dont les nœuds internes sont de degré entrant exactement 2. Les sous-arbres immédiats de rang 1 et 2 sont alors appelés **sous-arbres gauche** et **droit**.

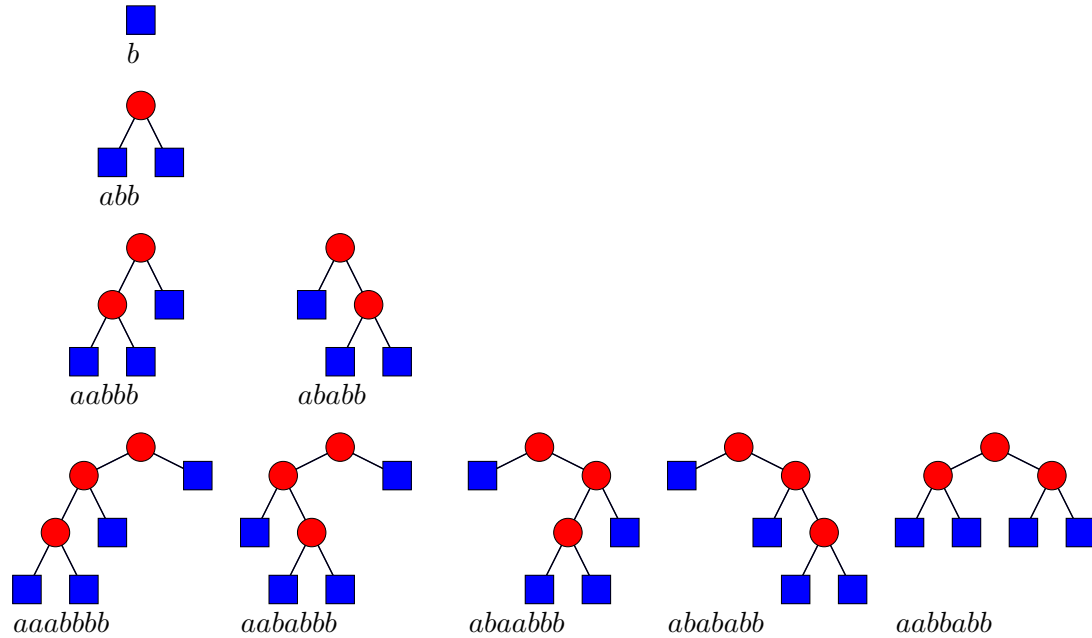


FIGURE 10 – Liste exhaustive à isomorphisme près des arbres binaires d’ordre 1, 3, 5 et 7. Chaque arbre est étiqueté par le terme de l’algèbre universelle libre adhoc introduite au paragraphe précédent codant sa classe d’isomorphisme : pour des raisons de lisibilité les symboles d’opérateurs a et b sont utilisés en lieu et place des symboles d’opérateurs ω_2 et ω_0 .

Proposition 2.10. *Le nombre de nœuds externes d’un arbre binaire est égal à son nombre de nœuds internes augmenté de 1.*

Démonstration.  —

□

Ainsi l’ordre d’un arbre binaire, i.e. son nombre de nœuds, est égal à deux fois son nombre de nœuds internes augmenté de 1 ; en particulier c’est un nombre impair.

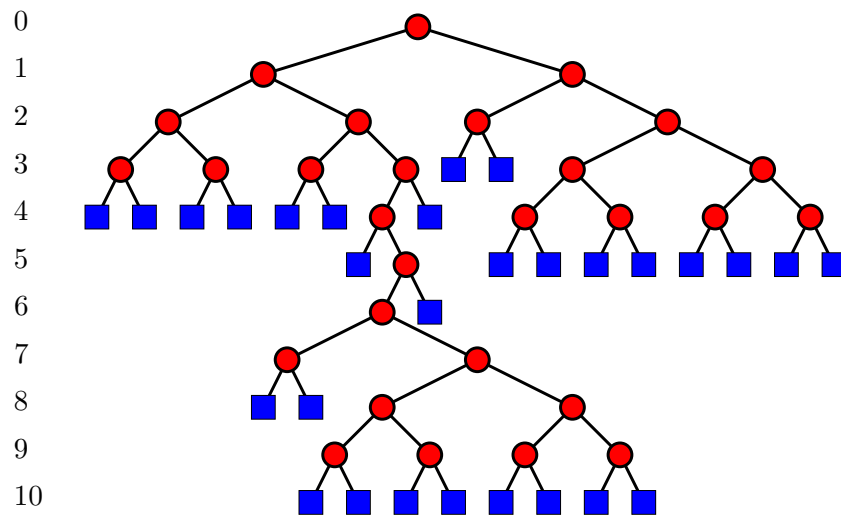


FIGURE 11 – Un arbre binaire de taille 28 et de hauteur 10

Dans la suite nous utiliserons le mot **taille** pour le nombre de nœuds internes d'un arbre binaire. Ainsi

$$\begin{cases} \text{taille}(\Psi_0(\nu)) & = 0 \\ \text{taille}(\Psi_2(\nu, A, A')) & = 1 + \text{taille}(A) + \text{taille}(A'). \end{cases}$$

La **profondeur** d'un nœud d'un arbre binaire est la longueur (= nombre d'arêtes) de l'unique chemin le reliant à la racine de l'arbre. La **hauteur** d'un arbre binaire est le maximum des profondeurs de ses nœuds. En d'autres termes

$$\begin{cases} \text{hauteur}(\Psi_0(\nu)) & = 0 \\ \text{hauteur}(\Psi_2(\nu, A, A')) & = 1 + \max\{\text{hauteur}(A), \text{hauteur}(A')\} \end{cases}$$

Proposition 2.11. *Le nombre de nœuds externes d'un arbre binaire de hauteur au plus h est au plus 2^h .*

Démonstration. $\color{red}{\curvearrowright}$ —

□

Terme associé à un arbre binaire. Nous utiliserons également les symboles d'opérateurs \circ et \square en lieu et place des symboles d'opérateurs ω_2 et ω_0 pour écrire les termes représentatifs des classes d'isomorphisme d'arbres binaires. Pour des raisons de lisibilité nous écrirons ces termes sous forme parenthésée et nous utiliserons la convention d'écriture

$$(\circ, A, B)$$

au lieu de $\circ(A, B)$.

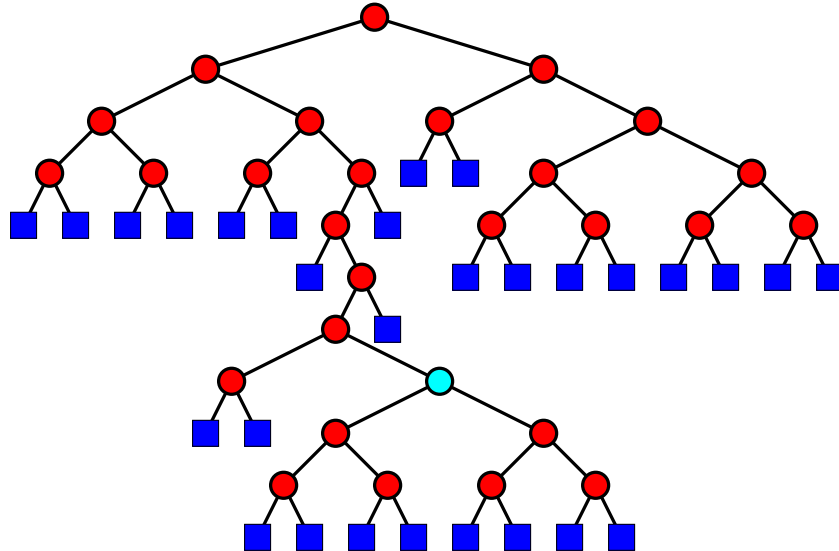
Ainsi les termes représentatifs des classes d'isomorphismes des arbres binaires de taille 0,1,2 et 3 de la Figure 10 sont

0	\square	b
1	$(\circ, \square, \square)$	abb
2	$(\circ, (\circ, \square, \square), \square)$	$aabbb$
	$(\circ, \square, (\circ, \square, \square))$	$ababb$
3	$(\circ, (\circ, (\circ, \square, \square), \square), \square)$	$aaabbbb$
	$(\circ, (\circ, \square, (\circ, \square, \square)), \square)$	$aababbb$
	$(\circ, \square, (\circ, (\circ, \square, \square), \square))$	$abaabbb$
	$(\circ, \square, (\circ, \square, (\circ, \square, \square)))$	$abababb$
	$(\circ, (\circ, \square, \square), (\circ, \square, \square))$	$aabbabb$
4	...	

Exercice 2.14. Quels sont les nombres de nœuds externes des arbres binaires A_n définis par les relations $A_0 = \square$, $A_{n+1} = (\circ, A_n, \square)$. Même question avec les arbres binaires A_n définis par $A_0 = \square$, $A_{n+1} = (\circ, A_n, A_n)$. 2.14

Exercice 2.15. Ecrire en pseudo-code des procédures de complexité linéaire pour passer de l'écriture non paranthésée à l'écriture parenthésée d'un terme. (On donnera des procédures récursives et non récursives.) 2.15

Chemins de recherche des nœuds d'un arbre binaire. Nous utiliserons les lettres G et D en lieu et place des lettres G_1 et G_2 pour écrire les chemins de recherche des nœuds d'un arbre binaire. Par exemple le chemin de recherche du nœud cyan de l'arbre



est

$GDDGDGD$

Il est clair (\Leftarrow) que l'ensemble des chemins de recherche $\text{CheRech}(A)$ d'un arbre binaire A ne dépend que de sa classe d'isomorphisme et en est un codage : *deux arbres binaires sont isomorphes si et seulement si ils ont le même ensemble de chemins de recherche.* Les ensembles de chemins de recherche des arbres binaires de taille 0,1,2 et 3 sont ainsi les suivants :

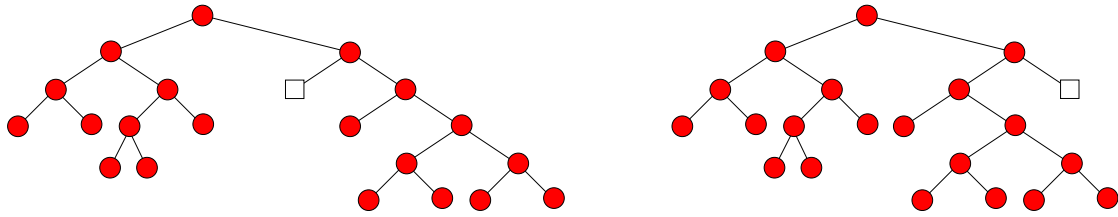
A	$\text{CheRech}(A)$
0 \square	(ϵ)
1 $(\circ, \square, \square)$	(ϵ, G, D)
2 $(\circ, (\circ, \square, \square), \square)$	(ϵ, G, GG, GD, D)
$(\circ, \square, (\circ, \square, \square))$	(ϵ, G, D, DG, DD)
3 $(\circ, (\circ, (\circ, \square, \square), \square), \square)$	$(\epsilon, G, GG, GGG, GGD, GD, D)$
$(\circ, (\circ, \square, (\circ, \square, \square)), \square)$	$(\epsilon, G, GG, GD, GDG, GDD, D)$
$(\circ, \square, (\circ, (\circ, \square, \square), \square))$	$(\epsilon, G, D, DG, DGG, DGD, DD)$
$(\circ, \square, (\circ, \square, (\circ, \square, \square)))$	$(\epsilon, G, D, DG, DD, DDG, DDD)$
$(\circ, (\circ, \square, \square), (\circ, \square, \square))$	$(\epsilon, G, GG, GD, D, DG, DD)$
4 ...	

Exercice 2.16. Dans quel ordre avons-nous rangé les chemins de recherche dans les listes ci-dessus ? 2.16

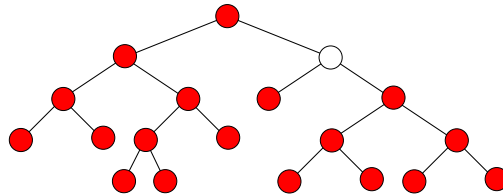
Exercice 2.17. Donner une caractérisation des langages sur l'alphabet $\{G, D\}$ qui sont des ensembles de chemins de recherche d'arbres binaires. 2.17

Génération aléatoire d'un arbre binaire. Etant donné un arbre A et un sous-arbre propre B de A de chemin de recherche $X_1X_2 \dots X_{m+1}$, $X_i \in \{G, D\}$, on note $p(B, A)$ le sous-arbre de A de chemin de recherche $X_1X_2 \dots X_m$ et $s(B, A)$ le sous-arbre de A de chemin de recherche $X_1X_2 \dots \bar{X}_{m+1}$ où $\bar{X} = G$ si $X = D$; D sinon.

Soit \mathcal{F}_{n+1} l'ensemble des classes d'isomorphismes d'arbres binaires de taille $n + 1$ dont un nœud externe est distingué, soit \mathcal{N}_n l'ensemble des classes d'isomorphismes d'arbres binaires de taille $n \geq 0$ dont un sous-arbre est distingué et soit $r : \mathcal{F}_{n+1} \rightarrow \mathcal{N}_n$ l'application qui associe à l'arbre A , distingué en le nœud externe ν , l'arbre, distingué en $s(\nu, A)$, obtenu à partir de A en substituant au sous-arbre $p(\nu, A)$ l'arbre $s(\nu, A)$. Par exemple l'image par r des deux arbres suivant distingués en la feuille blanche :



est l'arbre suivant distingué en le sous-arbre de racine le nœud blanc :



En d'autres termes en désignant la classe d'isomorphisme d'un arbre binaire dont un sous-arbre est distingué par le Ω -terme associé, marqué, en le soulignant par exemple, en le sous-terme correspondant au sous-arbre distingué, l'application r est définie par

$$r(X(\circ, \underline{\square}, Y)Z) = r(X(\circ, Y, \underline{\square})Z) = X\underline{Y}Z.$$

Théorème 2.12. L'application $r : \mathcal{F}_{n+1} \rightarrow \mathcal{N}_n$ est bien définie, surjective et tout élément de \mathcal{N}_n a deux antécédents par r .

Démonstration. \Leftarrow

□

De cette correspondance nous déduisons (\Leftarrow) que le nombre a_n de classes d'isomorphismes d'arbres binaires de taille n vérifie la relation de récurrence

$$2(2n + 1)a_n = (n + 2)a_{n+1}.$$

De cette relation de récurrence et de la condition initiale $a_0 = 1$ on déduit facilement que le nombre de classes d'isomorphismes d'arbres binaires de taille n est le n -ième nombre de Catalan. En effet :

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_0} &= \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} \\
&= \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2(2k+1)}{k+2} \\
&= \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{(2n)!}{n!n!(n+1)} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}
\end{aligned}$$

De cette correspondance nous déduisons aussi un algorithme efficace de génération aléatoire selon la loi uniforme d'un arbre binaire de taille donnée : un arbre binaire aléatoire de taille $n+1$ est obtenu à partir d'un arbre binaire aléatoire A de taille n en choisissant de manière aléatoire selon la loi uniforme l'un de ses $2n+1$ sous-arbres Y puis en remplaçant Y dans A par l'un des deux arbres (\circ, \square, Y) , (\circ, Y, \square) , chacun étant choisi avec probabilité $1/2$.

Exercice 2.18. Implémenter cet algorithme de génération aléatoire d'un arbre binaire et vérifier expérimentalement la formule suivante pour la profondeur moyenne d'un nœud interne :

$$p(n) = \frac{4^n - \frac{3n+1}{n+1} \binom{2n}{n}}{\frac{n}{n+1} \binom{2n}{n}} = \sqrt{\pi n} \left(1 + \frac{9}{8n} + \frac{17}{128n^2} + O(n^{-3}) \right) - 3 - \frac{1}{n}$$

n	10	20	50	100	200	500	∞
$p(n)/\sqrt{n}$	0.99	1.19	1.38	1.49	1.57	1.64	1.77

2.18

Exercice 2.19. Appliquer une **rotation droite** à un arbre binaire consiste à substituer à l'un de ses sous-arbres ayant un sous-arbre gauche non vide,

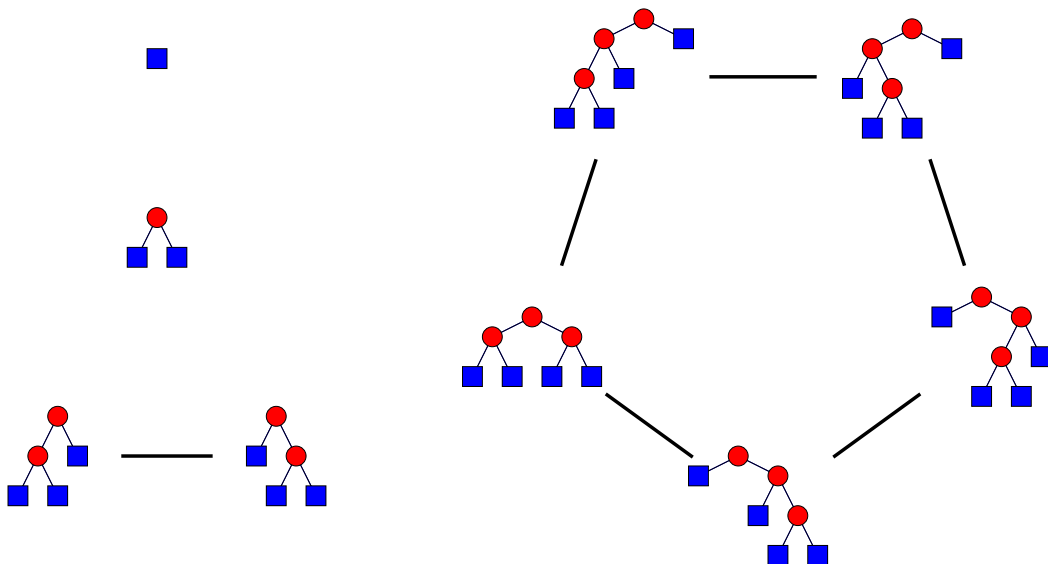
$$\Psi_2(\nu_1, \Psi_2(\nu_2, A, B), C)$$

l'arbre

$$\Psi_2(\nu_1, A, \Psi_2(\nu_2, B, C)).$$

L'opération inverse est appelée **rotation gauche**. L'application d'une rotation à un arbre binaire ne change pas sa taille, ne change pas l'ordre infixe de ses nœuds mais peut changer sa hauteur.

Quels sont les arbres binaires auxquels on ne peut appliquer de rotations droites ? de rotations gauches ? Que peut-on en déduire sur les graphes de rotations, i.e. les graphes de nœuds les arbres binaires sur un ensemble donné de nœuds et d'arêtes les paires d'arbres binaires reliés par une rotation ? Voici par exemple les graphes de rotations sur les arbres binaires de tailles 0, 1, 2 et 3. 2.19



Exercice 2.20. Soit $\text{Ly} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$ l'application définie sur l'ensemble \mathcal{A} des (classes d'isomorphisme d') arbres binaires et à valeurs dans le monoïde libre \mathcal{M} de base \mathbb{N} par les relations

$$\begin{cases} \text{Ly}(\square) & = \epsilon \\ \text{Ly}((\circ, A, A')) & = \text{Ly}(A) \oplus (c) \oplus \text{Ly}(A') \end{cases}$$

où \oplus désigne l'opération de concaténation dans \mathcal{M} et où c est le produit du nombre de nœuds externes de A par le nombre de nœuds externes de A' . En d'autres termes pour tout arbre binaire A

$$\text{Ly}(A) = (c(\nu_1), c(\nu_2), \dots, c(\nu_n))$$

où $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ est la suite des nœuds internes de A rangés en ordre infixe et où $c(\nu_i)$ est le produit des nombres de nœuds externes des sous-arbres gauche et droit du sous-arbre de A de racine ν_i . Le scalaire $c(\nu)$ est appelé la **coordonnée de Loday** du nœud interne ν de l'arbre binaire A et le vecteur $\text{Ly}(A)$ est appelé son **vecteur de Loday**. En particulier :

	A	$\text{Ly}(A)$
0	\square	ϵ
1	$(\circ, \square, \square)$	(1)
2	$(\circ, (\circ, \square, \square), \square)$ $(\circ, \square, (\circ, \square, \square))$	$(1, 2)$ $(2, 1)$
3	$(\circ, (\circ, (\circ, \square, \square), \square), \square)$ $(\circ, (\circ, \square, (\circ, \square, \square)), \square)$ $(\circ, \square, (\circ, (\circ, \square, \square), \square))$ $(\circ, \square, (\circ, \square, (\circ, \square, \square)))$ $(\circ, (\circ, \square, \square), (\circ, \square, \square))$	$(1, 2, 3)$ $(2, 1, 3)$ $(3, 1, 2)$ $(3, 2, 1)$ $(1, 4, 1)$
4	...	

Question 1.— Soit A_n la suite d'arbres binaires définie par les relations de récurrence $A_0 = \square$, $A_{n+1} = (\circ, A_n, \square)$. Calculer la k -ième coordonnée du vecteur de Loday de A_n en fonction de k . Même question avec la suite d'arbres binaires définie par $A_0 = \square$, $A_{n+1} = (\circ, A_n, A_n)$.

Question 2.— Montrer que l'application qui associe à un arbre binaire son vecteur de Loday est injective.

Question 3.— Quels sont les arbres binaires de vecteur de Loday $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$, $(1, 4, 1, 16, 1, 4, 1)$ et $(1, 8, 1, 4, 1, 12, 1)$? 2.20

Solution 2.1.	↗
2.1	
Solution 2.2.	↗
2.2	
Solution 2.3.	↗
2.3	
Solution 2.4.	↗
2.4	
Solution 2.5.	↗
2.5	
Solution 2.6.	↗
2.6	
Solution 2.7.	↗
2.7	
Solution 2.8.	↗
2.8	
Solution 2.9.	↗
2.9	
Solution 2.10.	↗
2.10	
Solution 2.11.	↗
2.11	
Solution 2.12.	↗
2.12	
Solution 2.13.	↗
2.13	
Solution 2.14.	↗
2.14	
Solution 2.15.	↗
2.15	
Solution 2.16.	↗
2.16	
Solution 2.17.	↗
2.17	

Solution 2.18. ↗
2.18

Solution 2.19. ↗
2.19

Solution 2.20. ↗
2.20

Références

- [1] M. Aigner and G. M. Ziegler. *Proofs from THE BOOK*. Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [2] M. Ajtai, V. Chvátal, M. Newborn, and E. Szemerédi. Crossing-free subgraphs. *Ann. Discrete Math.*, 12 :9–12, 1982.
- [3] N. Alon and J. Spencer. *The Probabilistic Method*. John Wiley & Sons, New York, NY, 1992.
- [4] A. Andrzejak, B. Aronov, S. Har-Peled, R. Seidel, and E. Welzl. Results on k -sets and j -facets via continuous motion arguments. In *Proc. 14th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom.*, pages 192–199, 1998.
- [5] T. K. Dey. Improved bounds on planar k -sets and related problems. *Discrete Comput. Geom.*, 19 :373–382, 1998.
- [6] P. Erdős, L. Lovász, A. Simmons, and E. Straus. Dissection graphs of planar point sets. In J. N. Srivastava, editor, *A Survey of Combinatorial Theory*, pages 139–154. North-Holland, Amsterdam, Netherlands, 1973.
- [7] M. Heyvaert and F. T. Bruss. La méthode probabiliste. *Gazette des mathématiciens*, 124 :15–29, Apr. 2010.
- [8] F. T. Leighton. *Complexity issues in VLSI*. MIT Press, Cambridge, MA, 1983.
- [9] L. A. Székely. Crossing numbers and hard Erdős problems in discrete geometry. *Combinatorics, Probability and Computing*, 6 :353–358, 1997.
- [10] E. Szemerédi and J. Trotter, W.T. Extremal problems in discrete geometry. *Combinatorica*, 3(3-4) :381–392, 1983.
- [11] G. Toth. Point sets with many k -sets. *Discrete Comput. Geom.*, 26(2) :187–194, 2001.
- [12] U. Wagner. k -sets and k -facets. In J. E. Goodman, J. Pach, and R. Pollack, editors, *Surveys on Discrete and Computational Geometry : Twenty Years later*, volume 453 of *Contemporary Mathematics*, pages 443–513. American Mathematical Society, 2008.

3 Arbres binaires de recherche



Définition des arbres binaires de recherche - sous-ensemble canonique associé à un nœud - Chemin de recherche d'une clé : partition induite - insertion d'une clé - arbre binaire de recherche aléatoire - hauteur d'un abr de recherche aléatoire - Queue de distribution : borne de Chernoff pour les variables aléatoires harmoniques - notation $\tilde{O}(f(n))$.

Randomized Search Trees

by R. Seidel and C.R. Aragon, in *Algorithmica* 16, pages 464–497, 1996 (FOCS'89).

Abstract. We present a randomized strategy for maintaining balance in dynamically changing search trees that has optimal expected behavior. In particular, in the expected case a search or an update takes logarithmic time, with the update requiring fewer than two rotations. Moreover, the update time remains logarithmic, even if the cost of a rotation is taken to be proportional to the size of the rotated subtree. Finger searches and splits and joins can be performed in optimal expected time also. We show that these results continue to hold even if very little true randomness is available, i.e., if only a logarithmic number of truly random bits are available. Our approach generalizes naturally to weighted trees, where the expected time bounds for accesses and updates again match the worst-case time bounds of the best deterministic methods. We also discuss ways of implementing our randomized strategy so that no explicit balance information is maintained. Our balancing strategy and our algorithms are exceedingly simple and should be fast in practice.

Arbre binaire de recherche. Un **univers** est un ensemble totalement ordonné dont les éléments sont appelés des **clés**.

Soit S un ensemble de n clés d'un univers \mathcal{U} .

Un **arbre binaire de recherche** sur S est un arbre binaire de taille n dont les nœuds internes sont étiquetés bijectivement par les clés de S de la manière suivante : le nœud de rang k pour l'ordre infixé sur les nœuds internes de l'arbre est étiqueté par la clé de rang k pour l'ordre sur les clés de S induit par l'ordre total sur l'univers, cf. Figure 12.

Soit B un arbre binaire de recherche (abr, en abrégé) sur S et soit ν un nœud de B .

Le **sous-ensemble canonique** du nœud ν ou encore le **sous-ensemble canonique** du sous-arbre de racine ν est l'ensemble $\mathcal{S}(\nu)$ des clés des nœuds du sous-arbre de racine ν .

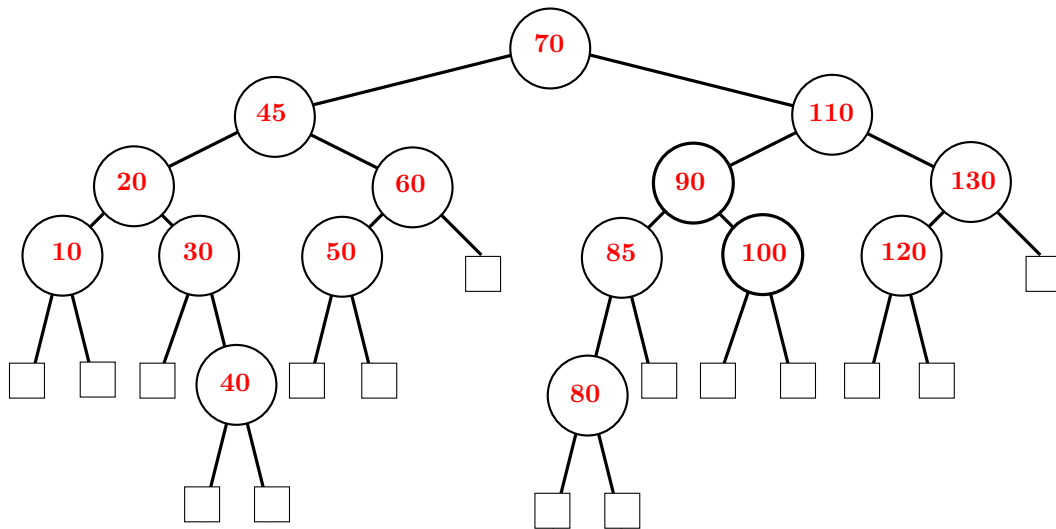


FIGURE 12 – Un arbre binaire de recherche sur l'ensemble des entiers 10, 20, 30, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 85, 90, 100, 110, 120 et 130

Par exemple pour l'arbre binaire de recherche de la Figure 12 et en désignant un nœud par son chemin de recherche

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}(GGD) &= \{30, 40\} \\
 \mathcal{S}(GD) &= \{50, 60\} \\
 \mathcal{S}(DG) &= \{80, 85, 90, 100\} \\
 \mathcal{S}(DDG) &= \{120\}
 \end{aligned}$$

Proposition 3.1. Soit B un arbre binaire de recherche sur l'ensemble S et soit a la clé de la racine de B . Alors

- (1-) $\mathcal{S}(\epsilon) = S$;
- (2-) $\mathcal{S}(G) = \{k \in S \mid k < a\}$;
- (3-) $\mathcal{S}(D) = \{k \in S \mid k > a\}$.

De plus tout sous-arbre de B est un arbre binaire de recherche sur le sous-ensemble canonique associé.

Exercice 3.1. Soit B un abr sur S de taille n et de hauteur h . Montrer que

$$\sum_{\nu} \#\mathcal{S}(\nu) = O(nh)$$

où ν décrit l'ensemble des nœuds internes de B .

3.1

Recherche d'une clé. Le **chemin de recherche** d'une clé dans un abr est

- (1-) le mot vide si l'abr est un arbre vide (réduit à une feuille) ou si la clé est la clé de la racine de l'abr ;
- (2-) le chemin de recherche de la clé dans le sous-arbre gauche de l'abr préfixé de la lettre G si la clé est strictement inférieure à la clé de la racine de l'abr ;
- (3-) le chemin de recherche de la clé dans le sous-arbre droit de l'abr préfixé de la lettre D si la clé est strictement supérieure à la clé de la racine de l'abr.

Par exemple le chemin de recherche de la clé 84 dans l'abr de la Figure 12 est $DGGGD$.

Les clés d'un chemin de recherche X sont les clés des nœuds dont les chemins de recherche sont les préfixes de X . Par exemple les clés du chemin de recherche $DGGGD$ de l'abr de la Figure 12 sont 70, 110, 90 et 85

Proposition 3.2. *Soit B un abr sur S et soit $k \in \mathcal{U}$. Alors $k \in S$ si et seulement si son chemin de recherche dans B est le chemin de recherche d'un nœud interne.* \square

La recherche d'une clé dans un abr consiste à comparer la clé avec les clés de son chemin de recherche. Son coût en nombre de comparaisons est ainsi égal à la longueur de son chemin de recherche augmentée d'une unité dans le cas d'une recherche avec succès, i.e., dans le cas où la clé est la clé d'un nœud interne de l'abr. Ce coût est donc un grand- O de la hauteur de l'abr.

Recherche des clés incluses dans un intervalle. Nous considérons le problème de reporter les clés de S comprises entre deux clés données x et x' avec $x < x'$.

Soit $X = X_1X_2 \dots X_m$, $m \geq 0$, $X_i \in \{G, D\}$, un chemin de recherche d'un arbre binaire de recherche sur un ensemble de clés S et soit $X' = X_1X_2 \dots X_{m'}$ un préfixe de X . Les **sous-arbres pendants à gauche de X au delà de X'** sont, outre le sous-arbre de chemin de recherche XG dans le cas où X est le chemin de recherche d'un nœud interne, les sous-arbres de chemins de recherche les $X_1X_2 \dots X_{i-1}G$ où i décrit l'ensemble des indices $m' < j \leq m$ tels que $X_j = D$. Les **sous-arbres pendants à droite de X au delà de X'** sont, outre le sous-arbre de chemin de recherche XD dans le cas où X est le chemin de recherche d'un nœud interne, les sous-arbres de chemins de recherche les $X_1X_2 \dots X_{i-1}D$ où i décrit l'ensemble des indices $m' < j \leq m$ tels que $X_j = G$.

Proposition 3.3. *Soit x un clé non nécessairement dans S . La famille des sous-ensembles canoniques des sous-arbres non vides **pendants à droite** du chemin de recherche de x est une partition de l'ensemble des éléments de S **strictement supérieurs** à x privé des clés du chemin de recherche de x . De même, la famille des sous-ensembles canoniques des sous-arbres non vides pendants à gauche du chemin de recherche de x est une partition de l'ensemble des éléments de S **strictement inférieurs** à x privé des clés du chemin de recherche de x .* \square

Par exemple pour l'arbre binaire de recherche de la Figure 13

$$\begin{aligned} \{k \in S \mid k < 100\} &= \mathcal{S}(G) \cup \mathcal{S}(DGG) \cup K(\{\epsilon, DG\}) \\ &= \{10, 20, 30, 40, 45, 50, 60\} \cup \{80, 85\} \cup \{70, 90\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{k \in S \mid 100 < k\} &= \mathcal{S}(DD) \cup K(DD) \\ &= \{120, 130\} \cup \{110\} \end{aligned}$$

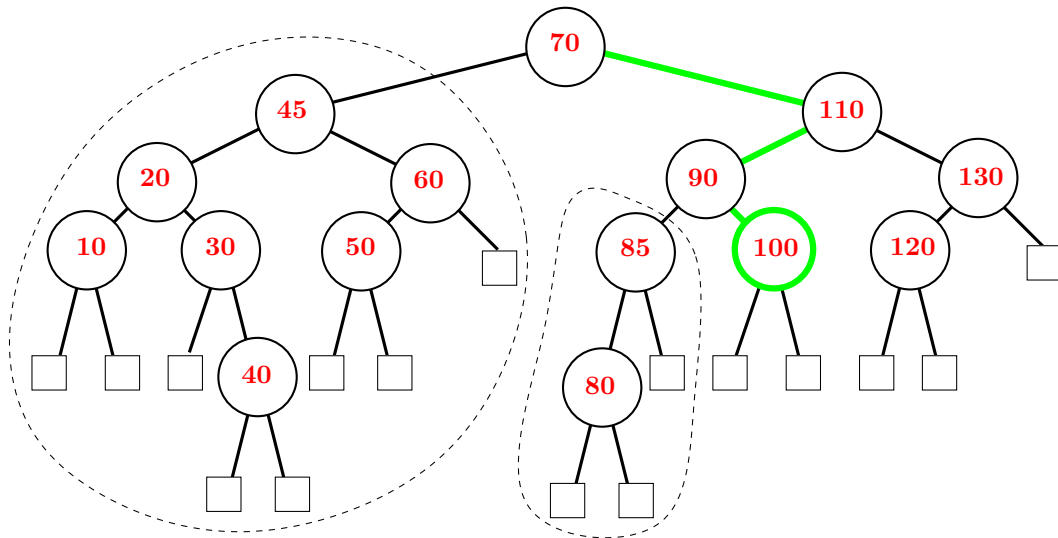


FIGURE 13 – Partition des clés associée à un chemin de recherche

Proposition 3.4. Soient x et x' deux clés non nécessairement dans S avec $x < x'$. La famille des sous-ensembles canoniques des sous-arbres non vides pendants à gauche du chemin de recherche de x et des sous-ensembles canoniques pendant à droite du chemin de recherche de x' et ce au delà de leur plus long préfixe commun est une partition de l'ensemble des clés de l'intervalle ouvert (x, x') privé des clés des nœuds des chemins de recherche de x et x' .

Par exemple pour l'arbre binaire de recherche de la Figure 14 :

$$\begin{aligned} \{k \in S \mid 20 < k < 130\} &= \mathcal{S}(DGGD) \cup \mathcal{S}(DGD) \cup \mathcal{S}(DDG) \cup \mathcal{S}(DDDG) \\ &\quad \cup K(\{DG, D, DD\}) \\ &= \{30, 40\} \cup \{50, 60\} \cup \{80, 85, 90, 100\} \cup \{120\} \cup \{45, 70, 110\} \end{aligned}$$

Ainsi le coût en nombre de comparaisons du problème de reporter les clés de S compris entre deux clés données est un grand- O de la hauteur de l'abr sur S .

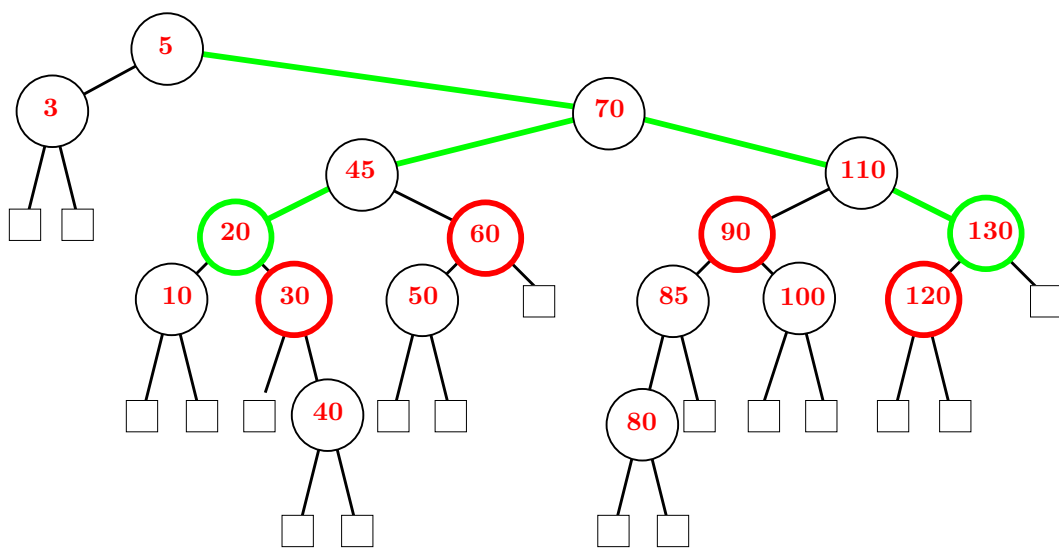


FIGURE 14 – Partition de l'ensemble des clés de l'intervalle ouvert $(20, 130)$ en termes de sous-ensembles canoniques

Insertion d'une clé dans un arbre binaire de recherche. Soit B un abr sur S de taille n et soit

$$\tau_1, \nu_1, \tau_2, \dots, \nu_n, \tau_{n+1}$$

la suite en ordre infixe des nœuds internes et externes de B . Nous étendons l'application K qui à un nœud interne ν associe sa clé $K(\nu)$ aux nœuds externes en posant

$$K(\tau_i) = \{k \in \mathcal{U} \mid K(\nu_{i-1}) < k < K(\nu_{i+1})\}$$

avec la convention $K(\nu_0) = \hat{0}$ et $K(\nu_{n+1}) = \hat{1}$.

L'insertion d'une clé $k \notin S$ dans B consiste à substituer à la feuille τ de B définie par la condition $k \in K(\tau)$ un arbre binaire de taille 1

$$\Psi_2(\alpha, \Psi_0(\beta), \Psi_0(\gamma))$$

étiqueté k , i.e., $K(\alpha) = k$, où α, β et γ sont de nouveaux nœuds. Notons $\text{insert}(k, B)$ le résultat de cette opération de substitution. Clairement

- (1-) $\text{insert}(k, B)$ est un abr sur $S + k$;
- (2-) le chemin de recherche de la clé k dans $\text{insert}(k, B)$ est le chemin de recherche de la clé k dans B .

Résumons

Proposition 3.5. *Soit B un abr sur S et soit $k \in \mathcal{U}$, $k \notin S$. Alors l'arbre binaire obtenu à partir de B en substituant à la feuille de chemin de recherche le chemin de recherche de k un arbre binaire de type $(\circ, \square, \square)$ étiqueté k est un abr sur $S + k$. \square*

Le coût en nombre de comparaisons de k dans B est alors défini comme le coût de sa recherche dans B ou de manière équivalente comme la longueur du chemin de recherche de k dans l'arbre $\text{insert}(k, B)$.

Nous étendons de manière naturelle la procédure d'insertion dans un abr en posant pour tout mot u sur l'univers des clés

$$\text{insert}(u, B) = \begin{cases} B & \text{si } u \text{ est le mot vide} \\ \text{insert}(k, \text{insert}(v, B)) & \text{si } u = vk, k \in \mathcal{U} \end{cases}$$

où $\text{insert}(k, B) = B$ dans le cas où k est une clé de B .

Le coût en nombre de comparaisons de l'insertion d'une suite de clés distinctes deux à deux dans un arbre initialement vide est donc égal à la somme des longueurs des chemins de recherche des nœuds internes dans l'arbre final. Cette quantité est appelée la **longueur de cheminement interne** de l'arbre :

$$\begin{aligned} \text{lci}(A) &= \sum_{\nu} |\text{CheRech}(\nu, A)| \\ &= \sum_k kn_k \end{aligned}$$

où ν décrit l'ensemble des nœuds internes de A et où n_k est le nombre de nœuds internes de profondeur k .

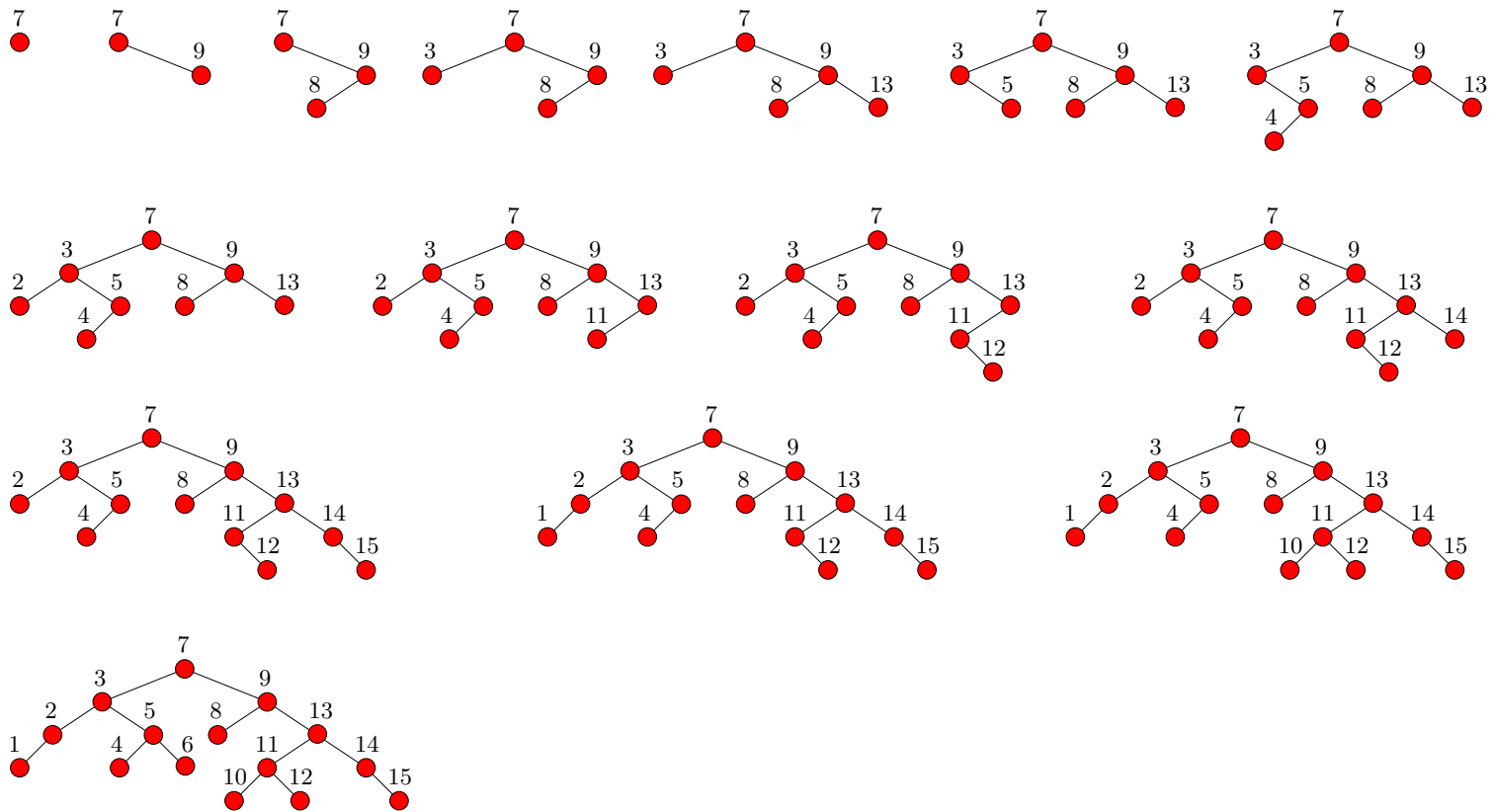


FIGURE 15 – La suite des quinze arbres binaires de recherche successivement produits lors de l'insertion de la suite d'entiers $[7, 9, 8, 3, 13, 5, 4, 2, 11, 12, 14, 15, 1, 10, 6]$ dans un arbre initialement vide. Le coût de construction de l'arbre final, en nombre de comparaisons, est sa longueur de cheminement interne, ici $37 (= 2 \times 1 + 4 \times 2 + 5 \times 3 + 3 \times 4)$.

Hauteur d'un arbre binaire de recherche aléatoire. Un arbre binaire de recherche aléatoire sur un ensemble S de n clés est un arbre binaire de recherche sur S dont la classe d'isomorphisme est choisie de manière aléatoire pour la loi uniforme dans le multi-ensemble des classes d'isomorphismes des

$$\text{insert}(\sigma, \square),$$

où σ décrit l'ensemble des permutations des clés de S . Un tel arbre est obtenu en insérant successivement aux feuilles d'un arbre binaire de recherche initialement vide les n clés selon un ordre aléatoire pour la loi uniforme.

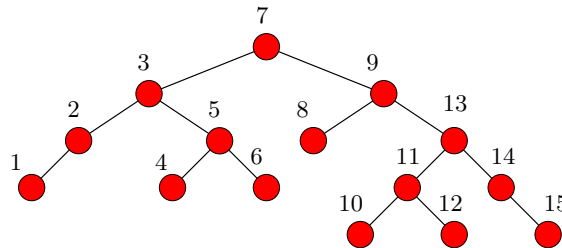
Le lecteur vérifiera facilement que les 3 permutations suivantes des entiers de 1 à 15

$$[7, 3, 2, 1, 5, 4, 6, 9, 8, 13, 11, 10, 12, 14, 15]$$

$$[7, 9, 13, 14, 15, 11, 10, 12, 8, 3, 2, 1, 5, 6, 4]$$

$$[7, 3, 2, 1, 5, 6, 4, 9, 13, 14, 15, 11, 10, 12, 8]$$

conduisent au même arbre binaire de recherche à isomorphisme près :



De fait le nombre de permutations conduisant à cet arbre est

$$\frac{15!}{15 \times 6 \times 8 \times 2 \times 3 \times 6 \times 3 \times 2}$$

soit 8 408 400. Chiffre à comparer au

$$15! = 87178291200 \times 15 = 130\,767\,436\,800$$

permutations et au


$$\frac{1}{16} \binom{30}{15} = 9\,694\,845$$

arbres binaires de taille 15.

Théorème 3.6 (Formule des équerres). Soit B un arbre binaire de recherche sur un ensemble de n clés. Alors le nombre de permutations des n clés produisant l'arbre binaire de recherche B est égal à

$$\frac{n!}{\prod_{\sigma} t(\sigma)}$$

où σ décrit l'ensemble des nœuds internes de l'arbre B et où $t(\sigma)$ est la taille du sous-arbre de B de racine σ .

Démonstration.  —

□

Exercice 3.2. Quels sont les arbres binaires de recherche sur un ensemble de n clés produit par une unique permutation des clés ? par le plus grand nombre de permutations ?

3.2

Théorème 3.7. *La hauteur d'un arbre binaire de recherche aléatoire sur un ensemble de n clés est un $\tilde{O}(\log n)$, i.e., que la probabilité que cette hauteur soit $\geq c \log n$ est inférieure à $1/p(n)$ où $p(n)$ est un polynôme en n dont le degré tend vers l'infini lorsque c tend vers l'infini.*

Démonstration.  —

□

Théorème 3.8. *Le problème du tri par comparaisons d'un ensemble totalement ordonné de n éléments est résoluble en $\tilde{O}(n \log n)$ comparaisons.*

Démonstration.  —


□

Borne de Chernoff relative aux variables aléatoires harmoniques.

Théorème 3.9. Soit X_1, X_2, \dots, X_n une suite de n variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes et de paramètres respectifs $1, 1/2, \dots, 1/n$, soit $X = \sum_{i=1}^n X_i$ et $c \geq 1$. Alors

(1-) $E[X] = H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, le n -ième nombre harmonique.

(2-) $\text{Prob}[X \geq cH_n] \leq e^{-(1+c \ln \frac{c}{e})H_n} = O\left(\frac{1}{n^{1+c \ln c/e}}\right)$. □

Démonstration.  — □

C'est un cas particulier des inégalités à large déviation inspirées du Théorème central limite [2, 1].

Solution 3.1. ↗
3.1

Solution 3.2. ↗
3.2

Références

- [1] K. M. Ball. An elementary introduction to modern convex geometry. In *Flavors of geometry* (*S. Levy editor*), volume 31 of *Mathematical sciences research institute*, pages 1–58. Cambridge University Press, 1997.
- [2] S. Levy, editor. *Flavors of Geometry*. Number 31 in MSRI Publications. Cambridge University Press, 1997.

4 Treillis des faces d'un polytope



Terminologie des treillis - cônes, cônes finiment engendrés, cônes polyédriques - le langage de la géométrie affine - convexes, convexes finiment engendrés, convexes polyédriques, polytopes - Lemme de Farkas et procédure d'élimination de Fourier-Motzkin - autres formulations du Lemme de Farkas - partie linéaire et cône de récession - treillis des faces d'un polytope - treillis et étoiles - treillis et polarité - graphe d'un polytope - simplexes, cocubes, permutaèdres, polytopes cycliques - théorème de la borne supérieure pour les polytopes

The maximal number of faces of a convex polytope
by P. McMullen, in *Mathematika*, 17 :179–184, 1970

Abstract. In this paper we give a proof of the long-standing Upper-bound Conjecture for convex polytopes, which states that, for $1 \leq j < d < v$, the maximum possible number of j -faces of a d -polytope with v vertices is achieved by a cyclic polytope $C(v, d)$.

La terminologie des treillis. Nous utiliserons la terminologie suivante relative aux ensembles finis partiellement ordonnés.

Un **ensemble partiellement ordonné** (epo en abrégé) est un ensemble fini muni d'un ordre partiel.

Un epo est **borné** si il possède un minimum et un maximum, habituellement notés $\hat{0}$ et $\hat{1}$. Soit (S, \leq) un epo.

Pour $x, y \in S$, $x \leq y$, l'**intervalle** $[x, y]$ est l'ensemble des $z \in S$ tels que $x \leq z \leq y$.

Une **chaîne** de (S, \leq) est un sous-ensemble de S totalement ordonné par \leq ; sa **longueur** est son nombre d'éléments moins 1.

Un epo borné (S, \leq) est **gradué** si les chaînes maximales ont la même longueur. Dans ce cas le **rang** d'un élément x de S est la longueur d'une chaîne maximale de l'intervalle $[\hat{0}, x]$. Le rang de $\hat{1}$ est aussi appelé la **longueur** de (S, \leq) .

L'**opposé** de (S, \leq) est l'epo (S, \leq^*) où $x \leq^* y$ si $y \leq x$.

Un **treillis** est un epo tel que toute paire d'éléments admet un unique plus grand mineur ou borne inférieure et admet un unique plus petit majorant ou borne supérieure¹; les lois internes associées sont habituellement notées \wedge et \vee :

$$x \wedge y = \inf(x, y), \quad x \vee y = \sup(x, y).$$

Les **atomes** d'un treillis sont les éléments minimaux du treillis privé de son élément minimal. Les **coatoms** d'un treillis sont les éléments maximaux du treillis privé de son élément maximal. Un treillis **atomique** est un treillis dont tout élément est la borne supérieure d'un ensemble d'atomes. Un treillis **coatomique** est un treillis dont tout élément est la borne inférieure d'un ensemble de coatoms.

Par exemple, l'ensemble des parties d'un ensemble fini X , ordonné par inclusion, est un treillis gradué de longueur $|X|$, de fonction rang $r(Y) = |Y|$, d'élément minimum \emptyset , d'élément maximum X , d'atomes les singletons de X , de coatoms les complémentaires des atomes et de lois internes

$$\begin{aligned} F \wedge G &= F \cap G \\ F \vee G &= F \cup G. \end{aligned}$$

Un treillis **booléen** est un treillis isomorphe à l'ensemble, ordonné par inclusion, des parties d'un ensemble fini.

Exercice 4.1. Quel est le nombre d'éléments d'un treillis booléen de longueur $n+1$? Quel est son nombre d'éléments de rang $k+1$? Quel est son nombre de chaînes maximales? Que peut-t-on dire de l'opposé d'un treillis booléen? Un treillis booléen est-il atomique? coatomique? 4.1

1. Cette définition des treillis est donc plus restrictive que celle que nous avons introduite dans le premier chapitre de ces notes de cours.

Cônes, cônes finiment engendrés, cônes polyédriques. Nous travaillons dans un espace vectoriel \mathbb{E} sur \mathbb{R} de dimension finie. Le vecteur nul de \mathbb{E} est noté $0_{\mathbb{E}}$. Rappelons qu'une **combinaison linéaire** d'une famille $(u_i)_{i \in I}$ de vecteurs de \mathbb{E} est un vecteur de la forme

$$\sum_{i \in I} \lambda_i u_i$$

où $(\lambda_i)_{i \in I}$ est une famille de scalaires presque tous nuls et où, par convention, $\sum_{i \in \emptyset} \lambda_i u_i$ est le vecteur nul. Les λ_i sont appelés les **coefficients** de la combinaison linéaire. Une combinaison linéaire est dite **positive** si ses coefficients sont positifs.

Un **cône** de \mathbb{E} est un sous-ensemble non vide C de \mathbb{E} contenant les combinaisons positives de ses parties ou, de manière équivalente, les combinaisons positives de ses parties à au plus 2 éléments :

$$(\forall u \in C)(\forall v \in C)(\forall \lambda \in \mathbb{R}^+)(\forall \mu \in \mathbb{R}^+)(\lambda u + \mu v \in C).$$

En particulier un cône contient toujours le vecteur nul : c'est le produit du scalaire nul et d'un vecteur quelconque du cône.

Les sous-espaces vectoriels de \mathbb{E} sont des cônes, une intersection de cônes est un cône, l'image directe d'un cône par une application linéaire est un cône, l'image réciproque d'un cône par une application linéaire est un cône, etc. Le **cône nul** est le cône réduit au vecteur nul.

Les cônes de \mathbb{R} sont le cône nul $\{0\}$, \mathbb{R} et les demi-droites vectorielles \mathbb{R}^+ et \mathbb{R}^- .

Soit $u = (u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de \mathbb{E} . L'**enveloppe positive** ou **enveloppe conique** de la famille des u_i , notée $\text{Cone}(u)$, est le plus petit cône pour la relation d'inclusion contenant les u_i ou, de manière équivalente, l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients positifs des u_i :

$$\text{Cone}(u) = \bigcap \{C \subseteq \mathbb{E} \mid C \text{ est un cône de } \mathbb{E} \text{ et } \forall i \in I, u_i \in C\} \quad (1)$$

$$= \left\{ \sum_{i \in I} \alpha_i u_i \mid \alpha_i \geq 0 \text{ presque tous nuls} \right\}. \quad (2)$$

Le cône $\text{Cone}(u)$ est également appelé le cône **engendré** par les u_i .

Exercice 4.2. Soit u une famille de vecteurs de \mathbb{E} . Montrer que l'intersection des cônes contenant les u_i est l'ensemble des combinaisons positives des u_i . 4.2

Un **cône finiment engendré** est un cône engendré par une famille finie de vecteurs.

Un **cône polyédrique** est l'intersection d'une famille finie de **demi-espaces vectoriels** où, par définition, un **demi-espace vectoriel** ou **demi-espace linéaire** D de \mathbb{E} est l'image réciproque par une forme linéaire non nulle $\varphi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ de la demi-droite vectorielle \mathbb{R}^- de \mathbb{R} :

$$D = \{x \in \mathbb{E} \mid \varphi(x) \leq 0\}.$$

En particulier l'espace vectoriel \mathbb{E} est un cône polyédrique : c'est l'intersection de la famille vide de demi-espaces vectoriels.

Soit e_1, e_2, \dots, e_n une base ordonnée de \mathbb{E} , soit $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ une suite de m formes linéaires sur \mathbb{E} et soit $a_{ij} = \varphi_i(e_j)$. Alors le cône polyédrique intersection des demi-espaces linéaires $D_i = \{x \in \mathbb{E} \mid \varphi_i(x) \leq 0\}$, $1 \leq i \leq m$, $\varphi_i \neq 0$, est l'ensemble des vecteurs dont les coordonnées (x_1, x_2, \dots, x_n) dans la base des e_i sont les solutions du système d'inéquations linéaires

$$(**) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq 0 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq 0 \end{cases}$$

Système qu'il est utile d'écrire sous la forme matricielle

$$AX \leq 0_{m,1}$$

en posant $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $X = [x_i] \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 4.3. Montrer que \mathbb{E} est un cône finiment engendré et que $\{0_{\mathbb{E}}\}$ est un cône polyédrique. 4.3

Théorème 4.1 (Minkowski-Weyl). *Un cône est polyédrique si et seulement si il est finiment engendré.* □

Il existe au moins deux façons de démontrer ce résultat. Nous choisissons d'exposer une preuve constructive : la procédure de Fourier-Motzkin ou méthode de double description dont l'un des intérêts est d'avoir abouti au développement de logiciels (cdd+, Porta, voir ici <http://www.cs.mcgill.ca/~fukuda/>) permettant de passer d'une présentation d'un cône comme enveloppe conique d'une famille finie de vecteurs à une présentation comme intersection finie de demi-espaces et vice-versa. Dans la suite nous parlerons de \mathcal{V} -présentation pour une présentation comme enveloppe conique d'une famille finie de vecteurs et de \mathcal{H} -présentation pour une présentation comme intersection finie de demi-espaces.

Démonstration. ↪ — □

Exercice 4.4. Montrer que l'image directe d'un cône polyédrique par une application linéaire est un cône polyédrique. En est-il de même pour l'image réciproque? 4.4

Exercice 4.5. Déterminer une \mathcal{V} -présentation du cône $3x + 2y - 5z \leq 0$ de \mathbb{R}^3 . 4.5

Le langage des espaces affines. Soit \mathbb{E} un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie n .

Un **espace affine** de **direction** \mathbb{E} est un ensemble non vide \mathbb{A} , dont les éléments sont appelés **points**, muni d'une loi de composition externe de domaine d'opérateurs \mathbb{E} notée additivement

$$(a, u) \in \mathbb{A} \times \mathbb{E} \mapsto a + u \in \mathbb{A}$$

telle que

$$\begin{aligned} \text{(1-)} \quad & (\forall a \in \mathbb{A})(\forall u \in \mathbb{E})(\forall v \in \mathbb{E}) && (a + u) + v = a + (u + v); \\ \text{(2-)} \quad & (\forall a \in \mathbb{A})(\forall b \in \mathbb{A})(\exists! u \in \mathbb{E}) && b = a + u. \end{aligned}$$

Dans ce cas l'unique vecteur u tel que $b = a + u$ est noté $b - a$. En particulier $a - a = 0_{\mathbb{E}}$.

La **dimension** d'un espace affine est la dimension de sa direction.

Exercice 4.6. Montrer que $a - a = 0_{\mathbb{E}}$ pour tout point a .

4.6

L'exemple fondamental d'espace affine de direction \mathbb{E} est \mathbb{E} lui-même : la loi de composition externe étant l'addition dans \mathbb{E} .

Soit \mathbb{A} un espace affine de direction \mathbb{E} et soit $a \in \mathbb{A}$.

Le **vectorialisé** de \mathbb{A} en a , noté \mathbb{A}_a , est l'ensemble \mathbb{A} muni de la structure d'espace vectoriel obtenue en transposant celle de \mathbb{E} sur \mathbb{A} via l'application qui à $u \in \mathbb{E}$ associe $a + u \in \mathbb{A}$ (le lecteur aura noté que cette application est bijective). En particulier le vecteur nul de \mathbb{A}_a est le point a . Ainsi les espaces vectoriels \mathbb{E} et \mathbb{A}_a sont isomorphes, par exemple via l'application qui à $u \in \mathbb{E}$ associe $a + u$.

Un **repère affine** $(o, e_1, e_2, \dots, e_n)$ est la donnée d'un point $o \in \mathbb{A}$, appelé l'**origine** du repère, et d'une base ordonnée (e_1, e_2, \dots, e_n) de l'espace vectoriel \mathbb{E} . Les **coordonnées** du point x dans le repère $(o, e_1, e_2, \dots, e_n)$ sont alors les coordonnées du vecteur $x - o$ dans la base des e_i :

$$x = o + \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

Exercice 4.7. Quelle relation lie les coordonnées d'un point dans un premier repère affine et les coordonnées de ce même point dans un deuxième repère affine?

4.7

Les **sous-espaces affines** ou **sous-variétés affines** de \mathbb{A} sont les $a + \mathbb{F}$ où a décrit \mathbb{A} et \mathbb{F} décrit l'ensemble des sous-espaces vectoriels de \mathbb{E} . Naturellement $a + \mathbb{F} = a' + \mathbb{F}'$ si et seulement si $\mathbb{F} = \mathbb{F}'$ et $a' - a \in \mathbb{F}$ (\Leftarrow). Une sous-variété affine est munie de la structure naturelle d'espace affine héritée de la structure d'espace affine de l'espace affine initial par restriction de la loi de composition externe (quelle est la direction de la sous-variété affine $a + \mathbb{F}$? \Leftarrow). Les **hyperplans** sont les sous-espaces affines de codimension 1. Une intersection de sous-variétés affines est soit vide soit une sous-variété affine de direction l'intersection des directions des sous-variétés.

Les **demi-espaces** de \mathbb{A} sont les $a + D$ où a décrit \mathbb{A} et D décrit l'ensemble des demi-espaces vectoriels de \mathbb{E} .

Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille de points de \mathbb{A} et soit $(\alpha_i)_{i \in I}$ une famille de scalaires presque tous nuls telle que $\sum_{i \in I} \alpha_i = 1$. Le **barycentre** des points a_i affectés des poids α_i est l'unique point $g \in \mathbb{A}$ ($\neq \emptyset$) tel que pour tout point $o \in \mathbb{A}$

$$\sum_{i \in I} \alpha_i (x_i - o) = g - o.$$

Ce point est noté $\sum_{i \in I} \alpha_i x_i$ et un tel point est également appelé une **combinaison affine** des a_i . L'**enveloppe affine** des a_i est l'ensemble des combinaisons affines des a_i ; c'est une variété affine et c'est l'intersection des variétés affines contenant les a_i ($\neq \emptyset$).

Une famille de points est **affinement liée** si l'un de ses points est combinaison affine des autres; **affinement libre** sinon.

Une **base affine** de \mathbb{A} est une famille de points affinement libre d'enveloppe affine \mathbb{A} . La cardinalité d'une base affine est $n + 1$ et les **coordonnées** barycentriques de $x \in \mathbb{A}$ dans la base affine des $a_i, i \in I$ est l'unique famille de scalaires $\lambda_i, i \in I$, de somme 1 telle que

$$x = \sum_{i \in I} \lambda_i a_i.$$

Soit \mathbb{A}' un espace affine de direction \mathbb{E}' et soit $a \in \mathbb{A}$.

Une **application affine** de \mathbb{A} dans \mathbb{A}' est une application $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$ telle que pour tout $a \in \mathbb{A}$ et tout $u \in \mathbb{E}$

$$f(a + u) = f(a) + \varphi(u)$$

où φ est une application linéaire de \mathbb{E} dans \mathbb{E}' . On montre facilement que les applications affines sont exactement les applications de la forme

$$f(a + u) = a' + \varphi(u)$$

où φ décrit l'ensemble des applications linéaires de \mathbb{E} dans \mathbb{E}' , où a' décrit \mathbb{A}' et où a est un point quelconque de \mathbb{A} . Dans ce cas φ est unique et est appelée la partie linéaire de f .

Une **forme affine** sur \mathbb{A} est une application affine de \mathbb{A} dans l'espace affine \mathbb{R} .

pour poursuivre voir [3, Chap. 1]

Exercice 4.8. [Lemme de Radon] Soit A un ensemble de $n + 2$ points d'un espace affine de dimension n . Montrer qu'il existe deux ensembles disjoints $A_1, A_2 \subset A$ tels que $\text{Conv}(A_1) \cap \text{Conv}(A_2) = \emptyset$. 4.8

Exercice 4.9. [Théorème de Helly] Soit C_1, C_2, \dots, C_m une collection de $m \geq n + 1$ convexes d'un espace affine de dimension n telle que toute sous-collection de $n + 1$ convexes est d'intersection non vide. Montrer que l'intersection des C_i est non vide. 4.9

Convexes, convexes finiment engendrés, convexes polyédriques. Nous travaillons dans un espace affine \mathbb{A} de direction \mathbb{E} de dimension finie n . À l'occasion \mathbb{A} est identifié avec \mathbb{E} ou encore avec \mathbb{R}^n . Dans ce dernier cas on pourra noter $\langle x, y \rangle$ la somme $\sum_i x_i y_i$ pour $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Un **combinaison convexe** est une combinaison affine dont les coefficients sont positifs ou nuls.

Un **convexe** de \mathbb{A} est un sous-ensemble de \mathbb{A} contenant les combinaisons convexes de ses parties à deux éléments. Une intersection de (sous-ensembles) convexes est convexe, les sous-espaces affines sont des convexes, l'image directe d'un convexe par une application affine est convexe, l'image réciproque d'un convexe par une application affine est convexe, les demi-espaces sont des convexes. La **dimension** d'un convexe non vide est la dimension de son enveloppe affine. Les convexes de dimension 0 sont les points ; ceux de dimension 1 sont les droites, les demi-droites et les segments. Par convention la dimension du convexe vide est -1 . Un convexe de \mathbb{A} est d'intérieur non vide si et seulement si sa dimension est celle de l'espace \mathbb{A} .

Théorème 4.2 (Hahn-Banach). Soit C un convexe et soit $x \notin C$. Alors il existe un hyperplan passant par x qui évite C .

Démonstration. Admis. □

Soit $x = (x_i)_{i \in I}$ une famille de points de \mathbb{A} . L'**enveloppe convexe** des x_i , notée $\text{Conv}(x)$, est le plus petit convexe pour la relation d'inclusion contenant les x_i ou, de manière équivalente, l'ensemble des combinaisons convexes des x_i :

$$\text{Conv}(x) = \bigcap \{C \in \mathbb{A} \mid C \text{ est un convexe et } \forall i \in I, x_i \in C\} \quad (3)$$

$$= \left\{ \sum_{i \in I} \alpha_i x_i \mid \alpha_i \geq 0 \text{ presque tous nuls, } \sum_{i \in I} \alpha_i = 1 \right\}. \quad (4)$$

Exercice 4.10. Soit (x_i) une famille de points de \mathbb{A} . Montrer que l'intersection des convexes contenant les x_i est l'ensemble des combinaisons convexes des x_i . 4.10

Exercice 4.11. Soit E et F deux espaces affines, $A \subset E$ et $B \subset F$. Rappeler la définition de l'espace affine $E \times F$ et montrer que $\text{Conv}(A) \times \text{Conv}(B) = \text{Conv}(A \times B)$. 4.11

Un **simplexe** est l'enveloppe convexe de points affinement indépendants. Les points, les segments, les triangles, les tétraèdres sont les simplexes de dimensions respectives 0, 1, 2 et 3.

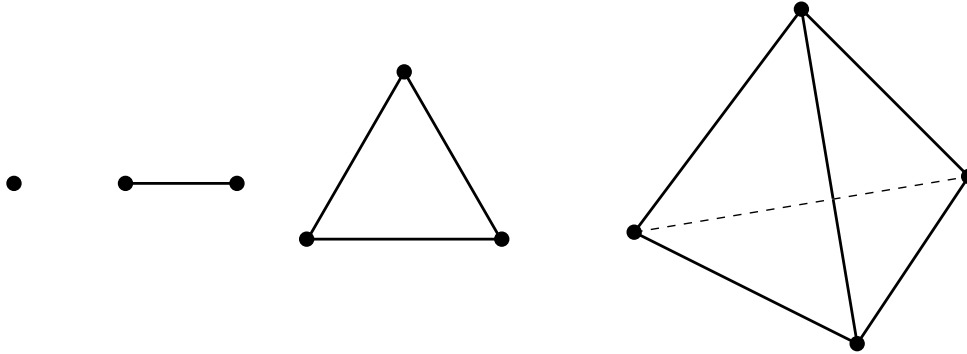


FIGURE 16 – Simplexes de dimension 0, 1, 2 et 3

Un **convexe finiment engendré** est l'enveloppe convexe d'une famille finie de points. Un **convexe polyédrique** ou **polyèdre (convexe)** est une intersection finie de demi-espaces. Un **polytope** est un polyèdre borné, i.e. ne contenant pas de demi-droites.

Soit $(o, e_1, e_2, \dots, e_n)$ un repère affine de \mathbb{A} et soit $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ une suite de m formes affines définies sur \mathbb{A} et posons $b_i = -\varphi_i(o)$ et $a_{ij} = \vec{\varphi}_i(e_j)$. Alors le polyèdre intersection des demi-espaces affines $\{x \in \mathbb{A} \mid \varphi_i(x) \leq 0\}$ est l'ensemble des points x dont les coordonnées (x_1, x_2, \dots, x_n) dans le repère $(o, e_1, e_2, \dots, e_n)$ sont les solutions du système d'inéquations affines

$$(**) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$$

Système qu'il nous sera utile d'écrire sous la forme matricielle

$$AX \leq B$$

en posant $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $X = [x_i] \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $B = [b_i] \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$

Théorème 4.3 (Minkowski-Weyl). *Un polyèdre est la somme d'un convexe finiment engendré et d'un cône finiment engendré ; réciproquement, la somme d'un convexe finiment engendré et d'un cône finiment engendré est un polyèdre. En particulier un polytope est un convexe finiment engendré et, réciproquement, un convexe finiment engendré est un polytope.*

Démonstration. $\color{red}{\triangleleft}$ —

□

Exercice 4.12. Montrer que l'image directe d'un polyèdre par une application affine est un polyèdre. En est-il de même pour l'image réciproque? 4.12

Lemme de Farkas et procédure d'élimination de Fourier-Motzkin.

$$\begin{array}{ll} A \in \mathbb{R}^{m \times n} & B \in \mathbb{R}^{m \times 1} \\ X \in \mathbb{R}^{n \times 1} & Y \in \mathbb{R}^{1 \times m} \end{array}$$

Pour $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $B \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ on note $\mathcal{P}(A, B)$ l'ensemble des $X \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ tels $AX \leq B$ et on note $\mathcal{Q}(A, B)$ l'ensemble des $Y \in \mathbb{R}^{1 \times m}$, $Y \geq 0$, tels que $YA = 0$ et $YB < 0$.

Lemme 4.4 (Lemme de Farkas I, 1894). $\mathcal{P}(A, B)$ est non-vide si et seulement si $\mathcal{Q}(A, B)$ est vide.

Le système $AX \leq B$ d'inconnue X n'admet pas de solution si et seulement si le système $YA = 0$ et $YB < 0$ d'inconnue Y admet une solution positive. \square

Preuve. $\color{red}{\blacktriangleleft}$ —

\square

Exercice 4.13. Soit L un sous-espace affine et P un polyèdre qui ne rencontre pas L . Montrer qu'il existe un hyperplan passant par L et ne rencontrant pas P . 4.13

$\color{blue}{\blacklozenge}$ Expliquer que nous allons montrer comment calculer une \mathcal{H} -présentation de l'image d'un polyèdre par une application linéaire/affine à partir d'une \mathcal{H} -présentation du polyèdre initial.

Théorème 4.5 (Elimination - Procédure d'élimination de Fourier-Motzkin). Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, $E \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $P = \mathcal{P}(A, B)$ et $L = \mathbb{R}E$. Alors la somme $P + L$ est un polyèdre. De plus

$$P + L = \mathcal{P}(FA, FB)$$

où F est une matrice positive telle que $FAE = 0$, i.e., L est parallèle aux hyperplans frontières des demi-espaces définissant le polyèdre $P + L$ donnés par la matrice FA .

Démonstration. $\color{red}{\blacktriangleleft}$ —

\square

$\color{blue}{\blacklozenge}$ Commenter l'efficacité de la procédure de Fourier-Motzkin.

Autres formulations du Lemme de Farkas.

$$\begin{array}{ll} A \in \mathbb{R}^{m \times n} & B \in \mathbb{R}^{m \times 1} \\ X \in \mathbb{R}^{n \times 1} & Y \in \mathbb{R}^{1 \times m} \end{array}$$

Lemme 4.6 (Farkas I, 1894). *Le système $AX \leq B$ d'inconnue X n'admet pas de solution si et seulement si le système $YA = 0$ et $YB < 0$ d'inconnue Y admet une solution positive.* \square

Lemme 4.7 (Farkas II). *Le système $AX = B$ n'admet pas de solution positive si et seulement si le système $YA \geq 0$ et $YB < 0$ admet une solution.* \square

Preuve par argument de séparation. $\color{red}{\hookrightarrow}$ — \square

Preuve par réduction à Farkas I. $\color{red}{\hookrightarrow}$ — \square

Lemme 4.8 (Farkas IIbis). *Le système $AX \leq B$ admet une solution positive si et seulement si le système $YA \geq 0$ et $YB < 0$ n'admet pas de solution positive.* \square

Démonstration. $\color{red}{\hookrightarrow}$ — \square

$$\begin{array}{ll} A \in \mathbb{R}^{m \times n} & B \in \mathbb{R}^{m \times 1} \\ X \in \mathbb{R}^{n \times 1} & Y \in \mathbb{R}^{1 \times m} \\ D \in \mathbb{R}^{1 \times 1} & C \in \mathbb{R}^{1 \times n}. \end{array}$$

Lemme 4.9 (Farkas III). *Soit*

(1-) $P = \{X : AX \leq B\}$ *un polyèdre non-vide et*

(2-) $Q = \{Y : YA = C, YB \leq D, Y \geq 0\}$.

La contrainte $CX \leq D$ est valide pour P (= P est inclus dans l'ensemble des X tels que $CX \leq D$) si et seulement si le polyèdre Q est non-vide. \square

Démonstration. $\color{red}{\hookrightarrow}$ — \square

Partie linéaire et cône de récession. Soit C un convexe non vide d'un espace affine \mathbb{A} de direction \mathbb{E} et de dimension n .

La **partie linéaire** $\text{Lineal}(C)$ de C est le sous-espace vectoriel de \mathbb{E} définie par

$$\begin{aligned}\text{Lineal}(C) &= \{y \in \mathbb{E} \mid \forall x \in C, \forall t \in \mathbb{R}, x + ty \in C\} \\ &= \{y \in \mathbb{E} \mid C + \mathbb{R}y = C\}.\end{aligned}$$

Notons que C s'écrit comme la somme de $\text{Lineal}(C)$ et du convexe $C \cap U$ où U est un supplémentaire quelconque de $\text{Lineal}(C)$ et que la partie linéaire de $C \cap U$ est nulle.

C est dit **pointé** si sa partie linéaire est nulle.

Le **cône de récession** $\text{Rec}(C)$ de C est définie par

$$\begin{aligned}\text{Rec}(C) &= \{y \in \mathbb{E} \mid \forall x \in C, \forall t \in \mathbb{R}^+, x + ty \in C\} \\ &= \{y \in \mathbb{E} \mid C + \mathbb{R}^+y = C\}.\end{aligned}$$

Théorème 4.10 (Partie linéaire et cône de récession). Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ et

$$P = \mathcal{P}(A, B) = \{X \in \mathbb{R}^{n \times 1} \mid AX \leq B\}.$$

Alors

- (1-) $\text{Lineal}(P)$ est l'ensemble des solutions du système $AX = 0$.
- (2-) $\text{Rec}(P) = \mathcal{P}(A, 0)$;

Par ailleurs si $P = \text{Conv}(V) + \text{Cone}(W)$ alors $\text{Rec}(P) = \text{Cone}(W)$.

Démonstration.  —

□

Treillis des faces d'un polyèdre. Soit P un polyèdre de \mathbb{A} . De toute présentation de P comme intersection d'une famille finie \mathcal{F} de demi-espaces on peut extraire une présentation de P comme intersection d'une sous-famille \mathcal{G} de \mathcal{F} , **minimale** au sens où pour toute sous-famille propre \mathcal{H} de \mathcal{G} le polyèdre P est un sous-ensemble strict de $\cap \mathcal{H}$. Cette présentation n'est en général pas unique ; cependant c'est le cas si le polyèdre P est d'intérieur non vide dans \mathbb{A} .

Théorème 4.11. *Soit P un polyèdre de \mathbb{A} d'intérieur non vide dans \mathbb{A} et soit \mathcal{F} l'ensemble des demi-espaces $R \supset P$ dont la frontière $\text{Fr}(R)$ intersecte P selon un convexe de codimension 1. Alors*

- (1-) \mathcal{F} est fini ;
- (2-) si $R \in \mathcal{F}$ alors $\text{Fr}(R) \cap P$ est un polyèdre d'intérieur non vide dans $\text{Fr}(R)$, appelé **facette** de P et noté $\text{Face}_R P$;
- (3-) $P = \cap \mathcal{F}$ est l'unique écriture minimale de P ;
- (4-) $\text{Fr}(P) = \cup_{\mathcal{F}} \text{Face}_R P$.

Démonstration.  —

□

Exercice 4.14. Quels sont les polyèdres dont l'ensemble des facettes est vide? 4.14

Exercice 4.15. Montrer que les facettes d'un polyèdre ont le même espace de linéarité que le polyèdre. 4.15

Les facettes d'un polyèdre P de dimension n étant des polyèdres de dimension $n - 1$, l'ensemble des facettes des facettes de P est bien défini et ses éléments sont des polyèdres de dimension $n - 2$. De même l'ensemble des facettes des facettes des facettes de P est bien défini et ses éléments sont des polyèdres de dimension $n - 3$ et ainsi de suite. Ces considérations nous conduisent à définir l'ensemble des $n-1$ -faces de P comme l'ensemble de ses facettes et pour $k = 0, \dots, n-2$, l'ensemble des k -faces de P comme l'ensemble des facettes des $k+1$ -faces de P . Les k -faces sont des polyèdres de dimension k ; en particulier les 0-faces sont appelées les **sommets** de P . Il est utile d'introduire l'ensemble vide et P comme étant les (-1) - et n -faces de P . Les k -faces pour $k = -1, 0, \dots, n$ d'un polyèdre P de dimension n sont appelées les **faces** de P . Il est clair que les faces d'un polyèdre sont en nombre fini. L'ensemble des faces de P ordonné par inclusion est noté $L(P)$.

Le théorème suivant rassemble dans le langage des ensembles partiellement ordonnés les propriétés de $L(P)$ que nous allons démontrer dans le reste de ce chapitre à l'exception du résultat mentionné en début de chapitre portant sur le nombre maximal de facettes d'un polytope en fonction de sa dimension et de son nombre de sommets.

Théorème 4.12. *Soit P un polyèdre pointé. Alors $L(P)$ est un treillis gradué coatomique de longueur $\dim(P) + 1$ et de fonction rang $\text{rang}(F) = \dim(F) + 1$, d'élément minimum \emptyset , d'élément maximum P , d'atomes les sommets de P , de cotaomes les facettes de P et de lois internes*

$$\begin{aligned} F \wedge G &= F \cap G \\ F \vee G &= \bigcap \{H \in L(P) \mid F \subseteq H, G \subseteq H\}. \end{aligned}$$

De plus tout intervalle $[G, F]$, $G \neq \emptyset$, de $L(P)$ est isomorphe au treillis des faces d'un polytope de dimension $\text{rang}(F) - \text{rang}(G) - 1$ et, sous l'hypothèse additionnelle que P est un polytope, $L(P)$ est atomique et son opposé est isomorphe au treillis des faces d'un polytope. \square

Soit $P = \bigcap_{i=1}^m R_i$ l'écriture minimale de P et soit H_i l'hyperplan frontière de R_i . D'après le théorème 4.11 les $(n - k)$ -faces de P sont des intersections de la forme

$$H_{i_1} \cap \dots \cap H_{i_k} \cap P \tag{5}$$

de codimension k (plus précisément $H_{i_1} \cap \dots \cap H_{i_j} \cap P$ est de codimension j pour $j = 1, \dots, k$). Il faut prendre garde qu'une telle écriture n'est en général pas unique. Le théorème suivant précise ce point. L'intérieur relatif de $X \subset \mathbb{A}$ est noté $\text{relint}(X)$.

Théorème 4.13. *Soit P un polyèdre de dimension n et $\bigcap_{\mathcal{F}} R$ son écriture minimale. Soit F une face de P et soit $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ l'ensemble des demi-espaces de \mathcal{F} dont les frontières sont les hyperplans supports des facettes de P qui contiennent F . Posons $A = \bigcap_{\mathcal{G}} \text{Fr}(R)$. Alors*

- (1-) $F = A \cap P$ et A est l'espace affine engendré par F ;
- (2-) $\text{relint}(F) = A \cap (\bigcap_{\mathcal{F} \setminus \mathcal{G}} \text{relint}(R))$;


(3-) Pour tout point x de P , si l'enveloppe convexe de $\{x\} \cup F$ et F ont même dimension alors x appartient à F .

Démonstration.  —

□

Théorème 4.14. Soit P un polyèdre et soient F, G deux faces de P . Alors $F \cap G$ est une face de F et de G .

Théorème 4.15. Soit P un polyèdre et soit R un demi-espace contenant P . Alors $\text{Fr}(R) \cap P$ est une face de P . Réciproquement toute face propre de P est la trace sur P de la frontière d'un demi-espace contenant P .

Démonstration.  —

□

Deux faces sont dites **incidentes** si l'une est incluse dans l'autre et si leurs dimensions diffèrent d'une unité. Deux $(k + 1)$ -faces sont dites **adjacentes** si leur intersection est une k -face.

Théorème 4.16. Pour $n \geq 2$ une $(n - 2)$ -face est incidente à exactement deux $(n - 1)$ -faces.

Démonstration.  —

□

En particulier un côté d'un polyèdre pointé de dimension deux n'ayant qu'un ou deux sommets incidents, selon qu'il est ou non borné, admet un ou deux côtés adjacents. La frontière d'un convexe pointé étant connexe on obtient la caractérisation complète de la relation d'incidence entre côtés d'un polyèdre pointé de dimension 2 sous la forme suivante.

Proposition 4.17. Les côtés E_1, \dots, E_m d'un polyèdre pointé de dimension deux forment une chaîne de côtés adjacents c'est-à-dire que, à une permutation près, E_i et E_{i+1} sont adjacents pour $i = 1, \dots, m - 1$ avec E_m et E_1 adjacents si le polyèdre est borné et E_m et E_1 sont les deux côtés infinis si le polyèdre est non borné.

Des propositions précédentes nous déduisons que $L(P)$ est un treillis gradué coatomique de longueur $\dim(P) - \dim(\text{Lineal}(P)) + 1$ et de fonction rang $\text{rang}(F) = \dim(F) - \dim(\text{Lineal}(P)) + 1$, d'élément minimum \emptyset , d'élément maximum P , d'atomes les faces de P de dimension la dimension de $\text{Lineal}(P)$, de cotaomes les facettes de P et de lois internes

$$\begin{aligned} F \wedge G &= F \cap G \\ F \vee G &= \bigcap \{H \in L(P) \mid F \subseteq H, G \subseteq H\}. \end{aligned}$$

Treillis et étoiles en un sommet. Sans perte de généralité nous supposons maintenant que P est pointé, i.e., $\text{Lineal}(P)$ est nul.

Soit v un sommet de P . Une **étoile** de P en v est l'intersection de P et d'un hyperplan séparant strictement v d'au moins un point de chacune des autres faces de P . Noter que les étoiles de P en v sont des polytopes identiques à transformation affine près. Ceci justifie de parler de "l'"étoile de P en v et la notation P/v pour le désigner. La proposition suivante affirme que le treillis des faces d'une étoile de P en v est isomorphe au sous-treillis des faces de P contenant v .

Proposition 4.18. *Soient v un sommet de P , H un hyperplan séparant strictement le sommet v d'au moins un point de chacune des autres faces de P et k un entier compris entre 1 et la dimension de P . Alors l'application qui associe à une face F de P contenant v l'intersection de F est de l'hyperplan H est une bijection entre l'ensemble des faces de P de dimension k contenant v et l'ensemble des faces du polytope $P \cap H$ de dimension $k - 1$. De plus cette bijection est compatible avec la relation d'inclusion.*

Démonstration. \Leftarrow —

□

De la proposition précédente nous déduisons que tout intervalle $[G, F]$, $G \neq \emptyset$, de $L(P)$ est isomorphe au treillis des faces d'un polytope de dimension $\text{rang}(F) - \text{rang}(G) - 1$.

Il nous reste à démontrer, sous l'hypothèse additionnelle que P est un polytope, que $L(P)$ est atomique et que son opposé est isomorphe au treillis des faces d'un polytope. C'est l'objet du paragraphe suivant.

Treillis et polarité. Nous introduisons maintenant la notion de polaire d'un ensemble de points par rapport à un point donné, disons $o \in \mathbb{A}$, appelé l'origine de \mathbb{A} et le choix d'une structure euclidienne sur \mathbb{E} . Pour $x, y \in \mathbb{A}$, nous utilisons la notation $\langle x, y \rangle_o$ pour $\langle x - o, y - o \rangle$.

Soit $A \subset \mathbb{A}$, le **polaire** de A , par rapport à l'origine o , noté A^* , est l'intersection des demi-espaces fermés contenant l'origine de frontières les hyperplans d'équations $\langle x, a \rangle_o = 1$, $a \in A$, $a \neq o$:

$$A^* = \bigcap_{a \in A} \{x \in \mathbb{A} \mid \langle x, a \rangle_o \leq 1\}$$

En d'autres termes

$$x \in A^* \iff \forall a \in A, \langle x, a \rangle_o \leq 1.$$

L'hyperplan $\langle x, a \rangle_o = 1$, $a \neq o$, est appelé l'**hyperplan polaire** de a . L'hyperplan polaire du point $a \in \mathbb{A}$, $a \neq o$, est l'hyperplan orthogonal à la droite oa passant par l'unique point c de la demi-droite oa tel que $\langle a, c \rangle_o = 1$. Le **pôle** d'un hyperplan H ne contenant pas le point o et l'unique point $a \in \mathbb{A}$ tel que H soit l'hyperplan polaire de a .

Exercice 4.16. Quel est le polaire de \emptyset ? de o ? de \mathbb{A} ? 4.16

Exercice 4.17. Soit $A \subset \mathbb{A}$. Montrer que le polaire de A et le polaire de l'enveloppe convexe de $A \cup \{o\}$ sont égaux. 4.17

Exercice 4.18. Montrer que le polaire de la boule de centre o et de rayon r est la boule de centre o et de rayon $1/r$. (On commencera par le cas $r = 1$.) 4.18


On vérifie facilement les 4 assertions suivantes

- (1-) A^* est un fermé convexe (c'est une intersection de demi-espaces fermés);
- (2-) si $A \subset B$ alors $B^* \subset A^*$; car $A^* = \bigcap_{x \in A} x^*$.
- (3-) si $A \subset B^*$ alors $B \subset A^*$; car $A \subset B^* \iff (\forall x \in A) (\forall z \in B) (\langle x, z \rangle_o \leq 1)$. et enfin
- (4-) $A \subset A^{**}$; substituer à la paire A, B la paire A^*, A dans l'assertion qui précède.

L'opération $*$ est en fait une bonne dualité sur l'ensemble des convexes compacts d'intérieur non-vide contenant l'origine o .

Proposition 4.19. Soit C un convexe fermé borné contenant le point o dans son intérieur. Alors


- (1-) C^* est un convexe fermé borné dont l'intérieur contient o ;
- (2-) $C^{**} = C$.

Démonstration.  —

□

Au passage nous donnons une deuxième preuve de l'identité de la classe des polyèdres et de la classe des convexes finiment engendrés (cf. Théorème de Minkowski-Weyl).

Théorème 4.20. *Un polyèdre est l'enveloppe convexe de ses sommets. Réciproquement un convexe finiment engendré est un polyèdre.*

Démonstration.  —

□

Théorème 4.21. *L'ensemble des sommets d'un polyèdre est le plus petit ensemble de points dont le polyèdre est l'enveloppe convexe.*

Démonstration.  —

□

Nous supposons maintenant que P est un polytope de dimension n et que l'origine est un point intérieur à P . Le polaire P^* de P est alors un polytope de dimension n , appelé polytope polaire ou polytope dual. Pour F face de P définissons la face conjuguée F^\diamond de F comme la trace sur P^* des hyperplans frontières des demi-espaces $\langle z, x \rangle_o \leq 1, x \in F, :$

$$\begin{aligned} F^\diamond &= \{x \in P^* \mid \langle x, z \rangle_o = 1 \quad \text{pour tout } z \in F\} \\ &= \{x \in P^* \mid \langle x, z \rangle_o = 1 \quad \text{pour tout } z \text{ sommet de } F\} \end{aligned}$$

Exercice 4.19. Montrer que $\emptyset^\diamond = P^*$, $P^\diamond = \emptyset$ et que $F^\diamond = P^*$ si et seulement si $F = \emptyset$. 4.19

Proposition 4.22. Soient F et G deux faces de P . Alors

- (1-) Si $F \not\subseteq G$ alors $G^\diamond \not\subseteq F^\diamond$;
- (2-) $(F^\diamond)^\diamond = F$.

Démonstration. $\color{red}{\blacktriangleleft}$ — □

Des propositions précédentes nous déduisons que $L(P)$ est atomique et que son opposé est isomorphe au treillis des faces d'un polytope.

Exercice 4.20. Montrer que le produit cartésien $P \times Q$ d'un polytope P de dimension p et d'un polytope Q de dimension q est un polytope de dimension $p + q$ dont les faces sont les produits cartésiens des faces de P et des faces de Q . 4.20

Le Théorème 4.12 n'épuise pas les propriétés des treillis des faces des polyèdres. Pour le problème de la caractérisation des treillis des faces des polyèdres nous renvoyons à la monographie de Richter-Gebert [5]. Seul les cas des dimensions deux (Proposition 4.17) et trois sont entièrement résolus.

Grphe d'un polytope. Le graphe $G(P)$ d'un polytope P est le graphe de sommets les sommets de P et d'arêtes les paires de sommets reliés par une arête de P . Soit P un polytope de \mathbb{R}^n et soit $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire définie par le vecteur $c \in \mathbb{R}^n$, i.e. $\varphi(x) = \langle c, x \rangle$. La forme linéaire φ est dite en position générique par rapport à P si elle sépare les sommets de P , i.e. $\varphi(v_i) \neq \varphi(v_j)$ pour toute paire de sommets distincts v_i et v_j de P .

Exercice 4.21. Montrer que pour $t > 0$ assez petit la forme linéaire définie par le vecteur $c(t) = c + \gamma(t)$ où $\gamma(t) = (t, t^2, \dots, t^n)$ est en position générique par rapport à P . 4.21

Une forme linéaire en position générique par rapport au polytope P induit une orientation de $G(P)$: l'arête vw est orientée de v vers w ou de w vers v selon que $\varphi(v) < \varphi(w)$ ou que $\varphi(w) < \varphi(v)$.

Théorème 4.23. Soit φ une forme linéaire en position générique par rapport au polytope P . L'orientation de $G(P)$ induite par φ est acyclique et possède un unique plus grand élément v . Le sommet v est l'unique point de P qui réalise le maximum de la forme linéaire φ .

Démonstration. — □

Une **bonne orientation acyclique** de P (un **BOA** en abrégé) est une orientation acyclique de $G(P)$ telle que pour toute face F non vide de P le sous-graphe $G(F)$ de $G(P)$ admet un unique sommet de degré entrant nul et un unique sommet de degré sortant nul. L'orientation de $G(P)$ induite par une forme linéaire en position générique

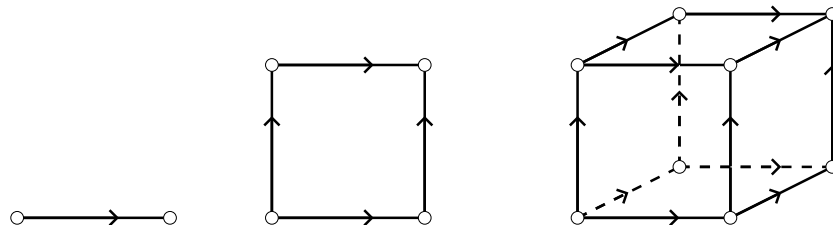


FIGURE 17 – Bonne orientation acyclique du cube

par rapport à P est un BOA.

Exercice 4.22. Soit P un polytope et soit F une facette de P . Montrer qu'il existe un BOA de $G(P)$ tel que l'ensemble des sommets de F soit un segment initial de l'ordre partiel O sur les sommets de P induit par le BOA, i.e., l'ensemble des sommets de F est un intervalle $[\hat{0}, v]$ de O où $\hat{0}$ est le plus petit élément de O . 4.22

Simplexes et cocubes. Le n -simplexe standard S_n est l'enveloppe convexe des $n + 1$ vecteurs e_1, e_2, \dots, e_{n+1} de la base canonique de \mathbb{R}^{n+1} . Rappelons que par définition la coordonnée de rang j de e_i est égale à 1 si $i = j$; 0 sinon :

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

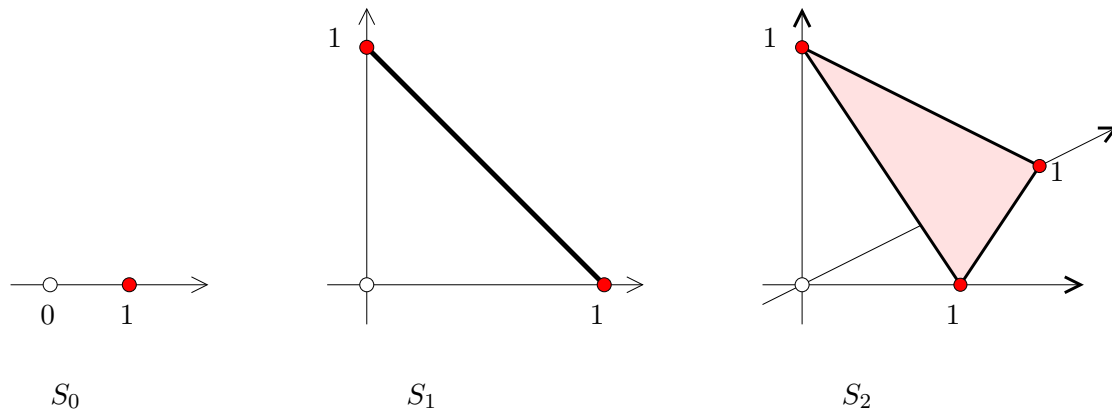


FIGURE 18 – Les simplexes standard de dimensions 0, 1 et 2.

Proposition 4.24. *Le treillis des faces de S_n est un treillis booléen de longueur $n + 1$ isomorphe au treillis des parties de $\llbracket n + 1 \rrbracket$ via l'application qui à $A \subset \llbracket n + 1 \rrbracket$ associe l'enveloppe convexe des $e_i, i \in A$. En particulier S_n est de dimension n et ses sommets sont les e_i . Un hyperplan support de la face associée à $A \neq \emptyset$ est celui d'équation $\langle x, e_A \rangle = 1$ où $e_A = \sum_{i \in A} e_i$.*

Démonstration. \square —

Plus généralement un n -simplexe est l'enveloppe convexe de $n + 1$ points affinement libre d'un espace affine. On retiendra que le treillis des faces d'un n -simplexe est un treillis booléen de longueur $n + 1$. Un polytope est dit **simplicial** si ses facettes sont des simplexes. Un polytope est dit **simple** si les étoiles de ses sommets sont des simplexes.

Exercice 4.23. Montrer que les seuls polytopes à la fois simples et simpliciaux sont les polygones (convexes) et les simplexes. 4.23

Le n -cocube standard C_n^* est l'enveloppe convexe des vecteurs e_1, e_2, \dots, e_n de la base canonique de \mathbb{R}^n et de leurs opposés $-e_1, -e_2, \dots, -e_n$. Soit \diamond^n l'ensemble partiellement ordonné par inclusion des parties J de $I = \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\}$ telles que $J \cap -J = \emptyset$, augmenté de I . Le lecteur vérifiera sans peine que \diamond^n est un treillis gradué de longueur $n + 1$. Nous introduisons la notation e_{-i} pour l'opposé $-e_i$ de e_i .

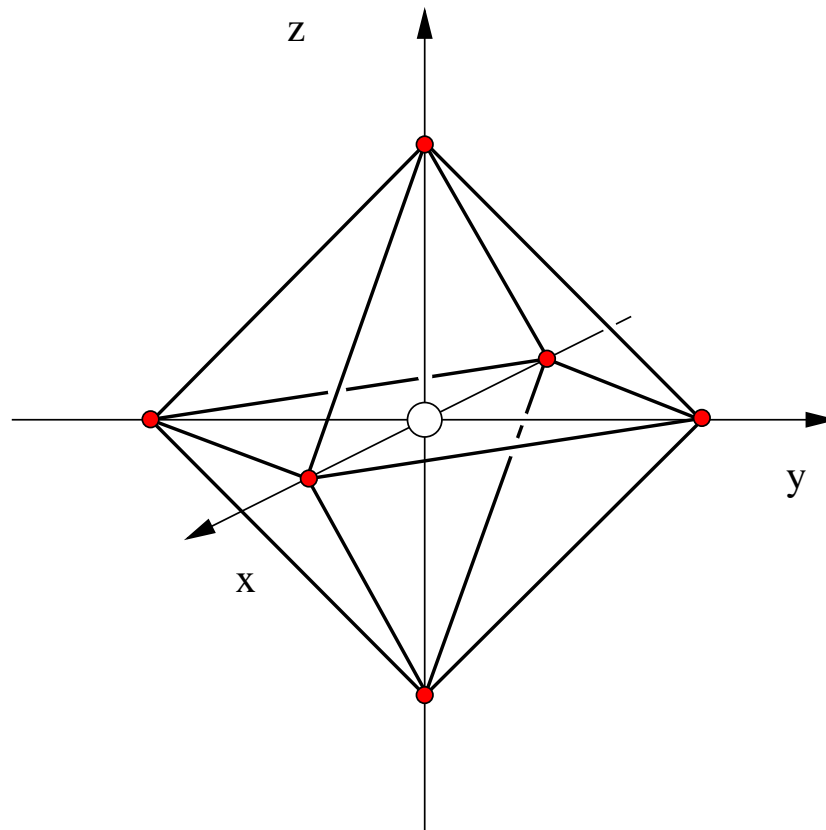


FIGURE 19 – Le cocube standard de dimension trois ou octaèdre

Proposition 4.25. *Le n -cocube standard C_n^* est un polytope simplicial de dimension n contenant l'origine o en son intérieur. Ses sommets sont les e_i , $i \in I$, ses facettes sont les $(n-1)$ -simplexes*

$$\text{Conv}(\{\epsilon_1 e_1, \epsilon_2 e_2, \dots, \epsilon_n e_n\})$$

où $(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n) \in \{\pm 1\}^n$ et le treillis de ses faces est isomorphe à \diamond^n via l'application qui à $J \in \diamond^n$ associe l'enveloppe convexe des e_j , $j \in J$. Un hyperplan support de la face associée à $J \subset I$, $J \neq \emptyset$ et $J \neq I$, est $\langle x, e_J \rangle = 1$ où $e_J = \sum_{i \in J} e_i$.

Démonstration. $\color{red}{\dashrightarrow}$ —

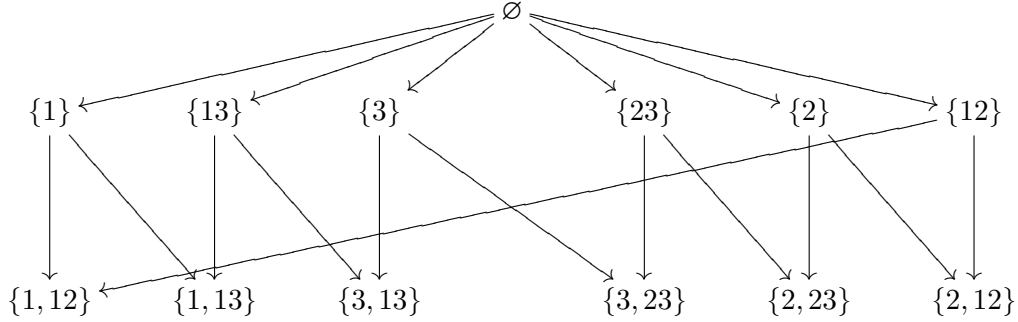
□

Exercice 4.24. Quel est le polaire du n -cocube standard par rapport à l'origine de \mathbb{R}^n ?
4.24

Exercice 4.25. Quel est le nombre de drapeaux du simplexe de dimension n ? du cocube de dimension n ? (Un drapeau d'un polytope est une chaîne maximale du treillis de ses faces.) 4.25

Exercice 4.26. Donner des \mathcal{H} -présentations du n -simplexe et du n -cocube standard. 4.26

Permutaèdres. Soit Δ_n l'ensemble, ordonné par inclusion, des parties de $\llbracket n \rrbracket$ et soit \mathcal{C}_n l'ensemble, ordonné par inclusion inverse, des chaînes de Δ_n ne contenant ni \emptyset ni $\llbracket n \rrbracket$. A titre d'exemple voici le diagramme de Hasse de \mathcal{C}_3 :



(Par soucis de lisibilité nous avons écrit $\{1, 12\}$ pour la chaîne $\{\{1\}, \{1, 2\}\}$, etc.)

$$\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n) = (1, 2, \dots, n) \in \mathbb{R}^n.$$

Le **permutaèdre** P_n est l'enveloppe convexe des $\vartheta\pi = (\vartheta_{\pi(1)}, \vartheta_{\pi(2)}, \dots, \vartheta_{\pi(n)})$, $\pi \in \mathfrak{S}_n$.

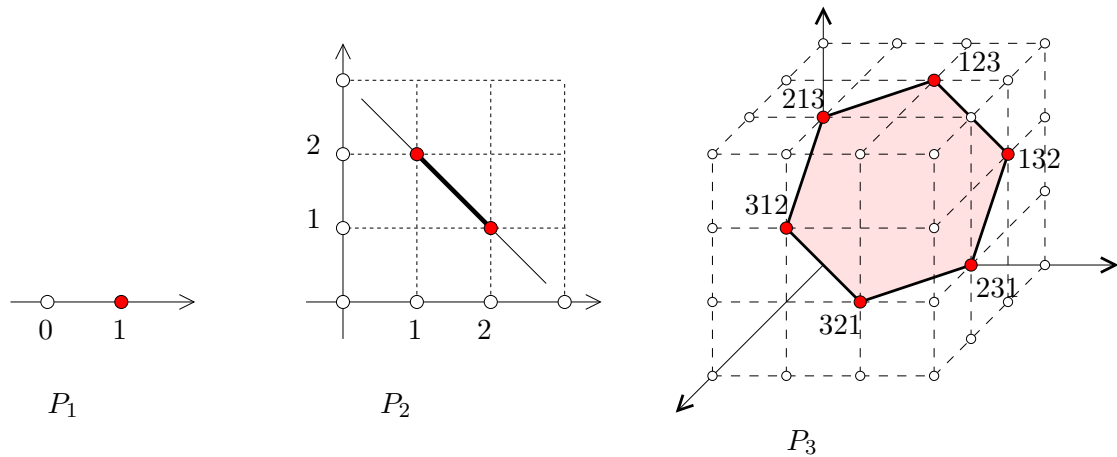


FIGURE 20 – Les permutaèdres P_1, P_2 et P_3 .


Théorème 4.26. *Le permutaèdre P_n est un polytope de dimension $n - 1$ inclus dans l'hyperplan d'équation*

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \vartheta_i.$$

Ses sommets sont les $\vartheta\pi$ où π décrit \mathfrak{S}_n , ses facettes sont les traces sur P_n des hyperplans H_A d'équations

$$\sum_{i \in A} x_i = \sum_{i=1}^a \vartheta_i$$

où A décrit l'ensemble des parties non vides propres de $\llbracket n \rrbracket$ et où a est le cardinal de A , et son treillis privé de son élément minimal est isomorphe à \mathcal{C}_n via l'application de \mathcal{C}_n dans \mathcal{L}_n qui à la chaîne $\mathcal{A} \in \mathcal{C}_n$ associe la trace sur P_n de l'intersection des H_A , $A \in \mathcal{A}$.

Démonstration.  —

□

Polytopes cycliques. La courbe des moments de \mathbb{R}^d est la courbe paramétrée, notée γ , qui associe à $t \in \mathbb{R}$ le point de \mathbb{R}^d de coordonnées (t, t^2, \dots, t^d) . Un hyperplan intersectant la courbe des moments en au plus d points tout ensemble de $d + 1$ points de la courbe des moments est affinement libre; en particulier l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points de la courbe des moments est un polytope simplicial. Soit Q l'enveloppe convexe de $n \geq d + 1$ points de la courbe des moments de \mathbb{R}^d de paramètres croissants t_1, t_2, \dots, t_n . Le polytope Q est simplicial et pour tout sous-ensemble I de $\{1, 2, \dots, n\}$ de taille inférieure ou égale à $\lfloor d/2 \rfloor$ l'enveloppe convexe des $\gamma(t_i)$, $i \in I$, est une face de Q . En effet posons

$$p(t) = \prod_{i \in I} (t - t_i)^2 = p_0 + p_1 t + \dots + p_d t^d,$$

et soit $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ la forme affine définie par $h(x) = p_0 + p_1 x_1 + \dots + p_d x_d$. Par construction $h(\gamma(t_k)) \geq 0$ pour tout k avec égalité si et seulement si $k \in I$. Par suite les $\gamma(t_k)$, $k \in I$, sont les sommets d'une face de Q de dimension $|I| - 1$. Nous résumons.

Théorème 4.27. *L'enveloppe convexe de $n \geq d + 1$ points de la courbe des moments de \mathbb{R}^d est un d -polytope simplicial à n sommets et $\binom{n}{i+1}$ i -faces pour tout $i < \lfloor d/2 \rfloor$. \square*

Exercice 4.27. Montrer que pour tout $J \subset \llbracket n \rrbracket$ de cardinalité d l'enveloppe convexe des $\gamma(t_j)$, $j \in J$, est une facette de Q si et seulement si pour tout $i, j \in \llbracket n \rrbracket \setminus J$ le cardinal de l'ensemble des $k \in J$ compris entre i et j est pair (critère de parité de Gale). 4.27

Il suit que le treillis des faces de l'enveloppe convexe de $n \geq d + 1$ points de la courbe des moments de \mathbb{R}^d est à isomorphisme près indépendant du choix des n points : ce polytope est appelé "le" d -polytope cyclique à n sommets. Nous montrons maintenant que pour tout entier i le nombre de i -faces d'un d -polytope à n sommets est majoré par le nombre de i -faces du d -polytope cyclique à n sommets.

Théorème 4.28 (MacMullen, 1970 [4]). *Soit P un d -polytope à n facettes. Alors le nombre de i -faces de P est majoré par le nombre $\gamma_i(d, n)$ de i -faces du dual du d -polytope cyclique à n sommets. De plus*

$$\gamma_i(d, n) = \sum_{0 \leq j \leq d} \binom{j}{i} \binom{n-1-\max\{j, d-j\}}{\min\{j, d-j\}}.$$

En particulier $\gamma_i(d, n) = \Theta(n^{\min\{d-i, \lfloor d/2 \rfloor\}})$ pour $d = O(1)$. \square

Nous admettrons que pour tout d -polytope P il existe un polytope simple P' tel que pour tout entier $0 \leq k \leq d$ le nombre de k -faces de P est majoré par le nombre de k -faces de P' .

Soit P un d -polytope. Le f -vecteur de P , noté $f(P)$, est le $d + 1$ -vecteur dont la coordonnée de rang i , $0 \leq i \leq d$, est le nombre $f_i(P)$ de i -faces du polytope P et le

h -vecteur de P , noté $h(P)$, est le $d + 1$ -vecteur dont les coordonnées sont données implicitement par la relation

$$f(P, x) = h(P, x + 1)$$

où $f(P, x) = \sum_{i=0}^d f_i(P)x^i$ est la série génératrice des $f_i(P)$ et où $h(P, x) = \sum_{i=0}^d h_i(P)x^i$ est la série génératrice des $h_i(P)$. En d'autres termes

$$f_i(P) = \sum_{j=0}^{j=d} \binom{j}{i} h_j(P) \quad (\iff h_j(P) = \sum_{i=0}^{i=d} (-1)^{i+j} \binom{i}{j} f_i(P)).$$

En particulier pour le polaire $C^*(n, d)$ du d -polytope cyclique à n sommets et pour $j \geq \lceil d/2 \rceil$ on a

$$\begin{aligned} h_j(C^*(n, d)) &= \sum_{i=0}^{i=d} (-1)^{i+j} \binom{i}{j} f_i(P) \\ &= \sum_{i=j}^{i=d} (-1)^{i+j} \binom{i}{j} \binom{n}{d-i} \\ &= \binom{n-j-1}{d-j} \end{aligned} \quad (\text{récurrence sur } d \text{ et } j)$$

Nous démontrons la reformulation suivante du Théorème de MacMullen.

Théorème 4.29. *Soit P un d -polytope simple à n facettes et soit $C^*(n, d)$ le polaire du d -polytope cyclique à n sommets. Alors*

- (1-) $h_j(P) = h_{d-j}(P)$ (Relations de Dehn-Sommerville);
- (2-)

$$h_j(C^*(n, d)) = \binom{n-1-\max\{j, d-j\}}{\min\{j, d-j\}} \quad (6)$$

$$f_i(C^*(n, d)) = \sum_{0 \leq j \leq d} \binom{j}{i} \binom{n-1-\max\{j, d-j\}}{\min\{j, d-j\}}. \quad (7)$$

- (3-) $h_j(F) \leq h_j(P)$ pour toute facette F de P ;
- (4-)

$$\sum_F h_j(F) = (d-j)h_j(P) + (j+1)h_{j+1}(P)$$

où F décrit l'ensemble des facettes de P ;

- (5-) $h_j(P) \leq h_j(C^*(n, d))$;
- (6-) $f_j(P) \leq f_j(C^*(n, d))$.

Démonstration.  —

□

Solution 4.1.	↗
4.1	
Solution 4.2.	↗
4.2	
Solution 4.3.	↗
4.3	
Solution 4.4.	↗
4.4	
Solution 4.5.	↗
4.5	
Solution 4.6.	↗
4.6	
Solution 4.7.	↗
4.7	
Solution 4.8.	↗
4.8	
Solution 4.9.	↗
4.9	
Solution 4.10.	↗
4.10	
Solution 4.11.	↗
4.11	
Solution 4.12.	↗
4.12	
Solution 4.13.	↗
4.13	
Solution 4.14.	↗
4.14	
Solution 4.15.	↗
4.15	
Solution 4.16.	↗
4.16	
Solution 4.17.	↗
4.17	

Solution 4.18.	↗
4.18	
Solution 4.19.	↗
4.19	
Solution 4.20.	↗
4.20	
Solution 4.21.	↗
4.21	
Solution 4.22.	↗
4.22	
Solution 4.23.	↗
4.23	
Solution 4.24.	↗
4.24	
Solution 4.25.	↗
4.25	
Solution 4.26.	↗
4.26	
Solution 4.27.	↗
4.27	

Références

- [1] M. Berger. *Géométrie : Convexes et Polytopes, Polyèdres Réguliers, Aires et Volumes*, volume 3. Cedic/Fernand Nathan, 1978.
- [2] B. Grünbaum. *Convex Polytopes*, volume 221 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 2nd edition, 2003.
- [3] J. Lelong-Ferrand and J.-M. Arnaudiès. *Cours de mathématiques 3. géométrie et cinématique*. Dunod, 2001.
- [4] P. McMullen. The maximal number of faces of a convex polytope. *Mathematika*, 17 :179–184, 1970.
- [5] J. Richter-Gebert. *Realization Spaces of Polytopes*. Number 1643 in *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 1996.
- [6] G. M. Ziegler. *Lectures on Polytopes*, volume 152 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1994.

5 Forêts, arbres et arbres couvrants

Matrice d'adjacence, matrice d'incidence orientée et matrice laplacienne d'un graphe - Matrices totalement unimodulaires et formule de Binet-Cauchy - nombre d'arbres sur un ensemble à n éléments (formule de Cayley) - nombre d'arbres couvrants d'un graphe simple (théorème de Kirchhoff) - arbre couvrant de valuation minimale -

Trois matrices associées à un graphe. Soit $G = (V, E, \varphi)$ un graphe à n sommets et m arêtes.

Soit v_1, v_2, \dots, v_n une énumération de sommets de G .

La **matrice d'adjacence** de G est la (n, n) -matrice symétrique $A = [a_{ij}]$ définie par

$$a_{ij} = \#\{e \in E \mid \varphi(e) = \{v_i, v_j\}\}$$

La **matrice laplacienne** de G , notée L , est la matrice $D - A$ où D est la (n, n) -matrice diagonale dont le coefficient diagonal d_i est le degré du sommet v_i dans G .

Une **orientation** de G est la donnée pour chaque arête e du graphe d'une paire ordonnée (e^-, e^+) de sommets telle que $\varphi(e) = \{e^-, e^+\}$. Le sommet e^- est alors appelé le sommet **initial** de l'arête e et e^+ est appelé de sommet **terminal** de l'arête e .

Soit o une orientation de G et soit e_1, e_2, \dots, e_m une énumération des arêtes de G .

La **matrice d'incidence** de G relative à l'orientation o est la (n, m) -matrice $B = [b_{ij}]$ définie par

$$b_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{si } v_i \text{ est le sommet initial de } e_j; \\ +1 & \text{si } v_i \text{ est le sommet terminal de } e_j; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$


Exercice 5.1. Montrer que $L = BB^T$.

5.1

Par exemple si G est le graphe biparti complet de bipartition $\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}$, sa matrice d'adjacence relative à l'énumération $1, 2, 3, 4, 5$ de ses sommets, sa matrice d'incidence relative à l'orientation $13, 14, 15, 23, 24, 25$ et l'énumération $13, 14, 15, 23, 24, 25$ de ses arêtes, et sa matrice laplacienne sont

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Lemme 5.1. $\text{rang}(B) = n - c$ où c est le nombre de composantes connexes de G .

Démonstration.  —

□


La formule de Binet-Cauchy et matrice totalement unimodulaire.

Lemme 5.2 (Binet-Cauchy). Soit A une $(r \times m)$ - et B une $(m \times r)$ -matrice. Alors

$$\det AB = \sum_{\substack{S \subseteq [m], \\ |S|=r}} \det A_{*S} \det B_{S*}$$

où A_{*S} est la matrice carrée obtenue en supprimant les colonnes de A dont l'indice n'est pas dans S et où B_{S*} est matrice carrée obtenue en supprimant les lignes de B dont l'indice n'est pas dans S .

Démonstration. Comme l'écrit si bien Jerrum [3, page 4] :  — □

Démonstration. Une preuve moins conceptuelle est la suivante.  — (On retrouve cette preuve par exemple dans Méthodes matricielles : introduction à la complexité algébrique de Jounaïdi Abdeljaoued et Henri Lombardi, 2004, Springer-sfmai.) □

Une matrice **totalement unimodulaire** est une matrice à coefficients entiers dont les sous-matrices carrés sont de déterminants 0, 1, ou -1 .

Lemme 5.3. Soit B une matrice à coefficients entiers 0, 1, ou -1 telle que chaque colonne comporte au plus un $+1$ et au plus un -1 . Alors B est totalement unimodulaire.

Démonstration.  — □

Formule de Cayley. Une **forêt** est un graphe sans cycles. Un **arbre** est une forêt connexe.

Proposition 5.4. Soit $G = (V, E)$ un graphe simple connexe d'ordre $n \geq 1$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes

- (1-) G est un arbre ;
- (2-) G a $n - 1$ arêtes ;
- (3-) pour tout $e \in E$ le graphe $G - e$ a deux composantes connexes ;
- (4-) pour tout $e \in \binom{V}{2}$ le graphe $G + e$ admet exactement un cycle.
- (5-) pour tout $x \in V$ et tout $y \in V$ il existe un unique chemin dans G joignant x à y ;

Démonstration. $\color{red}{\leftarrow} \text{ —}$

□

Rq. Un arbre d'ordre ≥ 2 possède au moins deux feuilles et exactement deux feuilles si et seulement si l'arbre est un graphe linéaire.

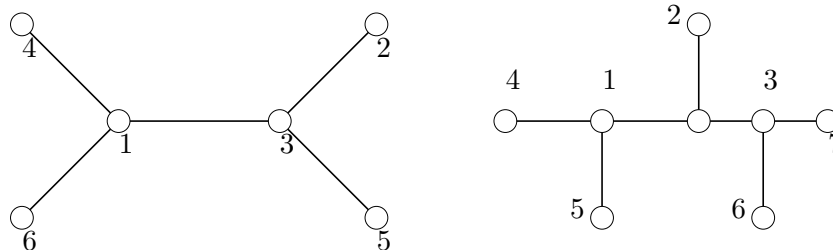
Théorème 5.5 (Cayley, 1889). Le nombre d'arbres sur un ensemble à n sommets est n^{n-2} .

Démonstration. $\color{red}{\leftarrow} \text{ —}$

□

Exercice 5.2. Quels sont les arbres de codes de Prüfer les suites 1234, 3333? Quels sont les codes de Prüfer des arbres

5.2



Exercice 5.3. Soit $T(n, k)$ le nombre d'arbres sur n sommets dont un sommet donné ν est de degré k .

Question 1.— Quelle est la valeur de $T(n, n - 1)$?

Question 2.— Donner une preuve bijective de l'identité

$$(n - k)T(n, k - 1) = (n - 1)(k - 1)T(n, k).$$

Question 3.— En déduire le théorème de Cayley.

5.3

Exercice 5.4. Soit $T(n)$ le nombre d'arbres sur un ensemble à $n \geq 1$ éléments.

Question 1.– Donner une preuve bijective de l'identité

$$2(n-1)T(n) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k(n-k)T(k)T(n-k).$$

Question 2.– En déduire l'identité

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k^{k-1} (n-k)^{n-k-1} = 2(n-1)n^{n-2}.$$

5.4

Exercice 5.5. Soit V un ensemble de taille n et soit $\nu \in V$. Quel est le nombre d'arbres sur V dont ν est une feuille? En déduire que, pour n grand, la probabilité que ν soit une feuille dans un arbre aléatoire (pour la loi uniforme) sur V est approximativement $1/e$.

5.5

Théorème de Kirchhoff. Une **forêt couvrante** d'un graphe G est un forêt de G dont l'ensemble des sommets est exactement l'ensemble des sommets de G . Par exemple le graphe discret de sommets les sommets de G est une forêt couvrante de G . Un **arbre couvrant** d'un graphe connexe G est un arbre de G dont l'ensemble des sommets est exactement l'ensemble des sommets de G . Par exemple la Fig. 21 montre les arbres couvrants du graphe biparti complet $K_{2,3}$. Notons que l'itération de l'opération de sup-

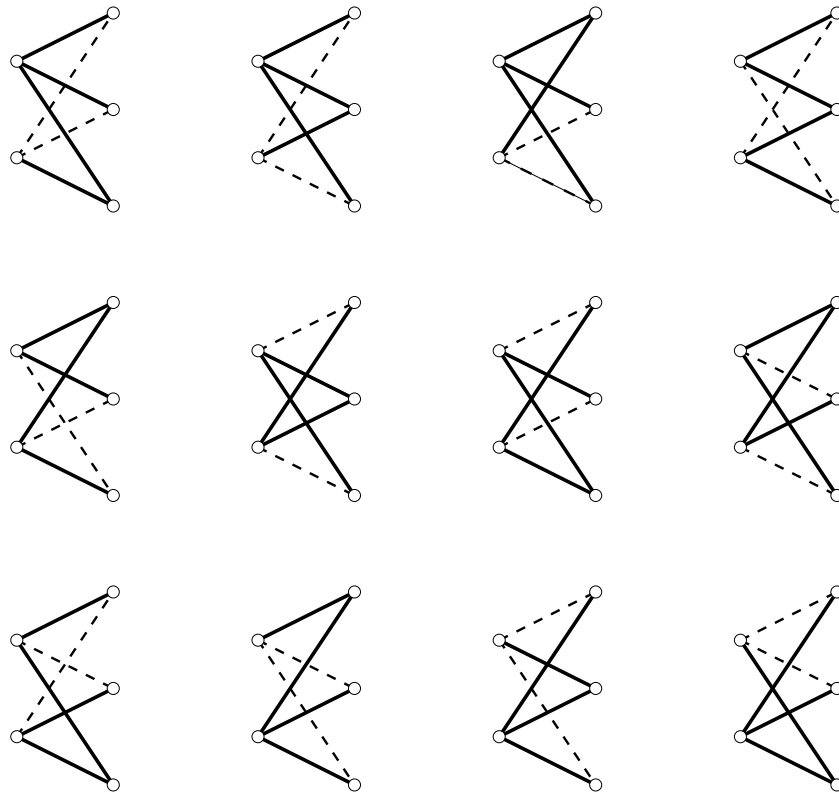


FIGURE 21 – Les arbres couvrants de $K_{2,3}$.

pression d'une arête d'un cycle d'un graphe connexe conduit à un arbre couvrant de ce graphe.

Exercice 5.6. Quel est le nombre d'arbres couvrants de $K_{2,s}$?

5.6

Exercice 5.7. Quel est le nombre d'arbres couvrants d'un graphe cyclique d'ordre n ?
Un multi-arbre est un graphe connexe sans cycles d'ordre ≥ 3 . Quel est le nombre d'arbres
couvrants d'un multi-arbre? 5.7

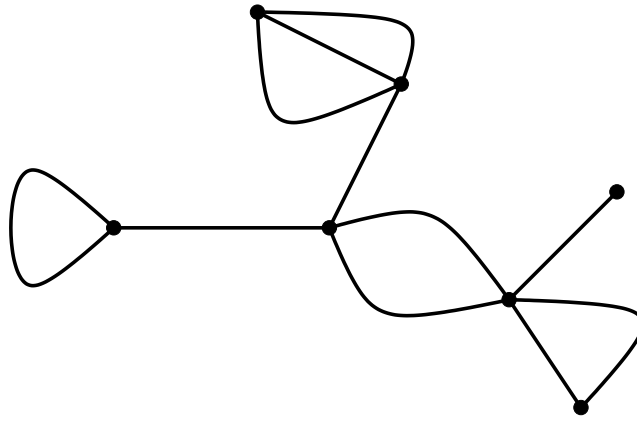


FIGURE 22 – un multi-arbre d'ordre 7

Théorème 5.6 (G. Kirchhoff (1847) ; Borchardt (1860), Tutte (1948)). *Le nombre $T(G)$ d'arbres couvrants d'un graphe G est égal au cofacteur de tout élément diagonal de sa matrice laplacienne.* \square

Par exemple le cofacteur du premier élément diagonal de la matrice laplacienne du graphe biparti complet de bipartition $\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}$ est

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 12 \end{aligned}$$

et son nombre d'arbres couvrants est 12, cf. Fig. 21.

Proof of Theorem 5.6. $\color{red}{\dashv}$ — \square

Nous avons suivi [2, Chap. 2]. Pour une preuve alternative voir [1].

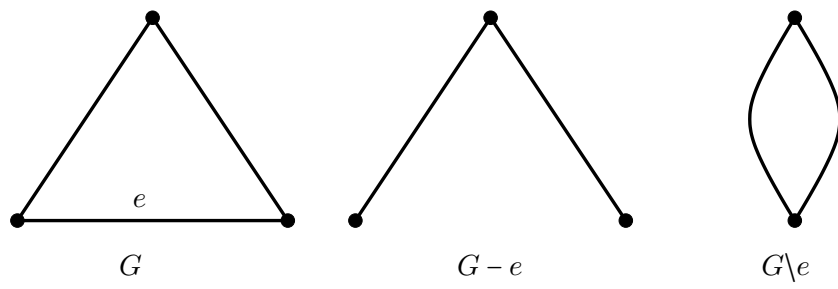
Exercice 5.8. Démontrer la formule de Cayley en utilisant le Théorème de Kirchhoff. 5.8

Exercice 5.9. Montrer en utilisant le Théorème de Kirchhoff que le nombre d'arbres couvrants du graphe biparti complet K_{nm} est $n^{m-1}m^{n-1}$. 5.9

Exercice 5.10. Soit G un graphe connexe sans boucles et soit e une arête de G . Montrer que

$$T(G) = T(G - e) + T(G \setminus e).$$

Ici $G - e$ est le graphe obtenu à partir de G en supprimant l'arête e et $G \setminus e$ est le graphe obtenu à partir de G en identifiant les extrémités de e et en supprimant la ou les boucles ainsi créées. Utiliser ce résultat pour calculer $T(K_{2,3})$. 5.10



Arbre couvrant de valuation minimale. Soit G un graphe simple connexe sur un ensemble à n sommets muni d'une valuation $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ sur l'ensemble E des arêtes de G ; valuation que nous étendons à l'ensemble des parties de E en posant

$$w(E') = \sum_{e \in E'} w(e).$$

Nous examinons le problème de calculer un arbre couvrant de valuation minimale. Anticipant sur le prochain chapitre nous introduisons la terminologie suivante. Un **indépendant** est l'ensemble des arêtes d'une forêt de G ; une **base** est un indépendant maximal pour la relation d'inclusion ou, de manière équivalente, l'ensemble des arêtes d'un arbre couvrant de G ; un **dépendant** est un ensemble d'arêtes qui n'est pas un indépendant ou, de manière équivalente, un ensemble d'arêtes contenant les arêtes d'un cycle de G ; et un **circuit** est un dépendant minimal pour la relation d'inclusion ou, de manière équivalente, l'ensemble des arêtes d'un cycle de G .

Lemme 5.7. *Soit X un indépendant et soit $x \in E - X$ tel que $X + x$ soit un dépendant. Alors il existe un unique circuit inclus dans $X + x$.*

Démonstration. cf. Proposition 5.4 assertion 4. □

Ce circuit est appelé le **circuit fondamental** de la paire (X, x) .

Lemme 5.8. *Soient X, Y deux indépendants tels que $|X| < |Y|$. Alors il existe $y \in Y - X$ tel que $X + y$ soit un indépendant.*

Démonstration.  — □

Un **arbre couvrant glouton** de G est un arbre couvrant de G dont une énumération des arêtes b_1, b_2, \dots, b_{n-1} est défini inductivement par

$$b_i \in \operatorname{argmin} \{w(e) : e \notin \{b_1, b_2, \dots, b_{i-1}\}, \{b_1, b_2, \dots, b_{i-1}, e\} \text{ est un indépendant} \}.$$

Une telle énumération est dite **gloutonne**.

Théorème 5.9. *Soit b_1, b_2, \dots, b_{n-1} une énumération gloutonne des arêtes d'un arbre couvrant glouton de G et soit e_1, e_2, \dots, e_{n-1} une énumération des arêtes d'un arbre couvrant de G suivant les valeurs croissantes de leurs valuations, i.e. $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \dots \leq w(e_{n-1})$. Alors pour tout i on a $w(b_i) \leq w(e_i)$. En particulier un arbre couvrant glouton est un arbre de valuation minimale.*

Démonstration.  — □

Solution 5.1.	↗
5.1	
Solution 5.2.	↗
5.2	
Solution 5.3.	↗
5.3	
Solution 5.4.	↗
5.4	
Solution 5.5.	↗
5.5	
Solution 5.6.	↗
5.6	
Solution 5.7.	↗
5.7	
Solution 5.8.	↗
5.8	
Solution 5.9.	↗
5.9	
Solution 5.10.	↗
5.10	

Références

- [1] A. T. Benjamin and N. T. Cameron. Counting on determinants. *The American Mathematical Monthly*, 112(6) :pp. 481–492, 2005.
- [2] R. A. Brualdi and H. J. Ryser. *Combinatorial Matrix Theory*. Cambridge University Press, 1991.
- [3] M. Jerrum. *Counting, Sampling and Integrating : Algorithms and Complexity*. Lectures in Mathematics. Birkhäuser, 2003. The subject of these notes is counting (of combinatorial structures) and related topics, viewed from a computational perspective. A major theme of the book is the idea of accumulating information about a set of combinatorial structures by performing a random walk (i.e., simulating a Markov chain) on those structures. These notes will be of value not only to teachers of postgraduate courses on these topics, but also to established researchers. For the first time this body of knowledge has been brought together in a single volume. Table of contents : Two Good Counting Algorithms.- #P-completeness.- Sampling and Counting.- Coupling and Colourings.- Canonical Paths and Matchings.- Volume of a Convex Body.- Inapproximability.

6 Matroides

Axiomatique des indépendants; matroides vectoriels, graphiques, transversals, de couplage; axiomatique des rangs; matroïde dual; bases optimales et algorithme glouton; théorème de Rado-Hall.

H. Whitney. On the abstract properties of linear dependence.
by H. Whitney in *American Journal of Mathematics*, 57(3) :509–533, 1935.

Introduction. Let C_1, C_2, \dots, C_n be the columns of a matrix M . Any subset of these columns is either linearly independent or linearly dependent; the subsets thus fall into two classes. These classes are not arbitrary; for instance, the two following theorems must hold :

- (a) Any subset of an independent is an independent.
- (b) If N_p and N_{p+1} are independent sets of p and $p+1$ columns respectively, then N_p together with some column of N_{p+1} forms an independent set of $p+1$ columns.

There are other theorems not deducible from these; for in §16 we give an example of a system satisfying these two theorems but not representing any matrix. Further theorems seem, however, to be quite difficult to find. Let us call a system obeying (a) and (b) a “matroid.” The present paper is devoted to the study of the elementary properties of matroids. The fundamental question of completely characterizing systems which represent matrices is left unsolved. In place of the columns of a matrix we may equally well consider points or vectors in a Euclidean space, or polynomials, etc.

This paper has a close connection with a paper of the author on linear graphs;² we say a subgraph of a graph is independent if it contains no circuit. Although graphs are, abstractly, a very small subclass of the class of matroids, (see the appendix), many of the simpler theorems on graphs, especially on non-separable and dual graphs, apply also to matroids. For these reason, we carry over various terms in the theory of graphs to the present theory. Remarkably enough, for matroids representing matrices, dual matroids have a simple geometrical interpretation quite different from that in the case of graphs (see §13).

The contents of the paper are as follows : In Part I . . .

Axiomatique des indépendants. Soit E un ensemble fini non-vidé et soit \mathcal{J} un sous-ensemble de l'ensemble des parties de E . On dit que \mathcal{J} détermine sur E une structure de **matroïde** (ou, en abrégé, que (E, \mathcal{J}) est un **matroïde**) si les trois axiomes suivants sont vérifiés :

2. “Non-separable and planar graphs”. *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 34 (1932), pp. 339–362. We refer to this paper as G .

- I.1** $\emptyset \in \mathcal{J}$;
I.2 si $A \in \mathcal{J}$ et $B \subseteq A$ alors $B \in \mathcal{J}$;
I.3 si $A, B \in \mathcal{J}$ et $|A| > |B|$ alors $B + a \in \mathcal{J}$ pour un certain $a \in A - B$ (axiome de transfert).

Dans ce cas la terminologie suivante est utilisée :

- (1-) les **éléments**, les **indépendants** et les **dépendants** du matroïde sont, respectivement, les éléments de E , les éléments de \mathcal{J} et les éléments du complémentaire de \mathcal{J} dans l'ensemble des parties de E ;
(2-) les **bases** du matroïde sont les indépendants du matroïde, maximaux pour la relation d'inclusion ;
(3-) les **circuits** du matroïde sont les dépendants du matroïde, minimaux pour la relation d'inclusion ;
(4-) le **rang** du matroïde est la taille commune ($\#$) de ses bases ;
(5-) La **fonction rang** du matroïde est l'application $\text{rg} : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{N}$ qui associe à la partie A de E la taille commune ($\#$) des indépendants inclus dans A , maximaux pour la relation d'inclusion. En particulier le rang du matroïde est le rang de l'ensemble de ses éléments.

Remarquons qu'un matroïde sur un ensemble d'éléments donné est défini de manière unique tant par ses indépendants (par définition) que par ses bases, ses circuits ou encore par sa fonction rang.

Exercice 6.1. Montrer que si $\text{rg}(A) > \text{rg}(B)$ alors $\text{rg}(B + a) > \text{rg}(B)$ pour un certain $a \in A$. 6.1

Lemme 6.1. Soit M un matroïde sur E . Pour toute base B de M et tout $x \in E - B$ il existe un unique circuit de M inclus dans $B + x$.

Démonstration. $\color{red}{\curvearrowright}$ — □

Ce circuit est appelé le **circuit fondamental** de la paire (x, B) .

Matroïdes vectoriels. $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ désigne l'ensemble des matrices de type (m, n) à coefficient dans le corps \mathbb{K} . Soit $X \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$, soit $E = \{1, 2, \dots, n\}$ l'ensemble des indices-colonnes de X et soit rg_X l'application qui associe à $A \subseteq E$ le rang de la matrice de type (m, n) obtenue à partir de X en mettant à zéro les colonnes de X non indexées par un élément de A . Alors rg_X est la fonction rang du matroïde sur E dont les indépendants sont les parties A de E telle que la sous-famille indexée par A des vecteurs colonnes de X soit une famille libre du \mathbb{F} -espace vectoriel \mathbb{F}^m ($\#$). Ce matroïde est appelé le matroïde vectoriel associé à la matrice X .

Un matroïde isomorphe à un tel matroïde est dit **vectoriel** ou encore **représentable sur \mathbb{F}** .

Proposition 6.2. Soient $E = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, $X \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$, V le sous-espace vectoriel de \mathbb{F}^E engendré par la famille des vecteurs lignes de X , rg_V l'application qui associe à $A \subseteq E$ la dimension de la projection de V sur \mathbb{F}^A parallèlement à $\mathbb{F}^{\bar{A}}$, et W l'orthogonal de V pour le produit scalaire standard $\langle x, y \rangle = \sum_{e \in E} x(e)y(e)$. Alors

- i. $\text{rg}_V = \text{rg}_X$;
- ii. les bases du matroïde de fonction rang rg_W sont les complémentaires des bases du matroïde de fonction rang rg_V ;
- iii. $\text{rg}_W(A) = |A| + \text{rg}_V(E - A) - \text{rg}_V(E)$.

Démonstration.  —

□

Matroïdes graphiques. Soit $G = (V, E)$ un graphe (simple ou pas avec boucle ou pas) et soit \mathcal{J} l'ensemble des ensembles d'arêtes des forêts de G . \mathcal{J} est l'ensemble des indépendants d'un matroïde sur E , appelé le matroïde des circuits de G . Un matroïde isomorphe à un tel matroïde est dit **graphique**.

Exercice 6.2. Quel est le rang du matroïde des circuits d'un graphe ?

6.2

Matroides transversals. Soit G un graphe biparti de bipartition $E \sqcup F$ et soit $\mathcal{J}(G)$ l'ensemble des parties A de E telle qu'il existe un **couplage** dans G couvrant A , i.e., un ensemble d'arêtes disjointes deux-à-deux dont l'ensemble des sommets contient E .

Proposition 6.3. *L'ensemble $\mathcal{J}(G)$ est l'ensemble des indépendants d'un matroïde sur E .*

Démonstration.  —

□

Un matroïde isomorphe à un tel matroïde est dit **transversal**.

Matroides de couplage. Soit G un graphe simple et soit E un sous-ensemble non vide de l'ensemble des sommets de G . Soit $\mathcal{J}(G, E)$ l'ensemble des sous-ensembles I de E tel qu'il existe un **couplage** dans G couvrant les sommets de I , i.e., un ensemble d'arêtes de G disjointes deux-à-deux dont l'ensemble des sommets contient I .

Proposition 6.4. *L'ensemble $\mathcal{J}(G; E)$ est l'ensemble des indépendants d'un matroïde sur E .*

Démonstration. \Leftarrow —

□

Un matroïde isomorphe à un tel matroïde est dit **de couplage**.

Axiomatique des rangs. Un matroïde est déterminé par sa **fonction rang** $\text{rg} : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{N}$ où $\text{rg}(U)$ est la taille maximale d'un sous-ensemble indépendant de U .

Théorème 6.5. *La fonction rang rg d'un matroïde sur E vérifie les trois propriétés suivantes*

R.1 $\text{rg}(A) \leq |A|,$

R.2 $\text{rg}(A) \leq \text{rg}(B)$ pour tout $A \subset B,$

R.3 $\text{rg}(A \cup B) + \text{rg}(A \cap B) \leq \text{rg}(A) + \text{rg}(B).$

Réciproquement, si $\text{rg} : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{N}$ satisfait R.1, R.2 et R.3 alors $\mathcal{J} = \{A \subseteq E : \text{rg}(A) = |A|\}$ est l'ensemble des indépendants d'un matroïde sur E de fonction rang rg .

Démonstration.  —

□

Matroïde dual. Le **matroïde dual** M^* du matroïde M de fonction rang $\text{rg} : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{N}$ est le matroïde dont la fonction rang rg^* est donnée par l'expression

$$\text{rg}^*(A) = |A| + \text{rg}(E - A) - \text{rg}(E)$$

pour tout $A \subseteq E$.

Théorème 6.6. M^* est bien défini, $M^{**} = M$ et les bases de M^* sont les complémentaires des bases de M .

Démonstration.  —

□

Les **co-indépendants**, **co-dépendants**, **co-bases** et **co-circuits** d'un matroïde sont les indépendants, les dépendants, les bases et les circuits de son matroïde dual.

Par exemple les co-circuits du matroïde des circuits d'un graphe sont les ensembles d'arêtes dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes du graphe d'une unité.

Exercice 6.3. Soit G un graphe plan. Montrer que le dual du matroïde des circuits de G est isomorphe au matroïde des circuits du graphe dual de G . (Le graphe dual d'un graphe plan est le graphe de sommets les faces du graphe plan, d'arêtes les arêtes du graphe plan et de fonction d'attachement l'application qui à une arête associe les faces du graphe plan qui lui sont incidentes. On pourra utiliser après justification le fait que le dual d'un graphe plan est un graphe planaire.) 6.3

Bases optimales et algorithme glouton. Soit M un matroïde sur E muni d'une valuation $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie sur l'ensemble des éléments du matroïde, à valeurs réelles positives et étendue à l'ensemble des parties A de E selon l'expression

$$w(A) = \sum_{a \in A} w(a).$$

Nous examinons le problème du calcul d'une base de valuation minimale. A cette fin nous définissons un **coloriage** comme une paire (B, R) formée d'un indépendant et d'un co-indépendant de M disjoint ; un **coloriage complet** comme un coloriage (B, R) tel que $B \cup R = E$, i.e., tel que B soit une base et R une co-base de M ; un **coloriage complet optimal** comme un coloriage complet (B, R) tel que B soit une base de valuation minimale ou, de manière équivalente, tel que R soit une co-base de valuation maximale ; une **extension** d'un coloriage (B, R) comme un coloriage (B', R') tel que $B \subseteq B'$, $R \subseteq R'$; et pour finir deux règles d'**extension** d'un coloriage (B, R)


RB : Choisir un co-circuit D disjoint de B et augmenter B d'un élément de $D - R$ de valuation minimale.

RR : Choisir un circuit C disjoint de R et augmenter R d'un élément de $C - B$ de valuation maximale.

Théorème 6.7. *L'application répétée et arbitraire, à partir du coloriage trivial (\emptyset, \emptyset) , des deux règles d'extension des coloriages conduit à un coloriage complet optimal.*

Nous scindons la preuve en une série de lemmes.

Lemme 6.8. *Tout coloriage (B, R) admet une extension complète.*

Démonstration.  —

□

Lemme 6.9. *L'intersection d'un circuit C et d'un co-circuit D ne peut se réduire à un singleton.*


Démonstration.  —

□

Lemme 6.10. *Soient*


- (1-) (B, R) un coloriage complet;
- (2-) $x \in R$;
- (3-) C le circuit fondamental de la paire (x, B) ; et
- (4-) $z \in C$.

Alors la paire $(B + x - z, R - x + z)$ est un coloriage (complet).

Démonstration.  —

□

Lemme 6.11. *Si un coloriage (B, R) admet une extension complète optimale $(\widehat{B}, \widehat{R})$, alors il en est de même du coloriage obtenu en appliquant à (B, R) l'une quelconque des deux règles d'extension.*

Démonstration.  —

□

Lemme 6.12. *Si un coloriage n'est pas complet alors l'une des deux règles d'extension s'applique.*

Démonstration.  —

□

Preuve du théorème 6.7. Simple combinaison des lemmes précédents.

□

Théorème des mariages et matroides. Soit E un ensemble fini non-vide et soit \mathcal{F} une famille finie de sous-ensembles de E . Un **transversal** de \mathcal{F} est une injection φ de l'ensemble des indices de \mathcal{F} dans E telle que $\varphi(i) \in \mathcal{F}_i$ pour tout indice i .

Théorème 6.13 (Hall, 1935). Soit E un ensemble fini non-vide et soit \mathcal{F} une famille finie de sous-ensembles de E . Alors \mathcal{F} admet un transversal si et seulement si \mathcal{F} vérifie la condition suivante : pour tout sous-ensemble J de l'ensemble des indices de \mathcal{F} l'union des \mathcal{F}_j , $j \in J$, est de cardinalité au moins la cardinalité de J .

Cette condition est appelée la condition de Hall.

Démonstration. \Leftarrow —

□

Théorème 6.14 (Rado, 1942). Soit M un matroïde sur un ensemble E , et soit \mathcal{F} une famille finie de sous-ensembles de E indexée par I . Alors \mathcal{F} admet un transversal φ tel que $\varphi(I)$ soit un indépendant si et seulement si \mathcal{F} vérifie la condition suivante : pour tout sous-ensemble J de I l'union des \mathcal{F}_j , $j \in J$, est de rang au moins la cardinalité de J .

Démonstration. \Leftarrow — identique à la preuve du théorème précédent modulo le dictionnaire

cardinalité \leftrightarrow rang.

□

Exercice 6.4. [Nombre de matroides] Soit E un ensemble fini non vide à n éléments et soit E_r , $r = 0, 1, \dots, n$, l'ensemble des parties à r éléments de E .

Un sous-ensemble F de E_r est dit valide si pour tout $X, Y \in E_r \setminus F$, $X \neq Y$, le cardinal de $X \cap Y$ est au plus $r - 2$.

Question 1.— Montrer que si $F \subseteq E_r$ est valide alors $E_0 \cup E_1 \cup \dots \cup E_{r-1} \cup F$ est l'ensemble des libres d'un matroïde sur E .

Le nombre de matroides sur E est noté $f(n)$.

Question 2.— On suppose n divisible par 4 et on pose $r = n/2$. Soit C un couplage des éléments de E , i.e. une partition de E en r paires, soit G l'ensemble des $X \subseteq E_r$ qui sont l'union de $n/4$ éléments de C et soit $F = E_r \setminus G$. Montrer que F est valide. En déduire que $\log f(n) = \Omega(n)$.

Question 3.— Montrer que $\log \log f(n) = \Theta(n)$.

On rappelle que $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$.

6.4

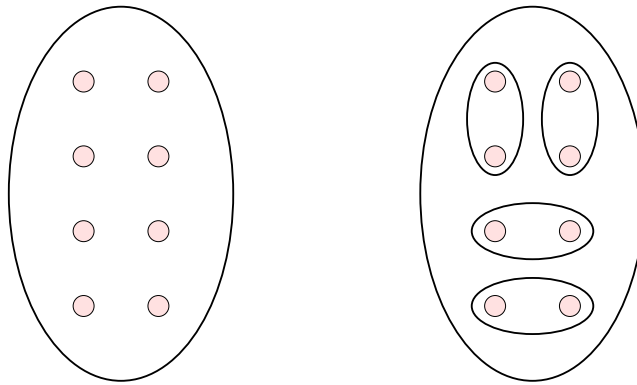


FIGURE 23 – Un ensemble à 8 éléments et deux de ses couplages

Solution 6.1. ↗
6.1

Solution 6.2. ↗
6.2

Solution 6.3. ↗
6.3

Solution 6.4. [Nombre de matroides] ↗
6.4

Références

- [1] B. Bollobás. *Combinatorics*. Cambridge University Press, 1986.
- [2] D. C. Kozen. *The Design and Analysis of Algorithms*. Springer-Verlag, 1992.
- [3] E. Lawler. *Combinatorial Optimization : Networks and Matroids*. Dover, Mineola, New York, 2001.
- [4] H. Whitney. On the abstract properties of linear dependence. *American Journal of Mathematics*, 57(3) :509–533, 1935.
- [5] R. J. Wilson. *Introduction to Graph Theory*. Longman, 1996. “Graph Theory has recently emerged as a subject in its own right, as well as being an important mathematical tool in such diverse subjects as operational research, chemistry, sociology and genetics. Robin Wilson’s book has been widely used as a text for undergraduate courses in mathematics, computer science and economics, and as a readable introduction to the subject for non-mathematicians. The opening chapters provide a basic foundation course, containing such topics as trees, algorithms, Eulerien and Hamiltonian graphs, planar graphs and colouring, with special reference to the four-colour theorem. Following, there are two chapters on directed graphs and transversal theory, relating these areas to such subjects as Markov chains and network flows. Finally, there is a chapter on matroid theory, which is used to consolidate some of the material from earlier chapters. For this new edition, the text has been completely revised, and there is a full range of exercices of varying difficulty. There is new material on algorithms, tree-searches, and graph-theoretical puzzles. Full solutions are provided for many of the exercices”.

7 Dimension de Vapnik-Chervonenkis d'un hypergraphe

Sources : [2, 1, 3, 5, 6, 4].

Soit X un ensemble.

Un **hypergraphe** sur X est la donnée, outre de X , d'un sous-ensemble \mathcal{R} de l'ensemble des parties de X . Les éléments de X sont appelés les **sommets** (ou **nœuds**) de l'hypergraphe et ceux de \mathcal{R} ses **hyperarêtes**.

Soit \mathcal{R} un hypergraphe sur X et soit $Y \subset X$.

La **trace** sur \mathcal{R} de Y , notée $\mathcal{R}|_Y$, est l'ensemble des $Y \cap R$, $R \in \mathcal{R}$.

La **dimension de Vapnik-Chervonenkis** ou **coefficient de trace** de \mathcal{R} est la borne supérieure des tailles des sous-ensembles finis de X dont la trace sur \mathcal{R} coïncide avec l'ensemble de leurs parties [9, 7, 8]. Un sous-ensemble fini de X dont la trace sur \mathcal{R} coïncide avec l'ensemble de ses parties est dit **pulvérisé** par \mathcal{R} .

Exercice 7.1. Montrer qu'un hypergraphe de dimension de Vapnik-Chervonenkis nulle se réduit à l'ensemble vide ou à un singleton. 7.1

Théorème 7.1. Soit d un entier naturel ≥ 1 . La dimension de Vapnik-Chervonenkis de l'hypergraphe des demi-espaces fermés de \mathbb{R}^d est $d + 1$.

Démonstration. $\color{red}{\blacktriangleleft}$ —

□

Exercice 7.2. Soit d un entier naturel ≥ 1 . Un demi-espace de \mathbb{R}^d est dit **positif** si il est définissable par une inéquation de la forme $\langle a, x \rangle \geq b$ où la coordonnée de rang d du vecteur a est strictement positive : $a_d > 0$. Montrer que la dimension de Vapnik-Chervonenkis de l'hypergraphe des demi-espaces positifs de \mathbb{R}^d est d . 7.2

Exercice 7.3. Montrer que la dimension de Vapnik-Chervonenkis de l'hypergraphe des $\{x \in \mathbb{R}^d \mid p(x) \geq 0\}$ où p décrit l'ensemble des polynômes à d variables de degré au plus D est un grand- O de $\binom{d+D}{d}$. 7.3

Théorème 7.2. Soit \mathcal{R} un hypergraphe sur X de dimension de Vapnik-Chervonenkis au plus d et soit $A \subseteq X$ de cardinalité n . Alors la taille de la trace sur \mathcal{R} de A est au plus égale à

$$\Phi(d, n) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{d} \quad (1)$$

et cette borne est atteinte pour les traces sur l'hypergraphe des demi-espaces positifs de \mathbb{R}^d des familles de n points de \mathbb{R}^d en position générale, i.e., dont les sous-familles de taille au plus $d + 1$ sont affinement libres.

Démonstration. $\color{red}{\dashv}$ —

□

Exercice 7.4. Soit \mathcal{R} un hypergraphe de dimension de Vapnik-Chervonenkis d , soit F une formule ensembliste d'arité k utilisant les opérations d'union, intersection et différence et soit $\mathcal{R}' = \{F(r_1, r_2, \dots, r_k) \mid r_i \in \mathcal{R}\}$. Montrer que la dimension de Vapnik-Chervonenkis de l'hypergraphe \mathcal{R}' est un $O(kd \ln k)$. 7.4

Exercice 7.5. Soit d un entier naturel ≥ 1 et soit \mathcal{R} l'hypergraphe défini sur l'ensemble des hyperplans affines de \mathbb{R}^d par $R \in \mathcal{R}$ si il existe un d -simplexe σ de \mathbb{R}^d tel que R soit l'ensemble des hyperplans affines de \mathbb{R}^d qui intersectent l'intérieur de σ . Montrer que \mathcal{R} est de dimension de Vapnik-Chervonenkis fini. 7.5

Nous supposons maintenant que l'ensemble X est muni d'une mesure de probabilité μ concentrée sur un sous-ensemble fini A de X .

Soit $0 \leq \epsilon \leq 1$ un paramètre.

Un ϵ -net est un sous-ensemble de A qui intersecte toute hyperarête de \mathcal{R} de mesure $\geq \epsilon$.

Soit $z = z_1 z_2 \dots z_m$ un vecteur aléatoire de X^m tiré selon la loi μ , soit $N(z)$ l'ensemble des z_i et soit r une hyperarête de \mathcal{R} de mesure $\geq \epsilon$.

La probabilité de l'événement " $N(z)$ ne rencontre pas r " est

$$(1 - \mu(r))^m \leq e^{-\mu(r)m} \leq e^{-\epsilon m}.$$

(Nous utilisons $1 + x \leq e^x$.) Il suit, sous l'hypothèse que la dimension de Vapnik-Chervonenkis de \mathcal{R} est au plus d , que $N(z)$ n'est pas un ϵ -net avec une probabilité bornée par

$$e^{-\epsilon m} \times \#\mathcal{R}|_A \leq e^{-\epsilon m} \times \Phi(d, n) \leq e^{-\epsilon m + d \ln \frac{en}{d}}$$

(où n est la taille de A) et cette probabilité est strictement inférieure à 1 pour $m > \frac{1}{\epsilon} d \ln \frac{en}{d}$. (Ici nous utilisons l'inégalité $\Phi(d, n) \leq (en/d)^d$, valide pour $n \geq d \geq 1$.)

Théorème 7.3 (Théorème des epsilon-nets). *Soit \mathcal{R} un hypergraphe sur X de dimension fini d , μ une mesure de probabilité sur X concentrée sur un sous-ensemble fini A , $0 < \epsilon, \delta < 1$ des paramètres, m un entier $\geq 8/\epsilon$ et $z = z_1 z_2 \dots z_m$ un vecteur aléatoire de X^m tiré selon la loi μ . Alors $N = \{z_1, z_2, \dots, z_m\}$ est un ϵ -net avec probabilité supérieure à*

$$1 - 2\Phi(d, 2m)2^{-\epsilon m/2}. \quad (2)$$

En particulier³ si

$$m \geq \max\left(\frac{4}{\epsilon} \lg \frac{2}{\delta}, \frac{8d}{\epsilon} \lg \frac{8d}{\epsilon}\right), \quad (3)$$

alors N est un ϵ -net avec probabilité $> 1 - \delta$. \square

Nous scindons la preuve en deux lemmes.

Sans perte de généralité nous supposons $X = A$ et $\mu(R) \geq \epsilon$ pour tout $R \in \mathcal{R}$.

Pour $z = z_1 z_2 \dots z_{2m} \in X^{2m}$, $r \in \mathcal{R}$, posons

- (1-) $l_1(z, r) = |\{i \leq m \mid z_i \in r\}|$,
- (2-) $l_2(z, r) = |\{i \leq 2m \mid z_i \in r\}|$,
- (3-) $N(z) = \{z_1, z_2, \dots, z_m\}$

et considérons les ensembles

$$\begin{aligned} Q &= \{z \in X^{2m} \mid N(z) \text{ n'est pas un } \epsilon\text{-net, i.e. } \exists r \in \mathcal{R}, l_1(z, r) = 0\} \\ J(r) &= \{z \in X^{2m} \mid l_1(z, r) = 0 \text{ et } l_2(z, r) \geq \epsilon m/2\} \\ J &= \bigcup_{r \in \mathcal{R}} J(r) \end{aligned}$$

Lemme 7.4. $\text{Prob}(z \in Q) \leq 2 \text{Prob}(z \in J)$ pour $m \geq 8/\epsilon$.

Démonstration. $\color{red}{\triangleleft} \text{ —}$ \square

Lemme 7.5. $\text{Prob}(z \in J) \leq \Phi(d, 2m)2^{-\epsilon m/2}$.

Démonstration. $\color{red}{\triangleleft} \text{ —}$ \square

Preuve du Théorème des ϵ -nets. Simple affiliation des deux lemmes qui précèdent. \square

Le lecteur observera que le théorème des epsilon-nets assure l'existence de ϵ -nets de taille au plus la partie entière supérieure de $8d/\epsilon \lg 8d/\epsilon$ ($\color{red}{\triangleleft}$). Komlós, Pach et Woeginger [3] montre l'existence d' ϵ -nets de taille au plus $d/\epsilon(\ln 1/\epsilon + 2 \ln \ln 1/\epsilon + 6)$ pour $\epsilon \leq 1/2$ (information à vérifier : j'ai un doute sur la nature du logarithme : népérien?).

3. Les logarithmes sont en base deux.

Solution 7.1. ↗
7.1

Solution 7.2. ↗
7.2

Solution 7.3. ↗
7.3

Solution 7.4. ↗
7.4

Solution 7.5. ↗
7.5

Références

- [1] A. Blumer, A. Ehrenfeucht, D. Haussler, and M. K. Warmuth. Learnability and the Vapnik-Chervonenkis dimension. *J. ACM*, 36(4) :929–965, 1989.
- [2] D. Haussler and E. Welzl. Epsilon-nets and simplex range queries. *Discrete Comput. Geom.*, 2 :127–151, 1987.
- [3] J. Komlós, J. Pach, and G. Woeginger. Almost tight bounds for ϵ -nets. *Discrete Comput. Geom.*, 7 :163–173, 1992.
- [4] J. Matoušek. Geometric range searching. *ACM Comput. Surv.*, 26 :421–461, 1994.
- [5] J. Matoušek. *Lectures on Discrete Geometry*. Number 212 in Graduate texts in Mathematics. Springer-Verlag, 2002.
- [6] K. Mulmuley. *Computational Geometry : An Introduction Through Randomized Algorithms*. Prentice-Hall, 1994.
- [7] N. Sauer. On the density of families of sets. *J. Combin. Theory Ser. A*, 13(1) :145–147, 1972.
- [8] S. Shelah. A combinatorial problem ; stability and order for models and theories in infinity languages. *Pacific J. Math.*, 41(1) :247–261, 1972.
- [9] V. N. Vapnik and A. Y. Chervonenkis. On the uniform convergence of relative frequencies of events to their probabilities. *Theory Probab. Appl.*, 16(2) :264–280, 1971.

8 Optimisation linéaire - l'algorithme du simplexe

Programmes linéaires : faisable/infaisable, borné/non-borné, solution admissible, solution optimale, optimum. Programmes linéaires équivalents, variables d'écart, théorème de dualité pour la programmation linéaire, conditions des écarts complémentaires, programmation linéaire (cf [3, chap.1]).

Hypergraphe H , ensemble transversal ou transversal, coefficient de transversalité (transversal number) $\tau(H)$, couplage (packing, matching), coefficient de couplage (matching number) $\nu(H)$, transversal fractionnaire, couplage fractionnaire, coefficients fractionnaires de transversalité et de couplage $\tau^(H), \nu^*(H)$.*

Polytope des vecteurs caractéristiques des ensembles d'arêtes des arbres couvrants d'un graphe simple connexe.

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad b \in \mathbb{R}^{m \times 1}, \quad c \in \mathbb{R}^{1 \times n}, \quad x \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \quad y \in \mathbb{R}^{1 \times m}$$

Un **programme linéaire** est la donnée d'une forme linéaire

$$(x_i) \in \mathbb{R}^n \longmapsto \sum_{i=1}^n c_i x_i \in \mathbb{R}$$

à maximiser (ou minimiser) sur un domaine polyédral défini comme l'intersection d'une famille finie d'hyperplans et de demi-espaces

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \square_i b_i, \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

où $\square_i \in \{\leq, \geq, =\}$. Il est d'usage d'écrire le PL sous la forme

$$\max\{cx \mid Ax \square b\}$$

ou encore

$$\begin{array}{ll} \max & cx \\ \text{sous contraintes} & Ax \square b \end{array}$$

où c est la matrice ligne des c_i , x est la matrice colonne des x_i , A est la (m, n) -matrice des a_{ij} , b est la matrice colonne des b_i et \square est la matrice colonne des \square_i .

Un PL est **faisable** si le domaine d'optimisation est non vide; **infaisable** sinon. Un PL est **borné** si la forme linéaire à optimiser admet un maximum sur le domaine d'optimisation; **non borné** sinon. (Un PL borné est faisable.) Une **solution admissible** d'un PL faisable est un point du domaine d'optimisation. Une **solution optimale** d'un PL borné est une solution admissible qui réalise le maximum de la forme linéaire. L'**optimum** d'un PL borné est le maximum de la forme linéaire sur le domaine d'optimisation.

Deux PL sont **équivalents** si l'on peut passer de l'un à l'autre par itération des opérations suivantes et de leurs inverses

- (1-) substituer à une contrainte d'égalité $a_i x = b_i$ la paire de contraintes $a_i x \leq b_i$ et $a_i x \geq b_i$;
- (2-) substituer à la contrainte $a_i x \leq b_i$ la contrainte $-a_i x \geq -b_i$;
- (3-) substituer à la contrainte $a_i x = b_i$ la contrainte $-a_i x = -b_i$;
- (4-) substituer à la contrainte $a_i x \leq b_i$ la contrainte $a_i x + z = b_i$ où z est une variable supplémentaire (dite **variable d'écart**) soumise à la contrainte $z \geq 0$;
- (5-) substituer à une variable x_i la différence $z_i - z'_i$ de deux variables supplémentaires z_i et z'_i , soumises aux contraintes $z_i, z'_i \geq 0$.
- (6-) substituer à une variable x_i une nouvelle variable z_i ;
- (7-) substituer à une variable x_i l'opposée d'une nouvelle variable z_i ;
- (8-) substituer à maximiser (resp. minimiser) cx minimiser (resp. maximiser) $-cx$.

Deux PL équivalents sont simultanément faisables ou simultanément infaisables, simultanément faisables, bornés et de même optimum (au signe près) ou simultanément faisables et non bornés.

Par application des règles (1) et (2) on voit que tout programme linéaire est équivalent à un programme de la forme

$$\max\{cx : Ax \leq b\}$$

ou encore, par application des règles (4) et (5), à un PL de la forme

$$\max\{cx : Ax = b, x \geq 0\}.$$

Théorème de dualité pour la programmation linéaire, [3, 1, 2].

Le **programme linéaire dual** du programme linéaire

$$\max\{cx : Ax \leq b\}$$

est défini à équivalence près comme le programme linéaire

$$\min\{yb : yA = c, y \geq 0\}.$$

Exercice 8.1. Montrer que si les programmes linéaires $\max\{cx : Ax \leq b\}$ et $\max\{c'x' : A'x' \leq b'\}$ sont équivalents alors il en est de même des programmes $\min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ et $\min\{y'b' : y'A' = c', y' \geq 0\}$. 8.1

Lemme 8.1. *Le dual du dual d'un PL est équivalent au PL initial.* □

Démonstration. ✎ — □

En pratique comme en théorie on ne se ramène pas nécessairement à la forme $\max\{cx : Ax \leq b\}$ pour calculer le PL dual d'un PL donné. On applique les règles mentionnées dans la table ci-dessous où la séparation des contraintes de type $x_i \leq 0$ et $x_i \geq 0$ des autres

contraintes a pour effet de conduire à une expression simplifiée du PL dual. En particulier le lecteur vérifiera que l'application de ces règles au PL dual (après transformation du min en max par l'opération adhoc) conduit directement au PL primal.

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$b \in \mathbb{R}^{m \times 1}, \quad c \in \mathbb{R}^{1 \times n}, \quad x \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \quad y \in \mathbb{R}^{1 \times m}$$

$$\square = \{\leq, \geq, =\}^{m \times 1}, \quad \square^* = \{\leq, \geq, =\}^{1 \times n}$$

	PL primal		PL dual
	x_1, x_2, \dots, x_n	variables	y_1, y_2, \dots, y_m
	$\max cx$	fonctions objectifs	$\min yb$
	$Ax \square b$	contraintes	$yA \square^* c$
	$\square_i = \leq$	contrainte primale \leftrightarrow variable duale	$y_i \geq 0$
	$\square_i = \geq$		$y_i \leq 0$
	$\square_i = =$		$y_i \in \mathbb{R}$
	$x_j \geq 0$	variable primale \leftrightarrow contrainte duale	$\square_j^* = \geq$
	$x_j \leq 0$		$\square_j^* = \leq$
	$x_j \in \mathbb{R}$		$\square_j^* = =$

TABLE 1 – Calcul du PL dual d'un PL.

Théorème 8.2 (Théorème de dualité pour la programmation linéaire). *Soit L un PL et soit L' son PL dual. Alors soit L et L' sont infaisables, soit L est infaisable et L' est non-borné, soit L est non-borné et L' est infaisable, soit L et L' sont faisables, bornés et ont le même optimum.* \square

Démonstration. $\color{red}{\leftarrow} \text{ —}$ \square

Théorème 8.3. *Soit $\max\{cx : Ax = b, x \geq 0\}$ un PL faisable et borné où la matrice A est de rang égal à son nombre de lignes. Alors il existe une solution optimale x et une sous-matrice carré A_{*B} de A inversible telle que $x_{B^*} = A_{*B}^{-1}b$ et $x_{\overline{B^*}} = 0$.* \square

Démonstration. $\color{red}{\leftarrow} \text{ —}$ \square

Corollaire 8.4 (Conditions des écarts complémentaires). Soit $\max\{cx : Ax \leq b\}$ et $\min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ une paire primal-dual de PL faisables, soit x une solution admissible du primal et soit y une solution admissible du dual. Les assertions suivantes sont équivalentes

- (1-) x et y sont des solutions optimales;
- (2-) $cx = yb$;
- (3-) $y(b - Ax) = 0$. □

Démonstration.  — □

Corollaire 8.5 (Conditions des écarts complémentaires du primal et du dual). Soit $\min\{cx : Ax \geq b, x \geq 0\}$ et $\max\{yb : yA \leq c, y \geq 0\}$ une paire primal-dual de PL faisables, soit x une solution admissible du primal et soit y une solution admissible du dual. Les assertions suivantes sont équivalentes

- (1-) x et y sont des solutions optimales;
- (2-) $cx = yb$;
- (3-) $(c - yA)x = 0, y(b - Ax) = 0$. □

Démonstration.  — □

Transversal d'un hypergraphe. Dans ce paragraphe un **hypergraphe** est une paire (V, E) où V est un ensemble fini non vide et où E est un sous-ensemble de l'ensemble des parties non vides de V . Les éléments de V (resp. E) sont appelés **sommets** (resp. **arêtes**). On étend de manière naturelle la terminologie des graphes aux hypergraphes. En particulier la notion de "matrice" d'incidence : $I : V \times E \rightarrow \{0, 1\}$ définie par

$$I(v, e) = \begin{cases} 1 & \text{si } v \in e \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $H = (V, E)$ un hypergraphe et soit $I : V \times E \rightarrow \{0, 1\}$ sa "matrice" d'incidence.

Un **transversal** de H est un sous-ensemble de l'ensemble des sommets de H dont l'intersection avec toute arête de H est non vide. Le **coefficient de transversalité** de H , noté $\tau(H)$, est le minimum des tailles des transversaux de H .

Un **transversal fractionnaire** est une application $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ à valeurs positives telle que

$$\sum_{v \in V: v \in e} f(v) \geq 1$$

pour tout $e \in E$. Le **coefficient fractionnaire de transversalité** de H , noté $\tau^*(H)$, est le minimum des $\sum_{v \in V} f(v)$ lorsque f décrit l'ensemble des transversaux fractionnaires de H . En d'autres termes $\tau^*(H)$ est l'optimum du PL dans \mathbb{R}^V

$$(\text{PL}_{\tau^*}) \quad \begin{cases} \min_{f \in \mathbb{R}^V} & \sum_{v \in V} f(v) \\ \text{s.c} & \sum_{v \in V} I(v, e) f(v) \geq 1 \quad (\forall e \in E) \\ & f(v) \geq 0 \quad (\forall v \in V) \end{cases}$$

et un transversal fractionnaire est une solution admissible de ce programme.

En interprétant un transversal fractionnaire à valeurs entières 0 ou 1 comme la fonction caractéristique d'un transversal on voit immédiatement que $\tau(H)$ est l'optimum du PL en **nombre entiers**

$$(\text{PL}_{\tau}) \quad \begin{cases} \min_{f \in \mathbb{R}^V} & \sum_{v \in V} f(v) \\ \text{s.c} & \sum_{v \in V} I(v, e) f(v) \geq 1 \quad (\forall e \in E) \\ & f(v) \in \{0, 1\} \quad (\forall v \in V) \end{cases}$$

Le programme linéaire (PL_{τ^*}) étant une relaxation du programme linéaire en nombres entiers (PL_{τ}) on a $\tau^*(H) \leq \tau(H)$.

Un **couplage** de H est un sous-ensemble de l'ensemble des arêtes de H dont les arêtes sont disjointes deux-à-deux. Le **coefficient de couplage** de H , noté $\nu(H)$, est le maximum des tailles des couplages de H .

Un **couplage fractionnaire** est une application $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ à valeurs positives telle que

$$\sum_{e \in E: v \in e} g(e) \leq 1$$

pour tout $v \in V$. Le **coefficient fractionnaire de couplage** de H , noté $\nu^*(H)$, est le maximum des $\sum_{e \in E} g(e)$ lorsque g décrit l'ensemble des couplages fractionnaires de H . En d'autres termes $\nu^*(H)$ est l'optimum du PL dans \mathbb{R}^E

$$(\text{PL}_{\nu^*}) \quad \begin{cases} \max_{g \in \mathbb{R}^E} & \sum_{e \in E} g(e) \\ \text{s.c} & \sum_{e \in E} I(v, e)g(e) \leq 1 \quad (\forall v \in V) \\ & g(e) \geq 0 \quad (\forall e \in E) \end{cases}$$

et un couplage fractionnaire est une solution admissible de ce programme.

En interprétant un couplage fractionnaire à valeurs entières 0 ou 1 comme la fonction caractéristique d'un couplage on voit immédiatement que $\nu(H)$ est l'optimum du programme linéaire en nombres entiers

$$(\text{PL}_{\nu}) \quad \begin{cases} \max_{g \in \mathbb{R}^E} & \sum_{e \in E} g(e) \\ \text{s.c} & \sum_{e \in E} I(v, e)g(e) \leq 1 \quad (\forall v \in V) \\ & g(e) \in \{0, 1\} \quad (\forall e \in E) \end{cases}$$

Le programme linéaire (PL_{ν^*}) étant une relaxation du programme linéaire en nombres entiers (PL_{ν}) on a $\nu(H) \leq \nu^*(H)$.

Théorème 8.6. *Soit H un hypergraphe. Alors $\nu(H) \leq \nu^*(H) = \tau^*(H) \leq \tau(H)$.*

Démonstration.  —

□

Théorème 8.7 (Théorème de König). *Soit H un graphe biparti. Alors $\nu(H) = \tau(H)$.*

Démonstration.  —

□

Exercice 8.2. Soit H un hypergraphe sur un ensemble fini de dimension de Vapnik-Chervonenkis au plus d . Montrer que $\tau(H)$ est un grand- O de $d\tau^*(H) \ln \tau^*(H)$. 8.2


Description polyédrale de l'ensemble des arbres couvrants d'un graphe simple connexe. Soit $G = (V, E)$ un graphe simple connexe d'ordre $n \geq 1$. Soit \mathcal{B} l'ensemble des ensembles d'arêtes des arbres couvrants de G et soit P_G l'enveloppe convexe des vecteurs caractéristiques des éléments de \mathcal{B} . (Le vecteur caractéristique de $F \subset E$, noté $\text{VC}(F)$, est le vecteur $x \in \mathbb{R}^E$ défini par $x_e = 1$ si $e \in F$; 0 sinon.) Les vecteurs caractéristiques des éléments de \mathcal{B} étant des sommets du cube $[0, 1]^E$ il suit que

$$\text{Vert}(P_G) = \text{VC}(\mathcal{B}).$$

Théorème 8.8. Une \mathcal{H} -présentation de P_G est la suivante

$$(**) \quad \begin{cases} \sum_{e \in E} x_e & = |V| - 1 \\ \sum_{e \in E} I(e, X)x_e & \leq |X| - 1 \quad (\forall \emptyset \neq X \subsetneq V) \\ x(e) & \geq 0 \quad (\forall e \in E) \end{cases}$$

où $I(e, X) = 1$ si $e \in X$; 0 sinon.

Démonstration.  —

□

L'algorithme du simplexe. Je renvoie à [3, chap. 5].

Solution 8.1. ↗
8.1

Solution 8.2. ↗
8.2

Références

- [1] R. Cottle, E. Johnson, and R. Wets. Georges B. Dantzig (1914–2005). *Notices Amer. Math. Society*, 54(3) :344–362, march 2007.
- [2] D. Gale. Linear programming and the simplex method. *Notices Amer. Math. Society*, 54(3) :364–369, march 2007.
- [3] J. Matoušek and B. Gärtner. *Understanding and using linear programming*. Universitext. springer, 2007.

9 Cuttings, partitions simpliciales et recherche simpliciale

Soit X un ensemble de n points du plan en position générale.

Sources : [2, 6, 7, 4, 1]

Un arbre de **recherche simpliciale** sur X est un arborescence dont tous les nœuds internes sont de degré entrant au moins 2, augmenté pour chaque nœud ν de l'arbre de deux sous-ensembles X_ν et Y_ν de X et d'un triangle $\Delta_\nu \supset X_\nu$ tels que

- (1-) $X_{\text{racine de l'arbre}} = X$;
- (2-) pour tout nœud interne ν de l'arbre d'arêtes entrantes les paires $\nu_1\nu, \nu_2\nu, \dots, \nu_r\nu$ la famille des X_{ν_i} est une partition de X_ν ;
- (3-) pour tout nœud interne ν de l'arbre $Y_\nu = X_\nu \cap \partial\Delta_\nu$;
- (4-) pour tout nœud externe ν de l'arbre X_ν est un singleton, $Y_\nu = \emptyset$ et $\Delta_\nu = X_\nu$.

Notons que les points de X étant en position générale le cardinal de Y_ν est au plus 6.

Soit A un arbre de recherche simpliciale sur X , soit Δ un triangle ou **domaine requête**, et soit $\omega(A, \Delta)$ le facteur préfixe de A dont les nœuds externes sont les nœuds ν de A tels que ν est le seul nœud du chemin joignant ν à la racine de A tel que $\Delta_\nu \subset \Delta$ ou (exclusif) $\Delta_\nu \subset \Delta^c$, le complémentaire dans le plan de l'intérieur de Δ . Par construction

$$\Delta \cap X = \bigsqcup_{\nu} X'_\nu \quad (1)$$

où ν décrit l'ensemble des nœuds externes de $\omega(A, \Delta)$ et où $X'_\nu = X_\nu$ si $\Delta_\nu \subset \Delta$; $Y_\nu \cap \partial\Delta$ sinon. Ainsi l'ensemble $\Delta \cap X$ est calculable en un nombre de tests d'intersection entre le domaine requête Δ et les Δ_u égal au nombre de nœuds de l'arborescence $\omega(A, \Delta)$. En abrégé, nous dirons que l'arborescence A supporte des requêtes simpliciales en temps (implicite) $\max_{\Delta} \#\omega(A, \Delta)$. Posons

$$\rho(n) = \max_{X, |X|=n} \min_A \max_{\Delta} \#\omega(A, \Delta). \quad (2)$$

Le résultat principal de ce chapitre est une borne supérieure en $O(\sqrt{n} \text{ polylog}(n))$ sur $\rho(n)$.

Théorème 9.1. *Pour tout ensemble X de n points du plan en position générale il existe un arbre de recherche simpliciale sur X supportant des requêtes simpliciales en temps implicite $O(\sqrt{n} \text{ polylog}(n))$.* \square

Un tel arbre de recherche simpliciale est calculable en temps $O(n \log n)$ et espace $O(n)$ (nous ne développons pas ce point). Ainsi, modulo un prétraitement de X en temps $O(n \log n)$ et espace $O(n)$, pour tout triangle Δ du plan les k points de X appartenant à Δ sont calculables en temps $O(k + \sqrt{n} \text{ polylog}(n))$.

La preuve du Théorème 9.1 est basée sur les notions de cutting, de partition simpliciale et d'arrangement de droites (triangulation canonique, zone d'une droite, dualité point-droite, etc.) que nous développons ci-après. (La section sur les arrangements de droites est renvoyée en fin de chapitre.)

Cuttings. Soit X un ensemble de n droites du plan muni d'une mesure de probabilité et soit r un paramètre, $1 \leq r \leq n$. Un $1/r$ -**cutting** de X est une décomposition du plan en un nombre fini de triangles (i.e. des intersections de trois demi-plans), d'intérieurs disjoints deux-à-deux, telle que pour tout triangle de la décomposition la mesure de l'ensemble des droites de X qui intersectent l'intérieur du triangle soit inférieure ou égale à $1/r$.

Théorème 9.2. *Soit X un ensemble de n droites du plan muni d'une mesure de probabilité et soit r un paramètre, $1 \leq r \leq n$. Alors X admet un $1/r$ -cutting de taille $O(r^2)$.*

Démonstration.  —

□

Partitions simpliciales. Soit X un ensemble de n points du plan en position générale. Une **partition simpliciale** de X est une partition de X munie d'une application qui à chaque classe de la partition associe un triangle contenant la classe. La **taille** d'une partition simpliciale est son nombre de classes; son **ratio** est le maximum des tailles de ses classes; son **module** relatif à une droite ℓ , noté $\rho(\ell)$, est le nombre de triangles de la partition d'intersection non vide avec ℓ ; et son **module** est le maximum des $\rho(\ell)$ lorsque ℓ décrit l'ensemble des droites du plan.

Théorème 9.3 ([3, 5]). *Soit X un ensemble de n points du plan et soit $1 \leq r \leq n$ un paramètre. Alors il existe une partition simpliciale de X de taille au plus r , de ratio au plus $2n/r$ et de module $O(\sqrt{r})$.*

□

Lemme 9.4. *Soit H un ensemble de droites du plan de taille polynomiale en r . Alors il existe une partition simpliciale $\mathbb{P}_r(X)$ d'au moins la moitié des points de X , de taille au plus r , dont chaque classe contient exactement n/r éléments, et dont le module relatif aux droites de H est un $O(\sqrt{r})$.*

Démonstration.  —

□

Lemme 9.5. *Il existe une partition simpliciale $\mathbb{P}_r(X)$ d'au moins la moitié des points de X , de taille au plus r , dont chaque classe contient exactement n/r éléments, et dont le module est un $O(\sqrt{r})$.*

Démonstration.  —

□

Démonstration du Théorème 9.3.  —

□

Arbre de recherche simpliciale. Nous sommes maintenant en mesure de démontrer l'existence d'arbres de recherche simpliciale supportant des requêtes simpliciales en temps $O(\sqrt{n} \text{ polylog}(n))$.

Preuve du théorème 9.1. Il suffit de construire un arbre de partition sur X tel que la partition simpliciale de X_ν associé au nœud ν soit un partition simpliciale de taille au plus $r_\nu = \sqrt{n_\nu}$, de ratio au plus $2n_\nu/r_\nu$ et de module $O(\sqrt{r_\nu})$. Le temps de requête implicite est alors gouverné par la récurrence

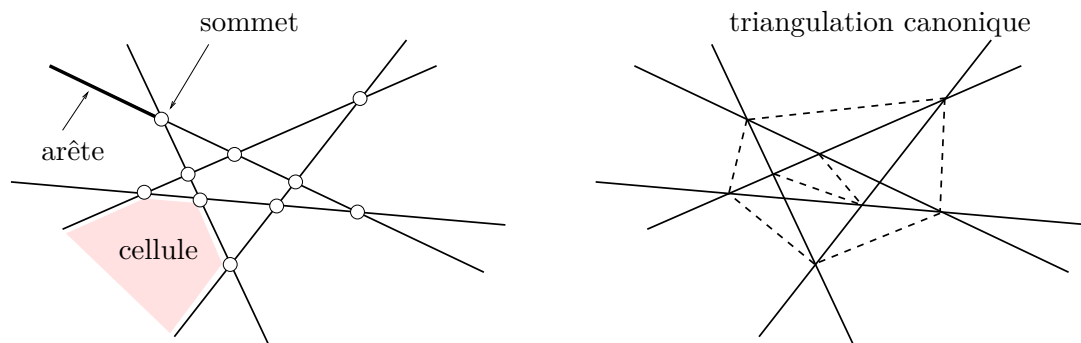
$$\begin{aligned} T_{\text{ime}}(n) &= O(r) + O(\sqrt{r})T_{\text{ime}}\left(\frac{2n}{r}\right) & r = \sqrt{n} \\ &= O\left(\sqrt{n}2^{O(\log \log n)}\right) \\ &= O\left(\sqrt{n} \text{polylog}(n)\right) \end{aligned}$$

□

Arrangements de droites. Rappelons qu'un **arrangement** de droites est un ensemble fini de droites du plan affine standard \mathbb{R}^2 . Un arrangement de droites induit une décomposition du plan en

- (1-) sommets : les points d'intersection des paires de droites de l'arrangement ;
- (2-) arêtes : les composantes connexes du complémentaire dans l'union des droites de l'arrangement de l'union de ses sommets ; et
- (3-) cellules : les composantes connexes du complémentaire dans le plan de l'union des droites de l'arrangement.

Une cellule est donc l'intérieur d'un polyèdre de dimension deux. Les sommets et arêtes d'une cellule sont les sommets et arêtes de sa clôture topologique.



La **triangulation canonique** d'un arrangement de droites est la décomposition du plan obtenue en subdivisant chaque cellule de l'arrangement de droites par l'ajout des segments de droites joignant les sommets de la cellule à son sommet d'ordonnée minimale ainsi que de l'éventuelle arête manquante de l'enveloppe convexe des sommets de la cellule. Le plan est ainsi décomposé en une famille de triangles généralisés (au sens d'intersection de trois demi-plans) d'intérieurs disjoints deux à deux.

La **zone** d'une droite dans un arrangement de droites est l'ensemble des cellules de l'arrangement intersectées par la droite.

Le **dual** d'un point x de coordonnées (a, b) est la droite x^* d'équation $y = ax - b$.

Le **dual** d'une droite ℓ d'équation $y = ax + b$ est le point ℓ^* de coordonnées $(a, -b)$.

Références

- [1] B. Chazelle. Lower bounds on the complexity of polytope range searching. *J. Amer. Math. Soc.*, 2 :637–666, 1989.
- [2] D. Haussler and E. Welzl. Epsilon-nets and simplex range queries. *Discrete Comput. Geom.*, 2 :127–151, 1987.
- [3] J. Matoušek. Efficient partition trees. *Discrete Comput. Geom.*, 8 :315–334, 1992.
- [4] J. Matoušek. Geometric range searching. *ACM Comput. Surv.*, 26 :421–461, 1994.
- [5] J. Matoušek. On constants for cuttings in the plane. *Disc. Comput. Geom.*, 20 :427–448, 1998.
- [6] J. Matoušek. *Lectures on Discrete Geometry*. Number 212 in Graduate texts in Mathematics. Springer-Verlag, 2002.
- [7] K. Mulmuley. *Computational Geometry : An Introduction Through Randomized Algorithms*. Prentice-Hall, 1994.
- [8] E. Welzl. On spanning trees with low crossing numbers. In *Data Structures and Efficient Algorithms, Final Report on the DFG Special Joint Initiative*, volume 594 of *Lecture Notes Comput. Sci.*, pages 233–249. Springer-Verlag, 1992.

10 A suivre